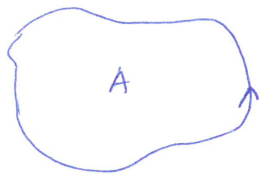
Integrálátalakító tételek

Eml: (Green-tétel)

$A \subset \mathbb{R}^2$ nyílt



$\partial A \equiv \gamma(t) \quad t \in [\alpha,\beta]$

$\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$

szakaszonként sima görbe, melyre $\partial A = \gamma(t)$ $t \in [\alpha,\beta]$

(azaz γ paraméterezi A határát)

$\underline{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $\quad \underline{F} \in C^1$ vektormező

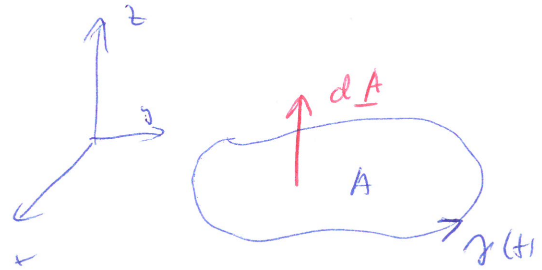
$$\Rightarrow \quad \oint_{\partial A} \underline{F}\, d\underline{r} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \underbrace{dA}_{dxdy}$$

megj: $\underline{v}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$

$$\hookrightarrow \quad \text{rot}\, \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \underline{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$\hookrightarrow$ ezzel

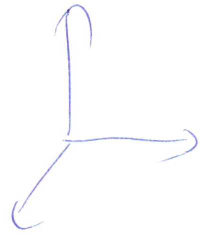
$$\oint_{\partial A} \underline{F}\, d\underline{r} = \iint_A \text{rot}\, \underline{v} \cdot d\underline{A} \quad , \text{ha } d\underline{A} = dA \cdot \underline{k}$$

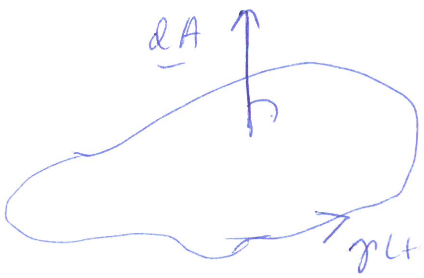


465/

Def: A felület és ∂A <u>összehangolt irányítású</u>, ha

A normálvektorának és ∂A irányításának igaz a „jobbkézszabály": jobb kezünk hüvelykujja $d\underline{A}$ irányba néz, a többi ujjunk pedig ∂A görbe irányításának megfelelően hajlik:



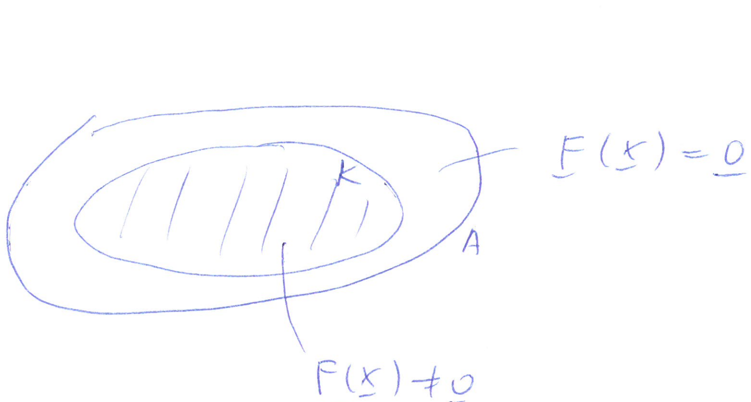


<u>VAGY</u>: $d\underline{A}$ normális felől nézve a görbe pozitív irányítású

<u>megj</u>: nem minden felület irányítható: pl Möbius-szalag.

Def: $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ vektormező <u>kompakt tartójú</u>, ha $\exists$

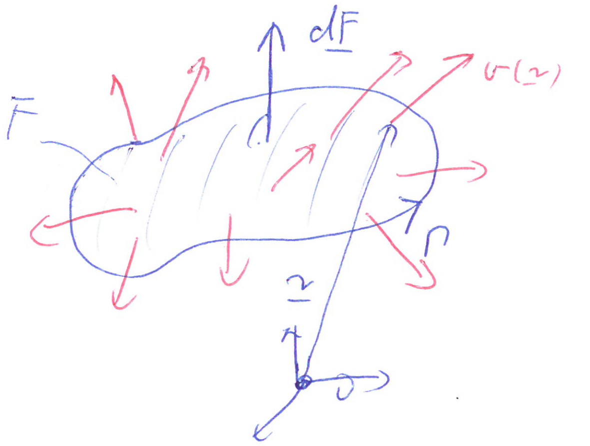
$K \subset A$ kompakt, melyre $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$, ha $\underline{x} \in A \setminus K$



TÉTEL (Stokes-tétel)

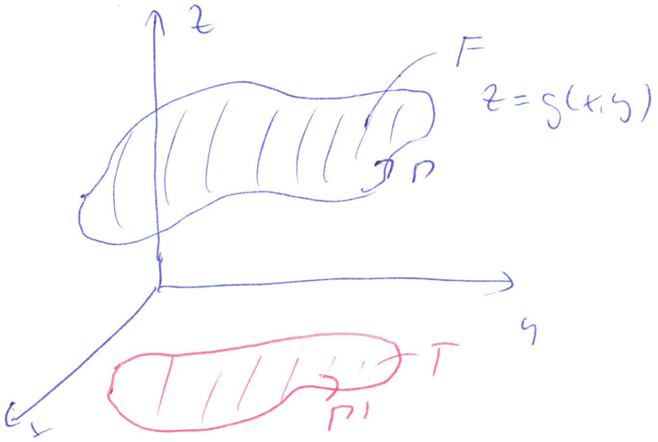
Ha a $\underline{v}(\underline{r}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ vektormező a Γ zárt görbével határolt egyszeresen összefüggő, önmetszés nélküli (?) irányított F felületen és annak határán folytonosan diff.ható, akkor

$$\oint_{\Gamma} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \iint_F \mathrm{rot}\, \underline{v} \cdot d\underline{F}$$



Biz: (vázlat)

Ha F felület $z = g(x,y)$ alakú, jelöljük a felület (x,y) síkra vett vetületét T-vel, a Γ határ vetületét Γ'-vel:

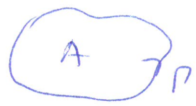


467)

$\underline{v}(\underline{r})$ vektormező F felület mentén tekintett első koordinátafüggvénye:

$$v_1(x,y,g(x,y)) =: \varphi(x,y)$$

$\Downarrow$ Green-tétel : $$\oint_\Gamma \varphi(x,y)\,dx = -\iint_A \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy$$

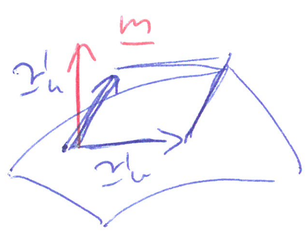


$$\oint_\Gamma v_1(x,y,z)\,dx = \oint_{\Gamma'} v_1(x,y,g(x,y))\,dx = \oint_\Gamma \varphi(x,y)\,dx =$$

$$= -\iint_T \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_T \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} v_1(x,y,g(x,y)) = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$$

„pikkelyezni" az F felületet!



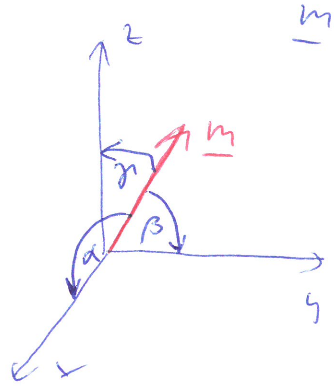
$$\underline{n} := \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}$$ normális egységvektor

$$d\underline{F} = dF \cdot \underline{n}$$

$$dF = |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|\,du\,dv$$

468)

megj: $\forall$ egységvektorra



$\underline{n} = \cos\alpha\, \underline{i} + \cos\beta\, \underline{j} + \cos\gamma\, \underline{k}$

$\nwarrow \nearrow \nearrow$

iránykoszinuszok

$\Downarrow$

A pikkely (x,y) ill (x,z) síkra vett vetületének területe:

$$\Delta f_z := dF \cdot \cos\gamma \quad \text{ill} \quad \Delta f_y = dF \cos\beta$$

Mivel $z = g(x,y) \rightsquigarrow$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{-g'_y}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}$$

$\Downarrow$

$$\oint_\Gamma v_1(x,y,z)\,dx = -\iint_T \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\cdot g'_y\right) dx\,dy =$$

$$= -\iint_T \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dx\,dy =$$

$$= -\iint_T \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta\right) \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} \ominus$$

565/

$$= \; - \iint_F \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial z} \cos\beta \right) dF \; \boxed{=}$$

$\uparrow$

F paraméterezése: $(x, y, g(x,y))$

$\hookrightarrow$

$$\underline{dF} = \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{vmatrix}^{dx\,dy} = (-g'_x, -g'_y, \cancel{1}) \, dx\,dy$$

$$dF = \sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}\, dx\,dy = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

$$\boxed{=} \iint_F \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos\gamma \right) dF \quad = \quad \oint_\Gamma v_1(x,y,z)\,dx$$

<u>Hasonlóan:</u>

$$\oint_\Gamma v_2(x,y,z)\,dy = \iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z} \cos\alpha \right) dF$$

$$\oint_\Gamma v_3(x,y,z)\,dz = \iint_F \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x} \cos\beta \right) dF$$

$\Downarrow$

$$\oint_\Gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \oint_\Gamma \left(v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz \right) =$$

470/

$$\stackrel{\text{S}}{=} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dF =$$

$$= \iint_F \text{rot}\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dF = \iint_F \text{rot}\, \underline{v} \cdot d\underline{F}$$

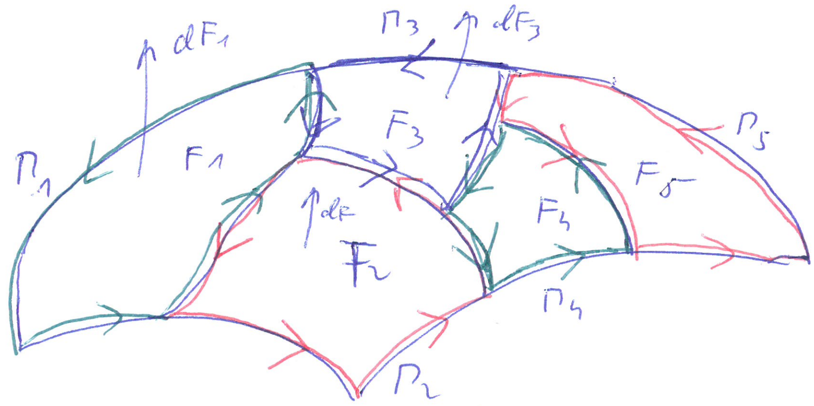
$$\uparrow$$

$\underline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ✓

Ha az F felület nem írható le $z = g(x,y)$ alakban, akkor felbontható olyan részekre, amelyek külön-külön már felírhatók így. Mivel minden részre igaz ez a tétel, összeadással megkapható az eredmény:

Összeadáskor
- a felületi integrálok összege a teljes F felületre vett felületi integrál lesz
- a határgörbék mentén vett vonalintegrálok kiesnek a részfelületek közös, az F belsejében futó részeken:

47 1)



$$F = \bigcup_{i=1}^{5} F_i$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_F \operatorname{rot} \underline{v}\, d\underline{F} = \sum_{i=1}^{5} \left(\iint_{F_i} \operatorname{rot} \underline{v}\, d\underline{F} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \oint_{\Gamma_i} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \oint_{\Gamma} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

!

<u>Megj.</u> sokkal általánosabb és elegánsabb kezelés: differenciálformákkal (diffgeo 2)

472/

Példák

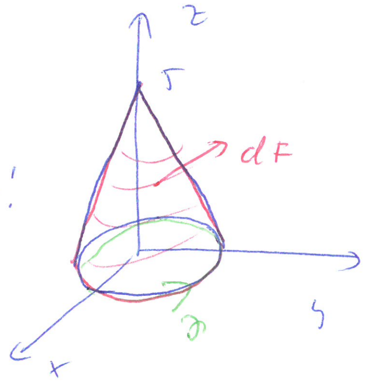
(1) $\underline{v}(\underline{r}) = (x+z)\underline{i} + (3y-2z)\underline{j} + (5x-3y)\underline{k}$

F felület: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1 \\ z&=0 \end{aligned}\right\}$ alapkörű kúppalást

(0,0,5) csúcspontú

$\iint_F \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F}$

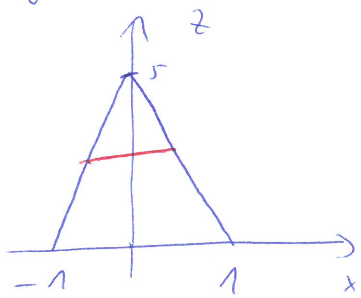
Szemléltessük a Stokes-tételt!



kúppalást egyenlete (paraméterezés)

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,v\cos u + \underline{j}\,v\sin u + 5\underline{k}(1-v) \qquad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,1]$$

($z = 5(1-v)$ egyenletű síkon éppen egy v sugarú kör van)



$\Downarrow$

$$r'_u(u,v) = (-v\sin u,\ v\cos u,\ 0)$$

$$r'_v(u,v) = (\cos u,\ \sin u,\ -5)$$

$\Downarrow$

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & -5 \end{vmatrix} = -5v\cos u\,\underline{i} - 5v\sin u\,\underline{j} - v\underline{k}$$

473/

b)
$$\operatorname{rot}\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z & 3y-2z & 5x-3y \end{vmatrix} = -\underline{i} - 4\underline{j}$$

$$\Rightarrow \iint_F \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-5v\cos u - 20v\sin u)\,du\,dv = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos u\,du = \int_0^{2\pi} \sin u\,du = 0$$

<u>másrészt</u> a határoló görbe egyenlete:

$$\underline{r} = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

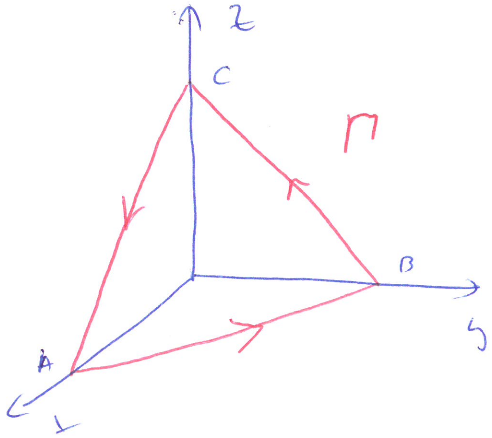
$$\int_\gamma \underline{v}\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + 3\sin t\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin t\cos t\,dt \ \circled{=}$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = (\cos t)\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} + (5\cos t - 3\sin t)\,\underline{k}$$

$$\circled{=} \int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt = 0.$$

474/

(2) $\underline{v}(\underline{r}) = y^2\underline{i} + z^2\underline{j} + x^2\underline{k}$



$A(a,0,0)$

$B(0,a,0)$

$C(0,0,a)$

$$\oint_\Gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = ?$$

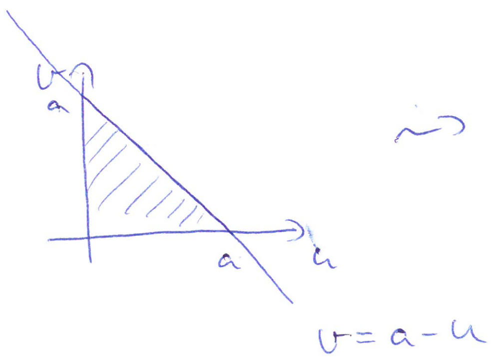
Oldjuk meg Stokes-tétellel (vonalintegrállal HF)

Paraméterezni kell az ABC háromszöglapot:

ez épp az $x+y+z=a$ egyenletű sík része

$\Downarrow$

$$\underline{r}(u,v) = (u, v, a-u-v)$$



$\rightsquigarrow$ $0 \le v \le a-u$

$0 \le u \le a$

$\hookrightarrow$ $\underline{r}'_u(u,v) = (1, 0, -1)$

$\underline{r}'_v(u,v) = (0, 1, -1)$

475/

$$\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$$

$\Downarrow$

önmehangolt irányítású

$$\text{rot}\,\underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(-2z) - \underline{j}\,(2x) + \underline{k}\,(-2y) =$$

$$= (-2z, -2x, -2y)$$

$$\text{rot}\,\underline{v}\,(\underline{r}(u,v)) = (-2(a-u-v), -2u, -2v)$$

$$\hookrightarrow \quad \text{rot}\,\underline{v}\,(\underline{r}(u,v)) \cdot (\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v) = -2(a-u-v) - 2u - 2v =$$

$$= -2a$$

$\Downarrow$

$$\iint_F \text{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F} = \int_0^a \underbrace{\int_0^{a-u} (-2a)\,dv}_{-2a(a-u)}\,du = -2a \underbrace{\int_0^a (a-u)\,du}_{\left[au - \frac{u^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2}} = \underline{\underline{-a^3}}$$

476/

Megj $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező Γ zárt görbe menti

cirkulációja:

$$\oint_\Gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}$$

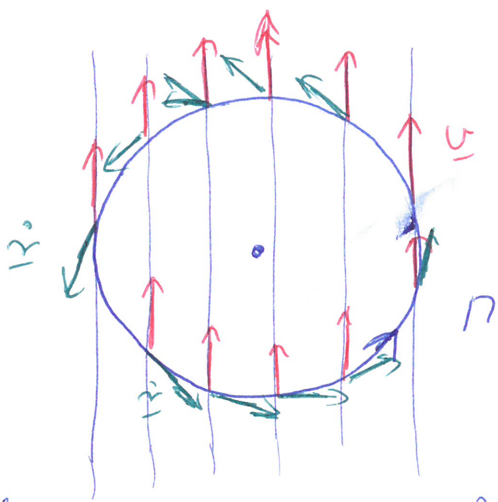
cirkuláció ≡ örvényesség

nemlíltetés:

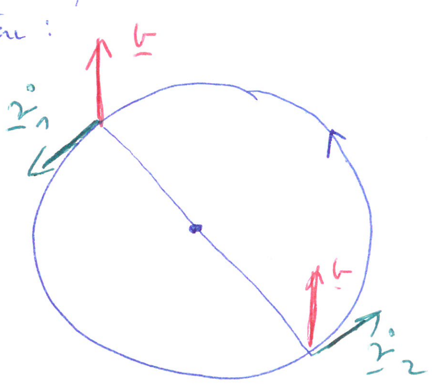
① lamináris áramlás ≡ $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}$ konstans

(párhuzamos áramlás)

Legyen Γ egy kör:



2 átellenes pontban:



$\dot{\underline{r}}_1$ és $\dot{\underline{r}}_2$ antiparalel:

$$\underline{v}\cdot\dot{\underline{r}}_1 = -\underline{v}\,\dot{\underline{r}}_2$$

$\Uparrow$

az átellenes pontok járuléka kiejti egymást

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$$

4.72)

belátható, hogy ∀ zárt görbére igaz a

$\Downarrow$

∀ lamináris áramlásra a cirkuláció 0:

$$\oint_{\Gamma} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$$

Stokes-tétel $\Rightarrow$ nemcsak lamináris áramlások cirkulációja 0:

$$\oint_{\Gamma} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \iint_{F} \mathrm{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F}$$

$\Rightarrow$ Ha F egyszeresen összefüggő és $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0}$

$\Downarrow$

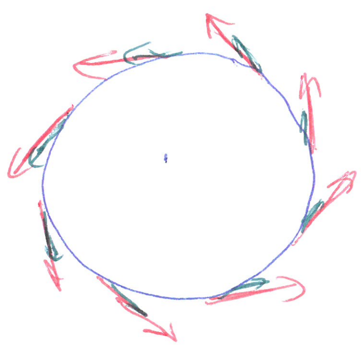
$$\oint_{\Gamma} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$$

∀ Γ zárt görbére

$\Leftrightarrow$ $\underline{v}(\underline{r})$ konzervatív (potenciálos)

Megj: mikor maximális a cirkuláció?

Ha $\underline{v}(\underline{r})$ és $\underline{\dot{r}}$ érintővektorok mindenütt párhuzamosak:



$\rightsquigarrow$ köráramok.

A Gauss-Osztrogradszkij tétel

Def.

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(y,z) \le x \le \psi(y,z),\ (y,z) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$$

x irányú henger (cilinder) halmaz

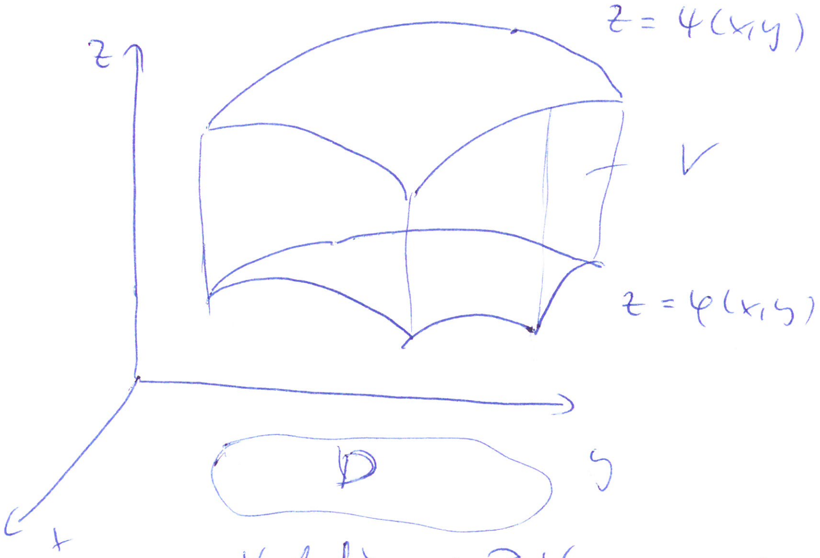
$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$$

z irányú henger (cilinder) halmaz

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,z) \le y \le \psi(x,z),\ (x,z) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$$

y irányú henger (cilinder) halmaz

pl: z-irányú



V határa : ∂V : $(x,y,\varphi(x,y))$ felület

$(x,y,\psi(x,y))$ felület

$+$ $\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)$ oldallap

115/

Lemma: Legyen V egy z irányú hengeralakzat (lsd előbb)

Tfh $\varphi, \psi \in C^1$ és $F: V \to \mathbb{R}$ C^1-beli (3 változós fv)

$\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ∂V felület kifelé mutató normális egységvektora

Ekkor
$$\int_V \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,dV = \int_{\partial V} F \cdot n_z \, dA$$

$\uparrow$ térfogati integrál $\qquad$ $\uparrow$ felületi integrál

Biz.
$$\int_V \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,dV = \int_D \underbrace{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,dz}_{[F(x,y,\psi(x,y)) - F(x,y,\varphi(x,y))]}\,dx\,dy =$$

$$= \int_D [F(x,y,\psi(x,y)) - F(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy \stackrel{*}{=}$$

480)

A felső határoló felület: $(x, y, \psi(x,y))$

↳ egységnyi normálvektora $\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2}}\,(-\psi'_x, -\psi'_y, 1)$

$$\Downarrow$$

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2}} \Rightarrow \cancel{dA = n_z\,dx\,dy}$$

$$dA = \sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2}\,dx\,dy$$

Az alsó határoló felület: $(x, y, \varphi(x,y))$

↳ egységnyi normálvektora

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}}\,(\varphi'_x, \varphi'_y, -1)$$

(kifelé mutat)

$$\Downarrow$$

$$n_z = -\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}} \Rightarrow \cancel{dA = n_z\,dx\,dy}$$

$$dA = -\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dx\,dy$$

Az oldalsó ~~ala~~ határoló oldalakon: $n_z = 0$ (normálfelület)

$$\Downarrow$$

$$\overset{*}{=} \int_D F(x,y,\psi(x,y)) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2}}}_{n_z} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2}\,dx\,dy}_{dA} +$$

48/

$$+ \int_D F(x,y,\varphi(x,y)) \underbrace{\left(- \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi_x')^2+(\varphi_y')^2}} \right)}_{n_z} \underbrace{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\, dx\, dy}_{dA} +$$

$$+ \underbrace{\int_{\substack{\text{oldalsó}\\ \text{felületek}}} F n_z \, dA}_{=0 \quad (n_z = 0)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_V \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\, dV = \int_{\partial V} F n_z \, dA \quad .!$$

<u>Hasonlóan:</u>

- $$\int_V \frac{\partial F}{\partial y} dV = \int_{\partial V} F n_y \, dA$$

- $$\int_V \frac{\partial F}{\partial x} dV = \int_{\partial V} F n_x \, dA$$

48/

TÉTEL Ha V egy hengerszerű test $\forall$ tengely irányában és $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ egy C^1 vektormező V-n, akkor

$$\int_V \operatorname{div} \underline{F} \, dV = \int_{\partial V} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dA$$

Biz.

$$\operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

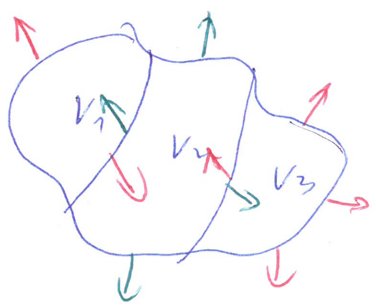
$$\hookrightarrow \int_V \operatorname{div} V \, dV = \int_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \int_{\partial V} (F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z) \, dA \underset{\text{lemma}}{=}$$

$$= \int_{\partial V} \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{n} \, dA}_{d\underline{F}}$$

$\circ$!

Általánosítás: Ha egy V tartomány nem hengerszerű $\forall$ tengely irányában $\Rightarrow$ feldarabolható ilyenek uniójára



$\rightsquigarrow$ az érintkező felületek ellentétesen vannak irányítva $\Rightarrow$ a felületi integrálok kiejtik egymást.

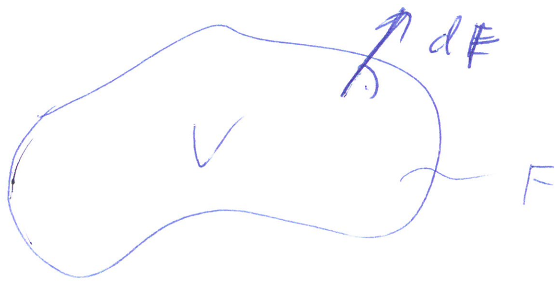
5/83/

$\Downarrow$

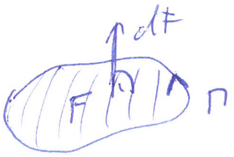
TÉTEL (Gauss–Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel)

Ha $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező az F zárt felülettel határolt V test minden ~~határán~~ pontjában és a határán is folytonosan diff.ható, továbbá a felület normálvektora kifele mutat, akkor

$$\boxed{\iiint_V \mathrm{div}\, \underline{v}\, dV = \iint_F \underline{v}\, d\underline{F}}$$



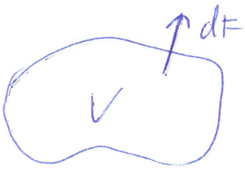
Megj.

- 

  Stokes

  $\Gamma = \partial F$

  $$\oint_\Gamma \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \iint_F \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F}$$

- 

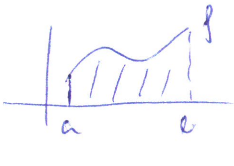
  Gauss–Oszt.

  $F = \partial V$

  $$\iiint_V \mathrm{div}\, \underline{v}\, dV = \iint_F \underline{v}\, d\underline{F}$$

- Newton–Leibniz

  $I = [a, b]$

  $\partial I = \{a, b\}$

  $$\int_a^b f(x)\, dx = F(a) - F(b)$$

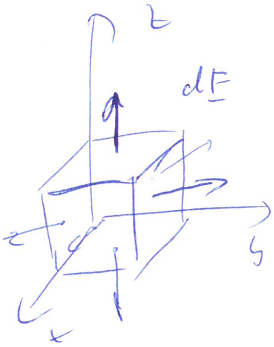
Példák:

(1) $V = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ egységkocka

$\underline{v}(\underline{r}) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$

$F = \partial V$ kifelé mutató normálissal

$\underbrace{\oiint_F}_{\text{zárt felület}} \underline{v}\, d\underline{F}$ fluxus?



kényelmebb G-O-val kiszámolni:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\Rightarrow \oiint_F \underline{v}\, d\underline{F} = \iiint_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV = \iiint_V 3\, dV = 3 \underbrace{\iiint_V dV}_{\text{mes } V = 1} = \underline{\underline{3}}$$

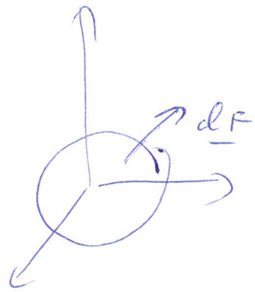
40/ 2

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$ egységgömb

$$\underline{v}(\underline{r}) = x^2\,\underline{i} + y\,\underline{j} + (z-1)\,\underline{k}$$

$F = \partial V$
kifelé mutató normálissal

$$\oiint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F}$$ fluxus?



$$\operatorname{div} \underline{v} = 2x+1+1 = 2x+2$$

$$\oiint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \int_V (2x+2)\, dV =$$

gömbi koord:

$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ $\qquad 0 \le r \le 1$

$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = r \cos\vartheta$ $\qquad 0 \le \vartheta \le \pi$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\right| = r^2 \sin\vartheta$$ (Jacobi-det)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (2r\sin\vartheta\cos\varphi + 2)\cdot r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \ldots = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}}$$