231/

Differenciálási szabályok

TÉTEL Ha $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $\underline{x}_0 \in D$-ben, akkor az $f+g$, $\lambda \cdot f$, $\frac{f}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ függvények is differenciálhatók és

i) $(f+g)'(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0) + g'(\underline{x}_0)$

ii) $(\lambda \cdot f)'(\underline{x}_0) = f(\underline{x}_0) \cdot \lambda'(\underline{x}_0) + \lambda(\underline{x}_0) \cdot f'(\underline{x}_0)$

iii) $$\left(\frac{f}{\lambda}\right)'(\underline{x}_0) = \frac{\lambda(\underline{x}_0) f'(\underline{x}_0) - f(\underline{x}_0) \cdot \lambda'(\underline{x}_0)}{\lambda^2(\underline{x}_0)}$$

Biz) Def alapján, hasonlóan 1 változóhoz:

pl. i)
$$\frac{\| (f+g)(\underline{x}) - (f+g)(\underline{x}_0) - (f'(\underline{x}_0) + g'(\underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|_{\mathbb{R}^n}} \underset{\Delta\text{-egy}}{\leq}$$

$$\leq \frac{\| f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|_{\mathbb{R}^n}} + \frac{\| g(\underline{x}) - g(\underline{x}_0) - g'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|_{\mathbb{R}^n}}$$

$+ \quad \underline{x} \to \underline{x}_0 \quad \Rightarrow \quad$ i) ✓

A többi hasonlóan (HF)

Megj: Ha $\lambda : D \to \mathbb{R}$ $\quad (D \subset \mathbb{R}^n)$ konstans függvény, azaz

$$\lambda = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda f)'(\underline{x}_0) = (c \cdot f)'(\underline{x}_0) = f(\underline{x}_0) \cdot \underbrace{c'}_{=0} + c \cdot f'(\underline{x}_0) = c\, f'(\underline{x}_0)$$

TÉTEL (Összetett függvény diffhatósága)

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad$ D és E nyíltak.

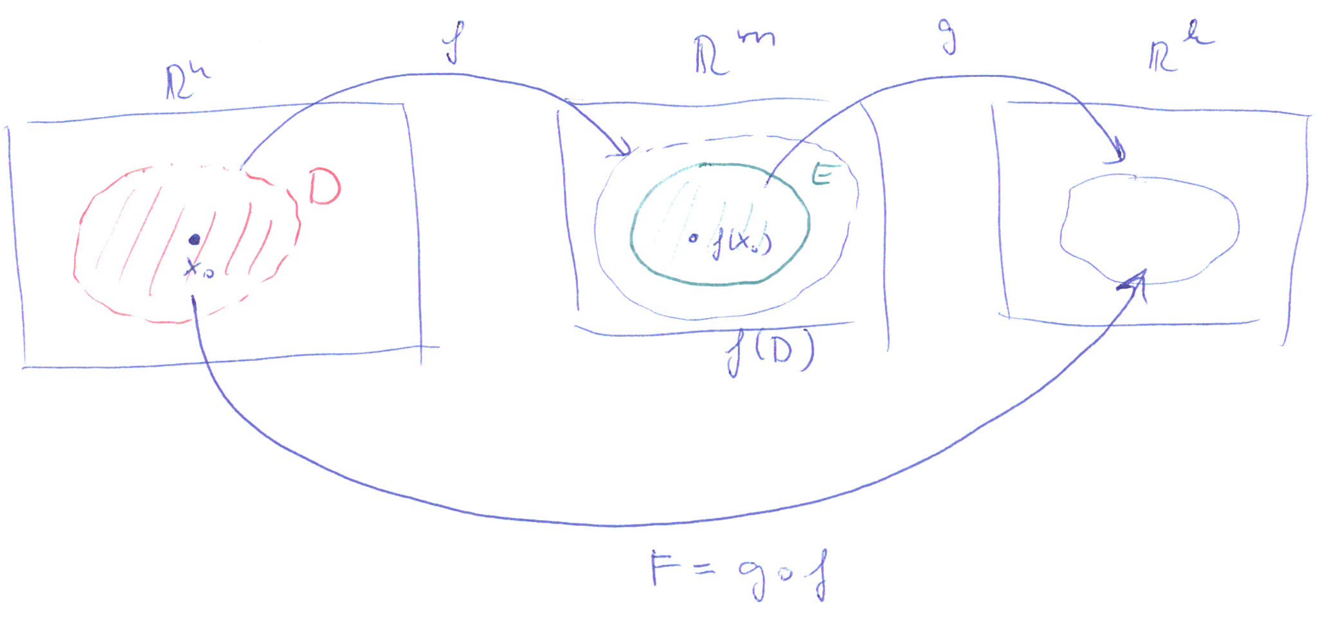
$g : E \subset f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, melyekre:

f diffható $\underline{x}_0 \in D$-ben és g diffható $f(\underline{x}_0)$-ban, akkor

$F = g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ is diffható $\underline{x}_0$-ban és

$$F'(\underline{x}_0) = g'(f(\underline{x}_0)) \cdot f'(\underline{x}_0).$$

Megj: ez mátrixszorzás !



233/

Biz. f $\underline{x}_0$-ban diffható $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{A}} := f'(\underline{x}_0)$ deriváltmátrixok

g $f(\underline{x}_0)$-ban diffható $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{B}} := g'(\underline{y}_0)$

$\overset{\parallel}{\underline{y}_0}$

$\hookrightarrow$ $\exists$ $\varepsilon(\underline{h})$, $\eta(\underline{l})$, melyek $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \varepsilon(\underline{h}) = \lim\limits_{\underline{l}\to\underline{0}} \eta(\underline{l}) = \underline{0}$

és

$$\| f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\underline{A}}\,\underline{h} \|_{\mathbb{R}^m} = \varepsilon(\underline{h}) \cdot \|\underline{h}\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \underline{h} \in \mathbb{R}^n$$

$$\| g(\underline{y}_0+\underline{l}) - g(\underline{y}_0) - \underline{\underline{B}}\,\underline{l} \|_{\mathbb{R}^k} = \eta(\underline{l}) \cdot \|\underline{l}\|_{\mathbb{R}^m} \qquad \underline{l} \in \mathbb{R}^m$$

$\downarrow$
melyekre
$\underline{x}_0 + \underline{h} \in D$
$\underline{y}_0 + \underline{l} \in E$

Legyen $\underline{h}$ adott és $\underline{l} := f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0)$

$$\hookrightarrow \|\underline{l}\|_{\mathbb{R}^m} = \| f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) \underbrace{- \underline{\underline{A}}\,\underline{h} + \underline{\underline{A}}\,\underline{h}}_{\underline{0}} \|_{\mathbb{R}^m} \underset{\Delta\text{-egy}}{\leq}$$

$$\leq \| f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\underline{A}}\,\underline{h} \|_{\mathbb{R}^m} + \|\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\| \leq$$

$$\leq \left(\varepsilon(\underline{h}) + \|\underline{\underline{A}}\| \right) \cdot \|\underline{h}\|$$

mátrixnorma

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \sup_{\underline{h}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\underline{h}\|_{\mathbb{R}^n}}$$

234)

$$\hookrightarrow \|F(\underline{x}_0+\underline{h})-F(\underline{x}_0)-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k}=\|g(f(\underline{x}_0+\underline{h}))-g(f(\underline{x}_0))-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k}$$

$$=\|g(\underline{y}_0+\underline{l})-g(\underline{y}_0)-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k}=$$

$$=\|g(\underline{y}_0+\underline{l})-g(\underline{y}_0)\underbrace{-\underline{\underline{B}}\,\underline{l}+\underline{\underline{B}}\,\underline{l}}_{=\underline{0}}-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k} \underset{\Delta-\text{gy}}{\overset{}{\underset{P}{\leq}}}$$

$$\leq \|g(\underline{y}_0+\underline{l})-g(\underline{y}_0)-\underline{\underline{B}}\,\underline{l}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\underline{\underline{B}}(\underline{l}-\underline{\underline{A}}\,\underline{h})\|_{\mathbb{R}^k}=$$

$$=\eta(\underline{l})\cdot\|\underline{l}\|_{\mathbb{R}^m}+\|\underline{\underline{B}}(f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)-\underline{\underline{A}}\,\underline{h})\|_{\mathbb{R}^k}\leq$$

$$\leq \eta(\underline{l})\left(\varepsilon(\underline{h})+\|\underline{\underline{A}}\|\right)+\|\underline{\underline{B}}\|\,\varepsilon(\underline{h})\cdot\|\underline{h}\|$$

$$\Downarrow \quad \underline{h}\neq\underline{0}$$

$$\frac{\|F(\underline{x}_0+\underline{h})-F(\underline{x}_0)-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\underline{h}\|_{\mathbb{R}^m}}\leq \eta(\underline{l})\left(\varepsilon(\underline{h})+\|\underline{\underline{A}}\|\right)+\|\underline{\underline{B}}\|\,\varepsilon(\underline{h})$$

Ha $\underline{h}\to\underline{0} \implies \underline{l}\to\underline{0}$

$$\Uparrow$$

$$\|\underline{l}\|\leq\left(\varepsilon(\underline{h})+\|\underline{\underline{A}}\|\right)\|\underline{h}\|$$

$$\implies \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{\|F(\underline{x}_0+\underline{h})-F(\underline{x}_0)-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{h}\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\underline{h}\|_{\mathbb{R}^m}}=0 \quad .!$$

235/

Megj. (1) Ha $k = 1$, akkor

$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

↳ $$Df(\underline{x}_0) = \underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{x}_0) & \partial_2 f_1(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_m(\underline{x}_0) & \partial_2 f_m(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_m(\underline{x}_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}$$

$$Dg(f(\underline{x}_0)) = \operatorname{grad} g(f(\underline{x}_0)) = (\partial_1 g(f(\underline{x}_0)), \partial_2 g(f(\underline{x}_0)), \dots, \partial_m g(f(\underline{x}_0))) \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow F'(\underline{x}_0) = (\partial_1 g(f(\underline{x}_0)), \dots, \partial_m g(f(\underline{x}_0))) \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_m(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_m(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

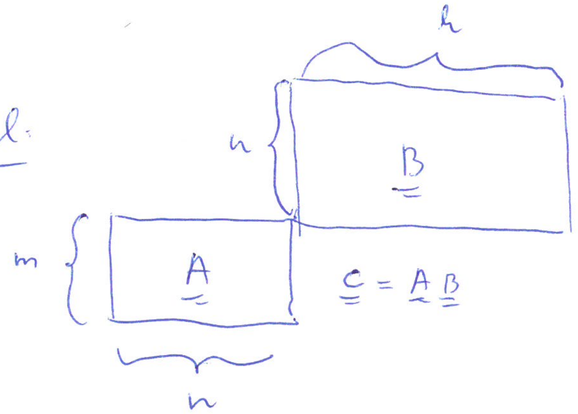
$$= (\partial_1 F(\underline{x}_0), \dots, \partial_n F(\underline{x}_0)) \in \mathbb{R}^n$$

vagyis:

$$\partial_j F(\underline{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g(f(\underline{x}_0)) \cdot \partial_j f_k(\underline{x}_0)$$

(mátrixelemek összehasonlítása)

Eml.:



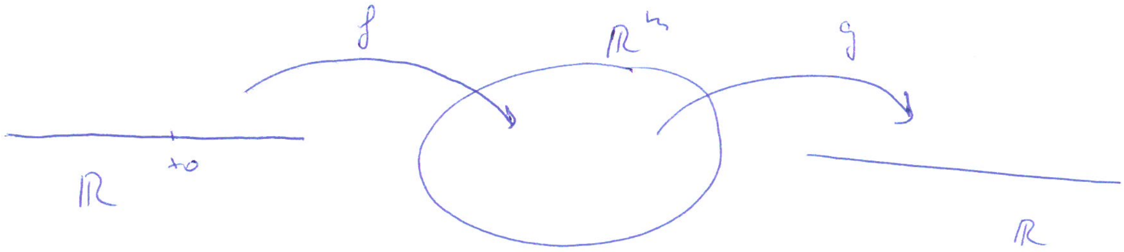
$\underline{A} \in \mathcal{M}_{mn}$, $\underline{B} \in \mathcal{M}_{nk} \Rightarrow \underline{C} = \underline{A}\underline{B} \in \mathcal{M}_{mk}$

$$c_{ij} = (\underline{C})_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

$i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, k$

(2) Ha $k=1$, $n=1$



↳ $F = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(t) = g(f_1(t), \dots, f_m(t))$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \partial_j g(f(x_0))\, f_j'(x_0)$$

<u>TÉTEL</u>: Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \in D$, $f(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$.

Tfh g az y_0 egy környezetét $\mathbb{R}^n$-be képező függvény, melyre

$g(y_0) = \underline{x}_0$ és $g(f(\underline{x})) = id(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$

identikus leképezés $(\underline{x} \mapsto \underline{x})$

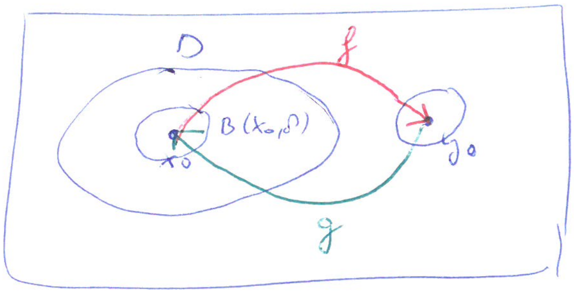
Ha f diffható $\underline{x}_0$-ban és g diffható y_0-ban, akkor

$$g'(y_0) = (f'(\underline{x}_0))^{-1}$$

← $f'(\underline{x}_0)$ mátrix inverze.

237/

$\mathbb{R}^n$



$(g \circ f)(\underline{x}) = \underline{x}$

$\forall \underline{x} \in B(x_0, \delta)$

és $g(y_0) = \underline{x}_0$

<u>Biz</u> $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto \underline{x}$ identikus leképezés

deriváltmátrixa $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re:

$$\underline{\underline{I}}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

egységmátrix

$g(f(\underline{x})) = id(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$

$\downarrow$ összetett fv deriválása

$g'(y_0) \cdot f'(\underline{x}_0) = \underline{\underline{I}}_n$

vagyis $g'(y_0)$ az $f'(\underline{x}_0)$ mátrix inverze:

$$g'(y_0) = \left(f'(\underline{x}_0)\right)^{-1}$$

$\circ$!

<u>Megj</u> Ha f diffható függvénynek $\exists$ diffható inverze, akkor

~~def~~ $\boxed{\det f'(\underline{x}) \neq 0}$

$f'(\underline{x})$ nem szinguláris mátrix!

238)

Kitérő: Teljes metrikus terekben az egyik legfontosabb tétel.

TÉTEL (Banach – Tyihonov – Caccioppoli – féle fixponttétel)

(X, d) teljes metrikus tér, $f : X \to X$.

Tfh $\exists \; q \in [0,1)$, mellyel

$$d(f(x), f(y)) \leq q \, d(x,y) \qquad \forall \, x, y \in X$$

f kontrakció

Ekkor:

i) egyértelműen létezik $\alpha \in X$, melyre $f(\alpha) = \alpha$.

(f-nek $\exists!$ fixpontja)

ii) $\forall \, x_0 \in X$ kezdőelemmel vett $x_{n+1} := f(x_n)$ $n \in \mathbb{N}$ rekurzív sorozat konvergens és $\lim x_n = \alpha$.

iii)
$$d(x_n, \alpha) \leq \frac{q^n}{1-q} \, d(x_0, x_1) \qquad n \in \mathbb{N}$$

(becslés a konvergencia sebességére)

239/

<u>Biz:</u>

<u>áll:</u> $d(x_n, x_{n+1}) \le q^n d(x_0, x_1) \qquad n \in \mathbb{N}$

teljes indukció: $n=0 \qquad d(x_0, x_1) \cancel{= d(x_0, f(x_0))} = q^0 d(x_0, x_1)$ ✓

t/h n-re igaz ⇝ $n+1$-re:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \le q \cdot d(x_n, x_{n+1}) \le$$

$$\underset{\text{ind. fell}}{\le} q \cdot q^n d(x_0, x_1) = q^{n+1} d(x_0, x_1)$$ ✓

$\Rightarrow \quad \forall\, n, s \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+s}) \underset{\Delta\text{-egy}}{\le} d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_s) \underset{\Delta\text{-egy}}{\le} \dots \le \sum_{k=n}^{n+s-1} d(x_{k+1}, x_k) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{n+s-1} q^k d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{n+s-1} q^k \le d(x_0, x_1) \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} q^k}_{\frac{q^n}{1-q}}$$

$$\Rightarrow \quad d(x_n, x_{n+s}) \le d(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q}$$

$q^n \to 0 \quad \Rightarrow \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat Cauchy-sorozat

(ha $\exists\, N \in \mathbb{N}$, melyre $q^n < \delta$ ha $n > N$

↪ $d(x_n, x_{n+s}) \le d(x_0, x_1) \frac{\delta}{1-q} < \varepsilon \to (x_n)$ Cauchy)

250)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy + (X,d) teljes $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens

$$\alpha := \lim_n x_n$$

↳ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$0 \le d(f(\alpha),\alpha) \le d(f(\alpha), f(x_n)) + d(f(x_n),\alpha) =$$

$$= d(f(\alpha), f(x_n)) + d(x_{n+1},\alpha) \le q\, \underbrace{d(\alpha,x_n)}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} + \underbrace{d(x_{n+1},\alpha)}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \to 0$$

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ $d(f(\alpha),\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha \Rightarrow \exists$ fixpont.

egyértelműség:

Tfh $\exists\, \beta\neq\alpha$ másik fixpont: $f(\beta)=\beta$

↳ $d(\alpha,\beta) = d(f(\alpha),f(\beta)) \le q\, d(\alpha,\beta)$ $\quad q<1$

$\Leftrightarrow d(\alpha,\beta)=0$ $\quad \alpha=\beta$: ↯

<u>Mivel.</u> $\forall n\in\mathbb{N}$: $\quad x_{n+s}\to\alpha$ ha $s\to\infty$

↳ $y_s := d(x_n, x_{n+s}) \xrightarrow[s\to\infty]{} d(x_n,\alpha)$

$\Rightarrow$ $d(x_n,\alpha) = \lim_{s\to\infty} y_s \le \dfrac{q^n}{1-q}\, d(x_0,x_1)$

!

241)

Inverzfüggvény tétel

Eml: 1 változós függvénnyel

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_h$ és h folytonosan differenciálható

$h \in C^1(\{a\})$

és ha $h'(a) \neq 0 \Rightarrow \exists\, r>0$, melyre $I := (a-r, a+r)$

intervallumon $h'(x) > 0 \quad x \in I$

(jeltartás)

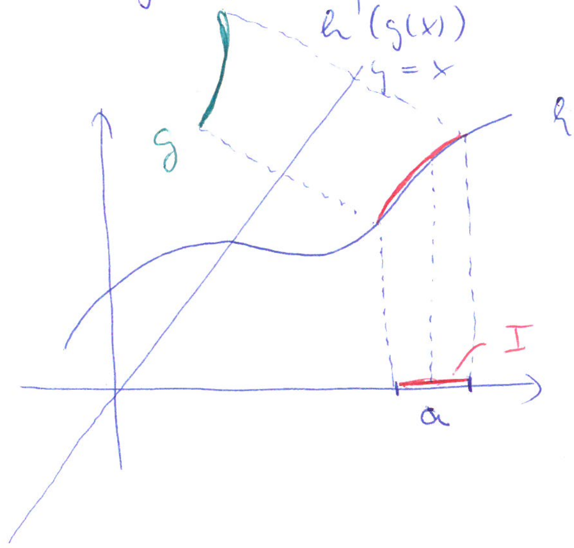
$\Rightarrow$ $h|_I$ leszűkítése szigorúan monoton növő

$\Downarrow$

$\exists\, (h|_I)^{-1}$ inverz függvény (h lokálisan invertálható)

Mivel $h|_I$ folytonos $\Rightarrow$ $g := (h|_I)^{-1}$ inverze is folytonos

és $g'(x) = \dfrac{1}{h'(g(x))} \quad x \in D_g$



Def. $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in D$

f függvény <u>lokálisan invertálható</u> $\underline{a}$-ban, ha

$\exists\ r > 0$, $B(\underline{a}, r) \subset D$, hogy $f|_{B(\underline{a},r)}$ (f leszűkítése $B(\underline{a}, r)$-re)

invertálható függvény.

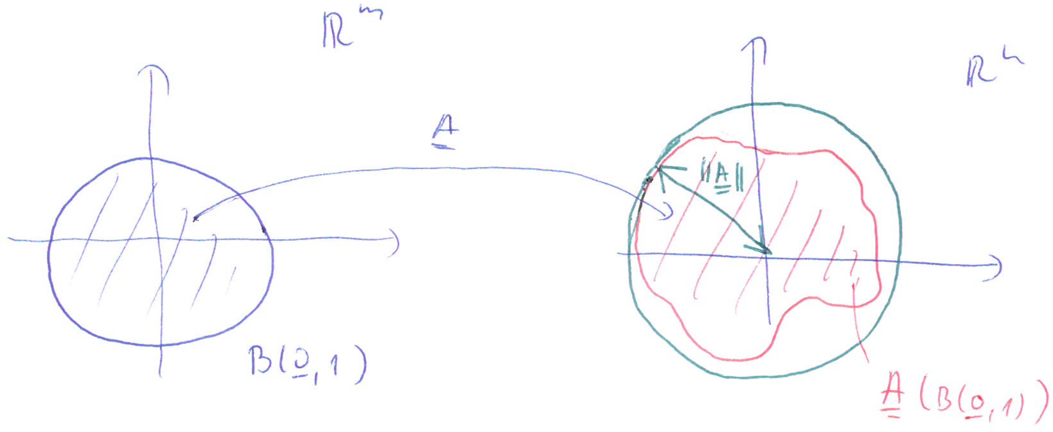
Megj. Előbb láttuk, hogy ha $f : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt) deriválható:

$\det f'(\underline{x}) \neq 0 \iff f$-nek $\exists$ differenciálható inverze.

Megj. <u>mátrixnorma</u>

$\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_{nm}$ $\qquad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \|\underline{\underline{A}}\| := \sup_{\underline{x} \in \mathbb{R}^m} \frac{\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^m}} = \sup_{\substack{\underline{x} \in \mathbb{R}^m \\ \|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1}} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}$$



<u>belátható:</u> $\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^m}$

$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathcal{M}_n$ $\quad \|\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\| \cdot \|\underline{\underline{B}}\|$ (szubmultiplikatív)

246)

Ha $\underline{x} \in \overline{B} \Rightarrow \|\varphi(\underline{x}) - \underline{x}_0\| \underset{\Delta\text{-egy}}{\leq} \underbrace{\|\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{x}_0)\|}_{\wedge \frac{1}{2}\|\underline{x}-\underline{x}_0\|} + \underbrace{\|\varphi(\underline{x}_0) - \underline{x}_0\|}_{\wedge \frac{r}{2}}$

$$\leq \frac{1}{2}\|\underline{x} - \underline{x}_0\| + \frac{r}{2} \underset{x \in \overline{B}}{\leq} \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$\Rightarrow \varphi(\underline{x}) \in \overline{B}$

Vagyis $\varphi : \overline{B} \to \overline{B}$ és kontrakció

$\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt + $\mathbb{R}^n$ teljes $\Rightarrow \overline{B}$ teljes

(teljes metrikus tér zárt részhalmaza teljes)

fixponttétel $\Longrightarrow$ $\exists!$ φ-nek $\underline{x} \in \overline{B}$ fixpontja

$\Leftrightarrow$ $f(\underline{x}) = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} \in f(\overline{B}) \subset f(U) = V$

tehát $\underline{y} \in V$

$\Downarrow$

V nyílt.

amivel beláttuk, hogy: f injektív U-n

és $f(U) = V$

245/

<u>Ötlet:</u> ha tudnánk, hogy φ értelmezési tartománya teljes, akkor mivel φ kontrakció

$\Downarrow$ Banach-Ty-C fixponttétel

$\exists!$ fixpontja $\varphi(\underline{x}) = \underline{x}$

$\Updownarrow$

$f(\underline{x}) = y$ legfeljebb egy $\underline{x} \in B(\underline{s}, r)$ helyen teljesül
$\Downarrow$
injektív.

$V := f(\mathcal{U})$, $y_0 \in V$ tetszőleges

$\hookrightarrow$ $y_0 = f(\underline{x}_0)$ valamely $\underline{x}_0 \in \mathcal{U}$ esetén

$B := B(\underline{x}_0, r)$ olyan, hogy $\overline{B} \subset \mathcal{U}$

∘ megmutatjuk, hogy ha $\|y - y_0\| < \lambda r$, akkor $y \in V$, amen V nyílt.

! y fix, melyre $\|y - y_0\| < \lambda r$

$$\Rightarrow \|\varphi(\underline{x}_0) - \underline{x}_0\| = \|\underline{x}_0 + \underline{\underline{A}}^{-1}(y - \underset{\overset{\|}{y_0}}{f(\underline{x}_0)}) - \underline{x}_0\| = \|\underline{\underline{A}}^{-1}(y - y_0)\| \leq$$

$$\leq \|\underline{\underline{A}}^{-1}\| \cdot \|y - y_0\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda r = \frac{r}{2}$$

244/

Biz/ i) $\underline{\underline{A}} := Df(\underline{a})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$2\lambda \cdot \|\underline{\underline{A}}^{-1}\| = 1$$

Df folytonos $\underline{a}$-ban $\Rightarrow \exists\ B(\underline{a}, r) \subset U$ környezet, hogy

$$\|Df(\underline{x}) - \underline{\underline{A}}\| < \lambda \quad \forall x \in B(\underline{a}, r)$$

$$\boxed{\varphi(\underline{x}) := \underline{x} + \underline{\underline{A}}^{-1}(y - f(\underline{x})) \quad \underline{x} \in U}$$

y tetsz. vektor (paraméter)

megj. $f(\underline{x}) = y \iff \varphi(\underline{x}) = \underline{x}$ ($\underline{x}$ φ fixpontja)

$\hookrightarrow D\varphi(\underline{x}) = I - \underline{\underline{A}}^{-1} df(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{A}} - df(\underline{x}))$

$\Downarrow$

$$\|D\varphi(\underline{x})\| \leq \|\underline{\underline{A}}^{-1}\| \cdot \|\underline{\underline{A}} - df(\underline{x})\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2} \quad \forall x \in B(\underline{a}, r)$$

$\Downarrow$ φ folytonosan diffható B-n

$$\underbrace{\|\varphi(\underline{x}_1) - \varphi(\underline{x}_2)\|}_{d(\varphi(\underline{x}_1), \varphi(\underline{x}_2))} \leq \frac{1}{2} \underbrace{\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|}_{d(\underline{x}_1, \underline{x}_2)} \quad \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in B(\underline{a}, r)$$

$\Rightarrow$ φ kontrakció

243/

Egy folytonosan diffható f leképezés invertálható bármely olyan $\underline{x}$ pont környezetében, ahol az

$f'(\underline{x}) = Df(\underline{x})$ derivált mátrix invertálható.

TÉTEL (Inverzfüggvény tétel)

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diffható, $f \in C^1$.

Tegyük fel, hogy valamely $\underline{a} \in \mathcal{U}$-ra $\underline{b} := f(\underline{a})$ és

$Df(\underline{a})$ invertálható.

Ekkor:

i) $\exists$ $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ nyíltak, hogy $\underline{a} \in \mathcal{U}$, $\underline{b} \in V$ és f injektív (1-1 értelmű) $\mathcal{U}$-n és $f(\mathcal{U}) = V$ (szürjektív).

ii) Ha $f^{-1} = g$ $\mathcal{U}$-n, akkor $g \in C^1(V)$

$(g(f(\underline{x})) = \underline{x} \ \forall \underline{x} \in \mathcal{U})$

Vagyis f lokális inverze szintén folytonosan diffható.

245)

$$\|\varphi(\underline{x}+\underline{h})-\varphi(\underline{x})\| = \|\underline{h}-\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{k}\| \leq \frac{1}{2}\|\underline{h}\|$$

mivel $\|\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}\| \geq |\|\underline{\underline{A}}\|-\|\underline{\underline{B}}\||$ $\longrightarrow$ $\Downarrow$ $\|\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{k}\| \geq \frac{1}{2}\|\underline{h}\|$

$$\Rightarrow \|\underline{h}\| \leq 2\|\underline{\underline{A}}^{-1}\|\cdot\|\underline{k}\| = \lambda^{-1}\cdot\|\underline{k}\|$$

láttuk.

$$\left.\begin{array}{l}\|\underline{\underline{A}}^{-1}\| = \frac{1}{2\lambda} \\ \|Df(\underline{x})-\underline{\underline{A}}\| \leq \lambda\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{lemma}} \|df(\underline{x})-\underline{\underline{A}}\|\cdot\|\underline{\underline{A}}^{-1}\| \leq \frac{1}{2\lambda}\cdot\lambda = \frac{1}{2} < 1$$

$\Downarrow$

$df(\underline{x})$-nek $\exists$ inverze

$$\underline{\underline{T}} := (df(\underline{x}))^{-1}$$

$g = f^{-1}$ $\qquad g(f(\underline{x})) = \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in U$

$$\hookrightarrow g(\underline{y}+\underline{k})-g(\underline{y})-\underline{\underline{T}}\underline{k} = g(f(\underline{x}+\underline{h}))-g(f(\underline{x}))-\underline{\underline{T}}\underline{k} =$$

$$= \underline{x}+\underline{h}-\underline{x}-\underline{\underline{T}}\underline{k} = \underline{h}-\underline{\underline{T}}\cdot\underline{k} = -\underline{\underline{T}}\left(f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-df(\underline{x})\underline{h}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{y} = f(\underline{x}) \\ \underline{y}+\underline{k} = f(\underline{x}+\underline{h})\end{array}\right\} \underline{k} = f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})$$

$$\underline{\underline{T}}\circ df(\underline{x}) = id$$

250/

Igazolás:

$$\underline{g}(\underline{y}+\underline{k})-\underline{g}(\underline{y})-\underline{\underline{T}}\,\underline{k} = -\underline{\underline{T}}\left[\underline{f}(\underline{x}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{x})-d\underline{f}(\underline{x})\cdot\underline{h}\right]$$

$$\Downarrow \quad \|\underline{h}\| \leq 2\|\underline{\underline{A}}^{-1}\|\cdot\|\underline{k}\| = \lambda^{-1}\|\underline{k}\|$$

$$0 \leq \frac{\|\underline{g}(\underline{y}+\underline{k})-\underline{g}(\underline{y})-\underline{\underline{T}}\,\underline{k}\|}{\|\underline{k}\|} \leq \frac{\|\underline{\underline{T}}\|}{\lambda}\,\frac{\|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{x})-d\underline{f}(\underline{x})\,\underline{h}\|}{\|\underline{h}\|}$$

$$\underline{k}\to\underline{0} \quad \underset{\|\underline{h}\|\leq\lambda^{-1}\cdot\|\underline{k}\|}{\Longrightarrow} \quad \underline{h}\to\underline{0}$$

$$\downarrow \ \underline{h}\to\underline{0}$$

$$0$$

$\underline{f}$ diff.ható $\underline{x}$-en

$\Downarrow$ rendőrelv

$$\boxed{d\underline{g}(\underline{y}) = \underline{\underline{T}}}$$

$$\Downarrow \quad d\underline{f}(\underline{x}) = d\underline{f}(\underline{g}(\underline{y})) = \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$\boxed{d\underline{g}(\underline{y}) = \left[d\underline{f}(\underline{g}(\underline{y}))\right]^{-1}} \quad \forall \underline{y}\in V$$

- $\underline{g}$ diff.ható $\Rightarrow$ $\underline{g}: V\to U$ folytonos
- $d\underline{f}$ folytonos U-n és $d\underline{f}\to\Omega$ (invertálható mátrixok)

+ invertálás folytonos $\Rightarrow$ $\underline{g}\in C^1(V)$

$\circ$!

ii) ehhez kell egy fontos lemma:

Lemma: Jelölje $\Omega \subset M_n$ az invertálható mátrixokat.

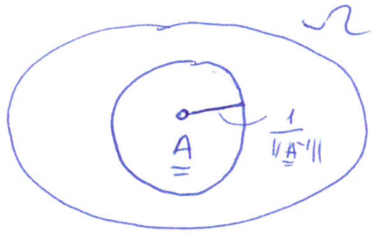
(azaz $\underline{A} \in \Omega \iff \det \underline{A} \neq 0$ teljesül)

a) Ha $\underline{A} \in \Omega$ és $\underline{B} \in M_n$, melyre $\|\underline{B}-\underline{A}\| \cdot \|\underline{A}^{-1}\| < 1$

$\Longrightarrow \underline{B} \in \Omega$.

b) $\Omega \subset M_n$ nyílt halmaz és $\underline{A} \mapsto \underline{A}^{-1}$ folytonos Ω-n.

Megj: a)



$\underline{A}$ invertálható mátrix ilyen környezetében lévő mátrixok is invertálhatók.

Biz (lemma)

a) $\|\underline{A}^{-1}\| =: \frac{1}{\alpha}$, $\|\underline{B}-\underline{A}\| =: \beta$ ⇝ feltétel: $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ $(\beta < \alpha)$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ⇝ $\alpha \cdot \|\underline{x}\| = \alpha \cdot \|\underline{A}^{-1} \underline{A} \cdot \underline{x}\| \le \alpha \cdot \underbrace{\|\underline{A}^{-1}\|}_{= \frac{1}{\alpha}} \cdot \|\underline{A}\underline{x}\| = \|\underline{A}\underline{x}\| \le$

$\underset{\triangle}{\le} \|(\underline{A}-\underline{B})\underline{x}\| + \|\underline{B}\underline{x}\| \le \beta \|\underline{x}\| + \|\underline{B}\underline{x}\|$

↳ $\underbrace{(\alpha-\beta)}_{>0} \cdot \|\underline{x}\| \le \|\underline{B}\underline{x}\|$ ⇝ $\underline{B}\underline{x} \neq \underline{0}$, ha $\underline{x} \neq 0$

$\Longrightarrow \underline{B}$ invertálható ✓ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

248)

b) $\underline{x} \longleftrightarrow \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{y}$ csere $\qquad (\alpha-\beta)\cdot\|\underline{x}\| \le \|\underline{\underline{B}}\,\underline{x}\| \quad \underline{x}\in\mathbb{R}^n$-en

$$(\alpha-\beta)\|\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{y}\| \le \|\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{y}\| = \|\underline{y}\| \qquad \forall\, \underline{y}\in\mathbb{R}^n$$

$$\hookrightarrow \quad \|\underline{\underline{B}}^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha-\beta}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} - \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}})\underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\hookrightarrow \quad \|\underline{\underline{B}}^{-1}-\underline{\underline{A}}^{-1}\| \le \|\underline{\underline{B}}^{-1}\|\cdot\|\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}\|\cdot\|\underline{\underline{A}}^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\beta\cdot\frac{1}{\alpha} \xrightarrow[\underline{\underline{B}}\to\underline{\underline{A}}]{} 0$$

$\beta\to 0$, ha $\underline{\underline{B}}\to\underline{\underline{A}}$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}}\mapsto\underline{\underline{A}}^{-1}$ folytonos

$\circ!$

---

ii) φ (TÉTEL) bizonyítása

$!\ \underline{y}\in V,\ \underline{y}+\underline{k}\in V \implies \exists\ \underline{x}\in U,\ \underline{x}+\underline{h}\in U$, hogy

$\underline{y}=f(\underline{x})$ és $\underline{y}+\underline{k}=f(\underline{x}+\underline{h})$

$$\implies \varphi(\underline{x}+\underline{h})-\varphi(\underline{x}) = \underline{h} + \underline{\underline{A}}^{-1}\big(f(\underline{x})-f(\underline{x}+\underline{h})\big) = \underline{h}-\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{k}$$

25/1)

Szemléltetés: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\underline{y} = f(\underline{x})$ egyenlet megoldható $\underline{x} = \underline{a}$ pont egy nyílt környezetében $\underline{x}$-re, vagyis $\underline{x}$ kifejezhető $\underline{y} = \underline{b} = f(\underline{a})$ egy nyílt környezetében $\underline{y}$-nal:

$$(*) \quad \left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\}$$

n ismeretlenes n egyenletből álló nem lineáris egyenletből

TÉTEL: Ha $f \in C^1$ $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{A}} := f'(\underline{a}) = Df(\underline{a})$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \\ \partial_1 f_n \dots & \partial_n f_n \end{pmatrix}$$

Ha az

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}\right\} \iff \underline{y} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$$

lineáris egyenletrendszer megoldható, azaz $\underline{\underline{A}}$ invertálható, azaz $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$,

akkor $(*)$ is megoldható $\underline{a}$ egy környezetben:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned},$$

ahol g_i-k is C^1-beliek.

252/

Megj.: Ha $f \in C^1(E)$ $E \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ra

és $f'(\underline{x})$ invertálható $\forall\, \underline{x} \in E$ esetén

$\not\Downarrow$

f-nek $\exists$ inverse E-n

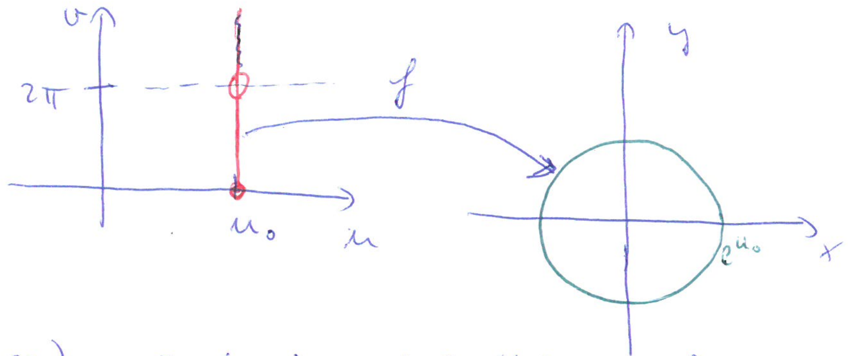
(csak az következik, hogy $\forall\, \underline{x} \in E$-nek $\exists$ olyan környezete, ahol $\exists$ az inverz, azaz f csak lokálisan injektív E-ben, de az egész E-n nem feltétlenül injektív!)

Példák

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (x,y)$, $x = e^u \cos v$
$y = e^u \sin v$

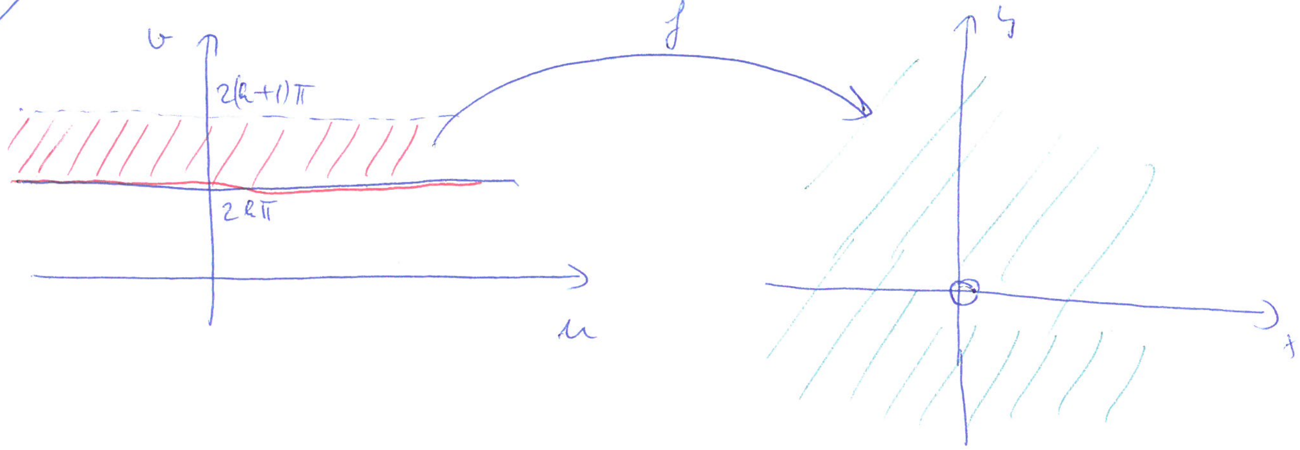
$f(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$

- Legyen u_0 fix, $v \in [0, 2\pi)$ $\rightsquigarrow$ $f(u_0, v) = (e^{u_0} \cos v, e^u \sin v)$



- Ha $u_0 \in (-\infty, \infty)$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ pont kivételével $\mathbb{R}^2$ $\forall$ pontját megkapjuk képként

253/



$$\Downarrow$$

f nem injektív $\mathbb{R}^2$-n

$$\begin{matrix} u \in (-\infty, \infty) \\ v \in [2k\pi, 2(k+1)\pi) \end{matrix} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f'(u,v) = Df(u,v) = \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix}$$ Jacobi-mátrix

$\hookrightarrow$ $\det f'(u,v) = (e^u \cos v)^2 + (e^u \sin v)^2 = e^{2u} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$ ~~tétel~~ Inverzfv tétel

$\mathbb{R}^2$ $\forall$ pontjánál $\exists$ olyan környezet, ahol f injektív, de $\mathbb{R}^2$-n nem!

$\underline{a} := (0, \frac{\pi}{3}) \rightsquigarrow \underline{b} := f(\underline{a}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$f'(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

g: f lokális inverze $\underline{a}$-ban

$$g'(\underline{b}) = [f'(\underline{a})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

254)

g folytonosan diff.ható $\Rightarrow$ jó közelítés adható rá egy elég kis környezetben

$$\underline{r} := (x,y)$$
$$\underline{t} := (u,v)$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{t} = g(\underline{r}) \approx \underline{a} + g'(\underline{b})(\underline{r} - \underline{b})$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1/2 \\ y - \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} u &\approx \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ v &\approx \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

(2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + (z-1)^2 + 1 \\ y + z + (x-1)^2 - 1 \\ z + x + (y-2)^2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(z-1) \\ 2(x-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2(y-2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\det Df(x,y,z)} \quad \det Df(\underline{x}_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ f invertálható $\underline{x}_0$ egy környezetben,
legyen itt $g := f^{-1}$

25.)

g meghatározása explicit módon nehéz, de

$$\underline{u}_0 := f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g(\underline{u}_0) = \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Dg(\underline{u}_0) = \left[Df(\underline{x}_0)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \quad g(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-4 \\ v-2 \\ w-5 \end{pmatrix} + r(\underline{u})$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

és
$$\lim_{\underline{u} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}} \frac{r(\underline{u})}{\sqrt{(u-4)^2+(v-2)^2+(w-5)^2}} = 0$$

vagyis g-t approximáljuk (közelítjük) $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ egy környezetében egy affin transzformációval.

$\parallel$

lineáris lekép. eltoltja

.!

256)

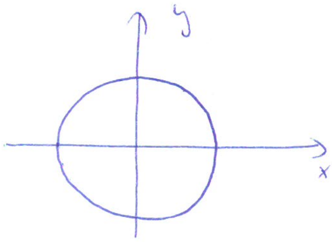
Implicit függvény tétel

Motiváció Tfh f folytonosan diffható $\mathbb{R}^2$-n.

Az $f(x,y)=0$ implicit függvény megoldható!

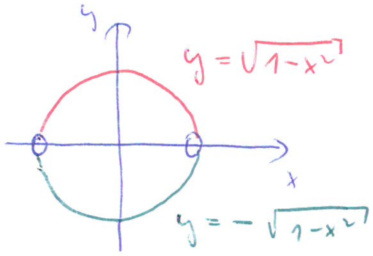
- y-ra x függvényében az $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pont egy környezetében, ahol $f(a,b)=0$ és $f'_y(x,y)\neq 0$
- x-re y függvényében az $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pont egy környezetében, ahol $f(a,b)=0$ és $f'_x(x,y)\neq 0$

pl: $f(x,y):=x^2+y^2-1 \rightsquigarrow f(x,y)=0 \iff x^2+y^2=1$

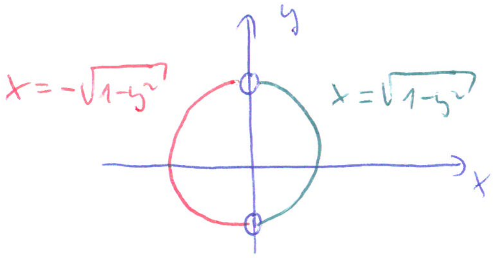


implicit fv.

- $f'_y(x,y)=2y\neq 0$, ha $y\neq 0$



- $f'_x(x,y)=2x\neq 0$, ha $x\neq 0$



Ok: folytonosan diffható fv-ek viselkedése lokálisan hasonlít a deriváltéhoz

257)

Lineáris implicit leképezések

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m + b_{21}y_1 + \dots + b_{2n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n = 0 \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer

- $m+n$ ismeretlen
- n egyenlet

$\Downarrow$

alulhatározott

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nm}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{y} = \underline{0}}$$

Kifejezhető-e az $\underline{y}$ vektor $\underline{x}$ segítségével $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ esetén?

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{y} = -\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

ha $\underline{\underline{B}}$ invertálható, akkor igen: $\boxed{\underline{y} = -\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{x}}$

258/

átfogalmazás:

$\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} = \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$

$\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ lineáris

A-t felbonthatjuk 2 lineáris leképezésre:

$$A_x \underline{x} = A(\underline{x}, \underline{0}) \Rightarrow A_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ lin.}$$

$$A_y \underline{y} = A(\underline{0}, \underline{y}) \Rightarrow A_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lin.}$$

$$\Rightarrow A(\underline{x}, \underline{y}) = A_x \underline{x} + A_y \underline{y}$$

↳ $A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ megoldható $\underline{y}$-ra $\underline{x}$ függvényében, ha A_y invertálható:

$$A(\underline{x}, \underline{y}) = A_x \underline{x} + A_y \underline{y} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = -(A_y)^{-1} A_x \underline{x}$$

⇓

általánosítható nem lineáris esetre is:

implicit függvény tétel.

TÉTEL (Implicit függvény tétel)

$E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : E \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(E)$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ esetén $(\underline{a}, \underline{b}) \in E$, melyre $f(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{0}$.

$\underline{A} := Df(\underline{a}, \underline{b})$ deriváltmátrix, tfh $\underline{A}_{\underline{x}} = Df(\cdot, \underline{0})$ invertálható.

Ekkor $\exists\ U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $W \subset \mathbb{R}^m$ nyíltak, hogy

$(\underline{a}, \underline{b}) \in U$, $\underline{b} \in W$ és $\forall\ \underline{y} \in W$-hez

$\exists!\ \underline{x}$, melyre $(\underline{x}, \underline{y}) \in U$ és $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$.

Ha $\underline{x}$-ről feltesszük, hogy $\underline{x} = g(\underline{y})$, akkor

$g : W \to \mathbb{R}^n$, $g \in C^1$ és $g(\underline{b}) = \underline{a}$.

Ekkor $f(g(\underline{y}), \underline{y}) = 0$, $\underline{y} \in W$ és

$$Dg(\underline{b}) = -A_{\underline{x}}^{-1} A_{\underline{y}}.$$

Megj.:

- $f(g(\underline{y}), \underline{y}) = \underline{0}$ $\rightsquigarrow$ g-t implicit módon definiáltuk
- $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0} \iff$
$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$
- $A_{\underline{x}}$ invertálható $\iff$ $\left.\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_n & \dots & \partial_n f_1 \end{pmatrix}\right|_{(\underline{a}, \underline{b})}$ invertálható.

<u>Biz:</u> $F(\underline{x},\underline{y}) := (\underline{f}(\underline{x},\underline{y}), \underline{y})$ $\qquad (\underline{x},\underline{y}) \in E \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$\hookrightarrow F: E \to \mathbb{R}^{n+m}$, $F \in C^1(E)$

<u>áll:</u> $DF(\underline{a},\underline{b})$ invertálható

$$\underline{f}(\underline{a},\underline{b}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{f}(\underline{a}+\underline{h}, \underline{b}+\underline{k}) = \underline{A}(\underline{h},\underline{k}) + r(\underline{h},\underline{k})$$

$$F(\underline{a}+\underline{h}, \underline{b}+\underline{k}) - F(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}, \underline{b}+\underline{k}), \underline{b}+\underline{k}) - (\underbrace{\underline{f}(\underline{a},\underline{b})}_{=\underline{0}}, \underline{b}) =$$

$$= (\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}, \underline{b}+\underline{k}), \underline{k}) = \underbrace{(\underline{A}(\underline{h},\underline{k}), \underline{k})}_{DF((\underline{a},\underline{b}))(\underline{h},\underline{k})} + (r(\underline{h},\underline{k}), \underline{0})$$

$$DF[(\underline{a},\underline{b})] : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{lineáris}$$

$$(\underline{h},\underline{k}) \longmapsto (\underline{A}(\underline{h},\underline{k}), \underline{k})$$

• ha $(\underline{A}(\underline{h},\underline{k}), \underline{k}) = \underline{0} \iff \underline{A}(\underline{h},\underline{k}) = \underline{0}$ és $\underline{k} = \underline{0}$

$\hookrightarrow \underline{A}(\underline{h},\underline{0}) = \underline{0} \underset{A \text{ lineáris}}{\rightsquigarrow} \underline{h} = \underline{0}$

$\Downarrow$

$DF(\underline{a},\underline{b})$ invertálható

(a lineáris változat miatt: Ha $\underline{A}: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ és $\underline{A}_x$ invertálható, akkor $\forall\, \underline{k} \in \mathbb{R}^m$-hez $\exists!\, \underline{h} \in \mathbb{R}^n$, melyre $\underline{A}(\underline{h},\underline{k}) = \underline{0}$ és $\underline{h} = -\underline{A}_x^{-1}\underline{A}_y \underline{k}$,

ugyanis. $\underline{A}(\underline{h},\underline{k}) = \underline{0} \iff \underline{A}_x \underline{h} + \underline{A}_y \underline{k} = \underline{0} \iff \underline{h} = -\underline{A}_x^{-1}\underline{A}_y \cdot \underline{k}$)

261/

jelentése: $\underline{A}(\underline{h}, \underline{k}) = \underline{0}$ egyértelműen megoldható $\underline{h}$-ra, adott $\underline{k}$ esetén és $\underline{h}$ megoldás $\underline{k}$ lineáris függvénye.

$\Rightarrow$ Inverz függvény tétel alkalmazható F-re:

$\exists\, U, V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ nyílt, hogy $(\underline{a}, \underline{b}) \in U$, $(\underline{0}, \underline{b}) \in V$

és $F: U \to V$ injektív

$W := \{ y \in \mathbb{R}^m : (\underline{0}, y) \in V \} \Rightarrow \underline{b} \in W$

- V nyílt $\Rightarrow W$ nyílt
- $y \in W \Rightarrow (\underline{0}, y) = F(\underline{x}, y)$ valamely $(\underline{x}, y) \in U$-ra

$$\Downarrow \; F(\underline{x}, y) = (f(\underline{x}, y), y)$$

$f(\underline{x}, y) = \underline{0}$ erre az $\underline{x}$-re

- egyértelműség:

t/h $\exists\, \underline{x}'$: $(\underline{x}', y) \in U$ és $f(\underline{x}', y) = 0$

$\hookrightarrow F(\underline{x}', y) = (f(\underline{x}', y), y) = (f(\underline{x}, y), y) = F(\underline{x}, y)$, de

F injektív U-n $\Rightarrow \underline{x}' = \underline{x}$

26/

Tfh $\quad y \in W$, melyre $g(y)$ olyan, hogy $\quad \circ\ f(g(y),y) = \underline{0}$

$\circ\ (g(y),y) \in U$

$\Rightarrow F(g(y),y) = (f(g(y),y),y) = (\underline{0},y) \Rightarrow y \in W$

Ha $\quad G: V \to U, \quad G := F^{-1}$ $\quad$ (F injektív, így invertálható rá)

$\hookrightarrow$ inverzfv.tétel $\quad G \in C^1$ és $(g(y),y) = G(\underline{0},y) \quad y \in W$

$\Downarrow$

$g \in C^1$

Számoljuk ki $Dg(\underline{b})$-t!

Tfh $\quad (g(y),y) = \Phi(y)$.

$\hookrightarrow \quad D\Phi(y)\cdot \underline{h} = (Dg(y)\underline{h}, \underline{h}) \quad y \in W, \underline{h} \in \mathbb{R}^m$

$f(g(y),y) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad f(\Phi(y)) = 0 \quad \forall y \in W$

$\hookrightarrow \quad Df(\Phi(y))\, D\Phi(y) = 0$

Ha $\quad y = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \Phi(y) = (\underbrace{g(\underline{b})}_{=\underline{a}}, \underline{b}) = (\underline{a},\underline{b})$ és $\underset{y=\underline{b}}{Df(\Phi(y))} = \underline{\underline{A}}$

ahol $\quad \boxed{\underline{\underline{A}}\, D\Phi(\underline{b}) = 0}$

263/

$$\underline{\underline{A}}\, D\underline{\Phi}(\underline{b}) = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \underbrace{\underline{\underline{A}}_x D\underline{g}(\underline{b})\underline{h} + \underline{\underline{A}}_y \underline{h}}_{(\underline{\underline{A}}_x D\underline{g}(\underline{b}) + \underline{\underline{A}}_y)\underline{h}} = \underline{\underline{A}}(D\underline{g}(\underline{b})\underline{h}, \underline{h}) = \underline{\underline{A}}\, D\underline{\Phi}(\underline{b})\underline{h} = 0 \quad \forall\, \underline{h} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\underline{\underline{A}}_x D\underline{g}(\underline{b}) + \underline{\underline{A}}_y)\underline{h} = 0 \quad \forall\, \underline{h} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{A}}_x D\underline{g}(\underline{b}) + \underline{\underline{A}}_y = 0$$

vagyis $\boxed{D\underline{g}(\underline{b}) = -\underline{\underline{A}}_x^{-1}\underline{\underline{A}}_y}$

!

Megj. f és g komponensekkel kifejezve:

$$\sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i)(\underline{a}, \underline{b})(\partial_k g_j)(\underline{b}) = -\partial_{n+k} f_i(\underline{a}, \underline{b})$$

$$1 \le i \le n$$
$$1 \le k \le m$$

265)

Szemléltetés.

Tétel. $\underline{f}(\underline{x},\underline{y})=\underline{0}$ egyenletből az $\underline{x}=\underline{a}$ pont egy nyílt környezetében az $\underline{y}$ változó kifejezhető $\underline{x}$ függvényeként: $\underline{y}=\underline{g}(\underline{x})$, ahol

az $\underline{y}$ pontok $\underline{b}=\underline{g}(\underline{a})$ pont környezetében

az $(\underline{x},\underline{y})$ pontok $(\underline{a},\underline{b})$ pont —"— vannak:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)&=0\\ f_2(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)&=0\\ &\vdots\\ f_n(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)&=0 \end{aligned}\right\}$$

$(m+n)$ ismeretlenes n egyenletből álló ált. nem lineáris egyenletrendszer

$$\underline{f}\in C^1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}:=D\underline{f}'(\underline{a},\underline{b})=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{array}\right]\in \mathcal{M}_{n,m+n}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,m+n}\\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{n,m+n} \end{array}\right]=\left[\underline{\underline{A}}_x \,\middle|\, \underline{\underline{A}}_y\right]$$

265/

$\Rightarrow$ Ha az

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + a_{1m+1}y_1 + \ldots + a_{1m+n}y_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m + a_{n,m+1}y_1 + \ldots + a_{nm+n}y_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

implicit lineáris egyenletrendszer megoldható $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$-ra $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ függvényében, azaz $\underline{\underline{A}}_y$ invertálható ($\det \underline{\underline{A}}_y = \det f'_y(\underline{x}, \underline{y}) \neq 0$),

akkor y kifejezhető $\underline{x}$-nel $\underline{a}$ egy környezetében:

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_m) \\ &\vdots \\ y_n &= g_n(x_1, \ldots, x_m) \,, \end{aligned}$$

ahol $g_i \in C^1$ $i = 1, \ldots, n$ $\rightsquigarrow$ g_i-k approximálhatók

Megj: Ha $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f: E \to \mathbb{R}^m$

és $f'_y(\underline{x}, \underline{y}) \equiv \underline{\underline{A}}_y$ invertálható $\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in E$

$$\not\Downarrow$$

y az egész E-n kifejezhető $\underline{x}$-nel

csak lokálisan: $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in E$ esetén $\underline{x}_0$ egy környezetében!

Példa

(1) $\underline{t} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(\underline{r}, \underline{t}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z;u,v) &= 2e^u + vx - 4y + 3 \\ f_2(x,y,z;u,v) &= v\cos u - 6u + 2x - z \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad f_1(\underline{a}, \underline{b}) = 2 \cdot e^0 + 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 3 = 0$$

$$f_2(\underline{a}, \underline{b}) = 1 \cdot \cos 0 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{0}$$

Kifejezhető-e $\underline{t} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$-vel $\underline{a}$ egy környezetében?

$$f'(\underline{r}, t) = \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} v & -4 & 0 & 2e^u & x \\ 2 & 0 & -1 & -6 - v\sin u & \cos u \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{A}} = f'(\underline{a}, \underline{b}) = \Bigg[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}}_{\underline{\underline{A}}_{\underline{r}}} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{array}}_{\underline{\underline{A}}_{\underline{t}}}\Bigg]$$

$$\det \underline{\underline{A}}_t = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 18 = 20 \neq 0 \implies \underline{\underline{A}}_t \text{ invertálható!}$$

267/

$\underline{\underline{A}}_{\underline{t}}$ invertálható $\xRightarrow{\text{implicitfv T.}}$ $\exists\ g \in C^1: \ \underline{t} = g(\underline{x})$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ pont egy környezetében, melyre

$g(\underline{a}) = \underline{b}$ és $f(\underline{x}, g(\underline{x})) = \underline{0}$

g deriváltja a tételből meghatározható g ismerete nélkül:

$$\underline{\underline{A}}_{\underline{t}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g'(\underline{a}) = -\underline{\underline{A}}_t^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}_x = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & -3/20 \\ -1/2 & 6/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Mivel $g \in C^1$, g $\underline{a}$ ~~e~~ egy kis környezetében jól közelíthető az első fokú Taylor-polinommal:

$$\underline{t} = g(\underline{x}) \approx g(\underline{a}) + g'(\underline{a})(\underline{x} - \underline{a}) = \underline{b} + g'(\underline{a})(\underline{x} - \underline{a})$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & -3/20 \\ -1/2 & 6/5 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u \approx \frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{5}(y-2) - \frac{3}{20}(z-7)$$

$$v \approx 1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{6}{5}(y-2) + \frac{1}{10}(z-7)$$

268/

(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=x^2+y^2-1$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f'(x,y)=\left(f'_x(x,y)\ \ f'_y(x,y)\right)=\left(2x\ \ 2y\right)$$

f akárhányszor folytonosan diff.ható

Kérdés: Az $f(x,y)=0$ egyenletből kifejezhető-e y az x függvényében?

↳ $f'(x,y)=(\underbrace{2x}_{f'_x} \,\vdots\, \underbrace{2y}_{f'_y})$

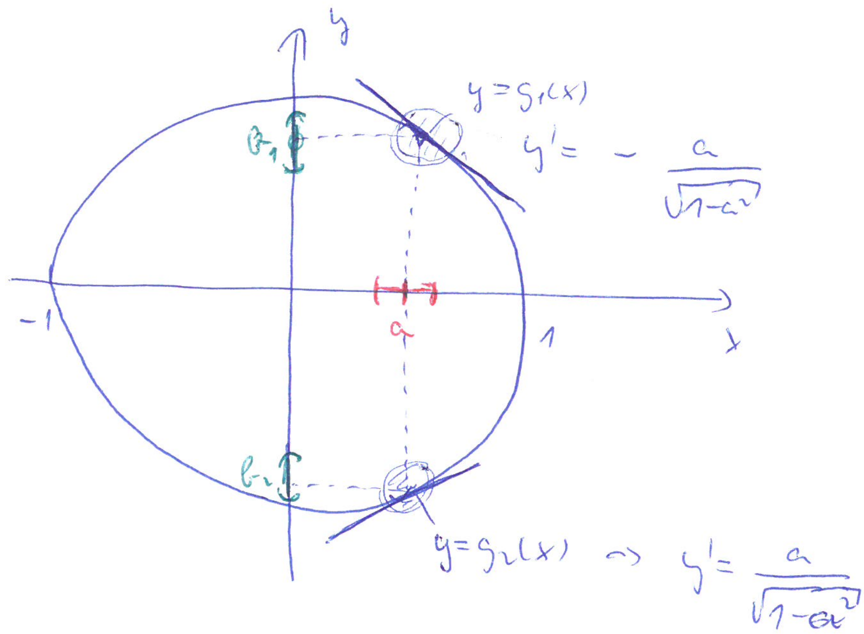
$f'_y=2y$ invertálható, ha $y\neq 0$.

Keressük olyan (a,b) pontot, ahol ez teljesül és $f(a,b)=0$.

- Ha $a<-1$ vagy $a>1$ $\Rightarrow$ $\nexists\, b\in\mathbb{R}$, melyre $a^2+b^2-1=0$
- Ha $a=\pm 1$ $\Rightarrow$ $b=0$ az egyetlen, melyre $f(a,b)=0$, de itt $f'_y(a,b)=0$ ⇝ nem invertálható
- Ha $-1<a<1$, akkor $b_1=\sqrt{1-a^2}$, ill. $b_2=-\sqrt{1-a^2}$ megfelelő

$\Rightarrow$
- $b_1=\sqrt{1-a^2}$ esetén $y=g_1(x)=\sqrt{1-x^2}$
- $b_2=-\sqrt{1-a^2}$ esetén $y=g_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$

265)



g deriváltja függ b választásától.

$$g'(a) = -\frac{1}{2y}\cdot 2x\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = -\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}$$

b_1 esetén $\quad g'(a) = -\frac{a}{b_1} = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

b_2 esetén $\quad g'(a) = -\frac{a}{b_2} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

!

Megj. (Implicit függvény tétel, $m=1$ eset)

$f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ folytonosan diff.ható, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}$ esetén $(\underline{x}_0, u_0)$ egy környezetében és $f(\underline{x}_0, u_0) = 0$, $f'_u(\underline{x}_0, u_0) \neq 0$.

Ekkor $\exists$ $(\underline{x}_0, u_0)$-nak olyan környezete, hogy $\exists!$ $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan diff.ható, hogy $f'_u(\underline{x}, u(\underline{x})) \neq 0$, $u(\underline{x}_0) = u_0$ és $f(\underline{x}, u(\underline{x})) = 0$, ebben a környezetben és $u'_{x_i}(\underline{x}) = -\frac{f'_{x_i}(\underline{x}, u(\underline{x}))}{f'_u(\underline{x}, u(\underline{x}))}$

270/

Megj: Ez utóbbival már kiválthatnánk az összetett fv deriválásához:

pl: $f(x, y, u(x,y)) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \underset{\text{ha } f'_u \neq 0}{\rightsquigarrow} \quad u'_x = -\frac{f'_x}{f'_u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \underset{\text{ha } f'_u \neq 0}{\rightsquigarrow} \quad u'_y = -\frac{f'_y}{f'_u}.$$

Pl: $f(x, y, u) := 1 - x^3 - 2y^2 - u^2$

$f'_x = -3x^2$

$f'_y = -4y$

$f'_u = -2u$

$\Rightarrow$ Ha $u_0 \neq 0$ és $\exists\, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, melyre $f^*(x_0, y_0, u_0) = 0$

$\hookrightarrow$ $$u'_x(x_0, y_0) = -\frac{-3x_0^2}{-2u_0} = -\frac{3}{2}\frac{x_0^2}{u_0}$$

$$u'_y(x_0, y_0) = -\frac{4y_0}{-2u_0} = \frac{2y_0}{u_0}$$

271/

Példa Legyen $u=u(x,y,z)$ diffható és $v=v(x,y,z)$ $\quad u,v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+2y^2+3z^2+u^2+v=6 \\ 2x^3+4y^2+2z^2+u+v^2=9 \end{array}\right\}$$

Tudjuk, hogy $u(1,-1,0)=-1$

$v(1,-1,0)=2$. Mennyi $u'_x(1,-1,0)$ és $v'_x(1,-1,0)$?

$\frac{\partial}{\partial x}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2u\cdot u'_x+v'_x=0 \\ 6x^2+u'_x+2v\cdot v'_x=0 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x \\ -6x^2 \end{pmatrix}$$

↳ Cramer-szabály:

$$u'_x = \frac{\det\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ -6x^2 & 2v \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}} = \frac{-4xv+6x^2}{4uv-1}$$

$$\rightsquigarrow u'_x(1,-1,0) \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{9}$$

$x=1,\ y=-1,\ z=0$

$u=-1,\ v=2$

$$u'_y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2u & -2x \\ 1 & -6x^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}} = \frac{-12ux^2+2x}{4uv-1} \rightsquigarrow u'_y(1,-1,0) = -\frac{14}{9}$$

!

A feltételes szélsőérték

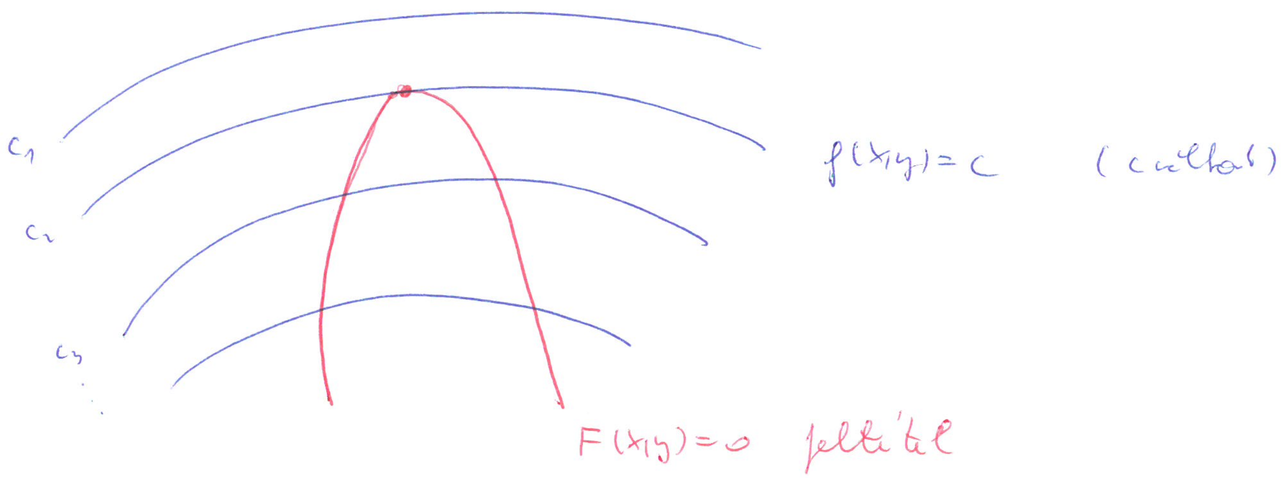
Példa Tfh szeretnénk meghatározni a $f(x,y,z) = x+2y+3z$ függvény maximumát az $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ gömbfelületen.

S korlátos és zárt $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ f-nek $\exists$ lok max-imum ill minimuma a $x^2+y^2+z^2-1=0$ feltétel mellett.

Ötlet: 2 változóban:

Keressük $f(x,y)$ szélsőértékeit, $F(x,y)=0$ feltétel mellett.

Tekintsük az $f(x,y)=c$ szintvonalakat:



A két görbe metszéspontjaiban:
- $F(x,y)=0$ feltétel teljesül ✓
- a felvett érték $= c$

$\Downarrow$

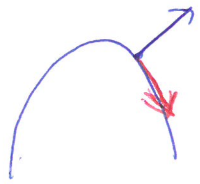
a felvett érték változik, ha a feltételt jelentő görbén elmozdulunk.

273/

Mit jelent az, hogy egy görbén elmozdulunk?

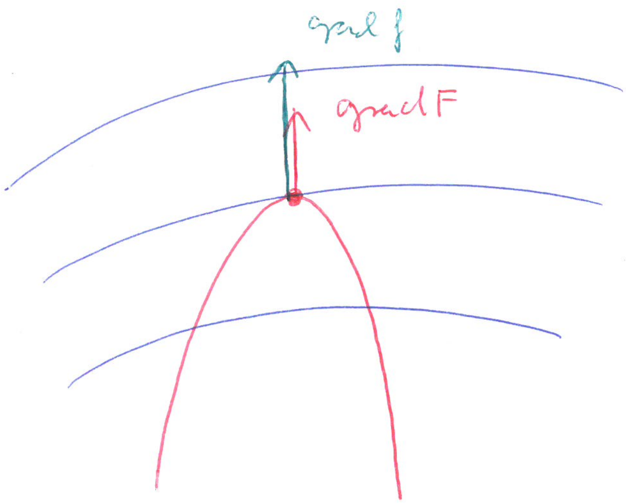
$\Downarrow$

mindig a gradiensre merőlegesen mozdulunk el



Hol lehet szélsőérték?

Ha a feltételt jelentő görbén elmozdulva ugyanazon a nívóvonalon maradunk, vagyis $\text{grad } F \parallel \text{grad } f$



vagyis, ahol a

$$\text{grad } f = \lambda \, \text{grad } F$$

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f'_x - \lambda F'_x = 0$$

$$f'_y - \lambda F'_y = 0$$

27)

Def: $H \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in H$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(\underline{a}) = \underline{0}$.

Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n változós fv értelmezve van $\underline{a}$ egy környezetében és $\exists\ \delta > 0$, hogy $f(\underline{x}) \le f(\underline{a})$ $\left(f(\underline{x}) \ge f(\underline{a}) \right)$ $\forall\ \underline{x} \in B(\underline{a}, \delta)$-ra, ahol $F(\underline{x}) = \underline{0}$.

Akkor f-nek $\underline{a}$-ban feltételes lokális maximuma (minimuma) van az $F = 0$ feltételre vonatkozólag.

TÉTEL (Lagrange-féle multiplikátoros módszer)

- $H \subset \mathbb{R}^n$, $F : H \to \mathbb{R}^m$ folytonosan diffható $\underline{a} \in \operatorname{int} H$-ban és $F(\underline{a}) = \underline{0}$.

  $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ F_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható $\underline{a}$-ban

Ha f-nek feltételes lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban $F = 0$ feltételre vonatkozólag, akkor $\exists\ \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ nem mind nulla számok, melyekre a $\lambda f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$ fv $\forall$ parciális deriváltja $= 0$.

Megj.:
- ez egy szükséges feltétel a feltételes szélsőértékek létezésére
- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$: Lagrange-multiplikátorok.

275/

Biz

$$\begin{pmatrix} \partial_1 F_1(s) & \partial_2 F_1(s), \dots, & \partial_n F_1(s) \\ \partial_1 F_2(s) & \partial_2 F_2(s) \dots & \partial_n F_2(s) \\ \vdots & & \\ \partial_1 F_m(s) & \partial_2 F_m(s) \dots & \partial_n F_m(s) \\ \partial_1 f(s) & \partial_2 f(s) \dots & \partial_n f(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,n}$$

Ha belátjuk, hogy a sorvektorai lineárisan ~~függetlenek~~ összefüggőek, akkor

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda$ nem mind nulla, melyekkel a sorvektorok

lineáris kombinációja $= 0$

$\Downarrow$

$\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m + \lambda f$ $\forall$ parciális deriváltja $= 0$ ✓

∘ $n \leq m \Rightarrow$ triviálisan igaz

(a rang legfeljebb $n \Rightarrow m+1 > n \Rightarrow m+1$ vektor biztosan lineárisan összefüggő.

$\Downarrow$

T.f.h. $n > m$. T.f.h. az első m sorvektor $\operatorname{grad} F_1(s), \dots, \operatorname{grad} F_m(s)$ lineárisan független (ha összefüggő, akkor kész vagyunk)

$\Downarrow$

Jacobi-mátrix: $\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} F_m \end{pmatrix}$ rangja $= m$

$\Rightarrow$ a mátrix tartalmaz m db lin. független oszlopvektort.

$\Downarrow$

általánosság megszorítása nélkül elérhetjük, hogy ezek hátra kerülnek: az utolsó m oszlop lin. független.

276/

$s := n-m > 0$

$\underline{b} := (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$
$\underline{c} := (a_{s+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-s}$ $\Big\}$ $\underline{a} = (\underline{b}, \underline{c})$

$F_{\underline{b}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\underline{c}$-beli Jacobi-mátrixa $F'(\underline{a})$ mátrix utolsó m oszlopából áll

$\Downarrow$ lineárisan független

$(F'_{\underline{b}})(\underline{c})$ injektív

$\Downarrow$ implicit fv tétel

$\exists\ \varphi : B(\underline{b}, \delta) \to \mathbb{R}^m$ folytonosan diffható,

melyre $\varphi(\underline{b}) = \underline{c}$ és $F(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in B(\underline{b}, \delta)$

f-nek lok. szélsőértéke van $\underline{a} = (\underline{b}, \underline{c})$-ben $F = \underline{0}$ feltétel mellett.

Tfh. lok max. $\Rightarrow$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^s$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ és $(\underline{x}, \underline{y})$ elég közel van $\underline{a}$-hoz akkor $F(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ és $f(\underline{x}, \underline{y}) \leq f(\underline{c})$

$\Rightarrow$ ha $\underline{x}$ elég közel van $\underline{b}$-hez, akkor $f(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) \leq f(\underline{b}, \varphi(\underline{b}))$

$\Downarrow$

$f(\underline{x}, \varphi(\underline{x}))$-nek lok. maximuma van $\underline{b}$-ben

$\Downarrow$

parciális deriváltjai eltűnnek $\underline{b}$-ben.

277)

Ha $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_i f(\underline{c}) + \sum_{j=1}^{m} \partial_{s+j} f(\underline{c}) \cdot \partial_i f_j(\underline{c}) = 0$

$\forall\ k = 1, \dots, s$

$\forall\ l = 1, \dots, m$-re $\quad F_l(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) = 0 \quad$ $\underline{b}$ egy környezetében

$\Downarrow$

$\partial_i F_l(\underline{b}, \varphi(\underline{b})) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\ l = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, s$-re

$\partial_i F_l(\underline{c}) + \sum_{j=1}^{m} \partial_{s+j} F_l(\underline{c}) \cdot \partial_i \varphi_j(\underline{c}) = \underline{0}$

az eredeti mátrix első
s oszlopvektora egyenlő
a utolsó m oszlop lineáris
kombinációjával

$\Downarrow$

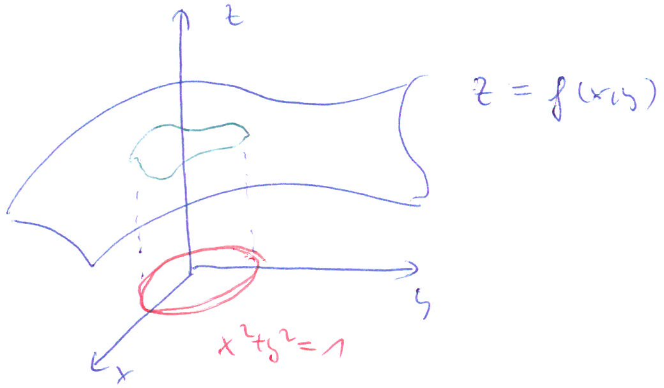
a mátrix rangja $\leq m$

de a mátrixnak $m+1$ sora van $\Rightarrow$ lineárisan
összefüggők !

278/

Példák

(1) Határozzuk meg az $f(x,y) = x + y^2$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2+y^2=1$ feltétel mellett!



feltétel: $F(x,y) = x^2+y^2-1=0$

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot F(x,y) = x+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

f feltételes szélsőértéke $F=0$ mellett $\Longrightarrow$ L ~~sz~~ szabad szélsőértékei

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1+2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y+2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2+y^2-1 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y(1+\lambda)=0$$

$y=0$ vagy $\lambda=-1$

- $y=0 \Longrightarrow x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \rightsquigarrow x=1$ vagy $x=-1$

$$1+2\lambda x=0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2x}$$

$P_1(1,0)$ $\lambda = -\frac{1}{2}$

$P_2(-1,0)$ $\lambda = \frac{1}{2}$

275)

- $\lambda = -1 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\hookrightarrow P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \lambda = -1$

A lehetséges pontok további vizsgálata:

- $P_1(1,0)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ feltétel mellett lehet-e szélsőérték?

$$L\left(x, y, -\tfrac{1}{2}\right) = x + y^2 - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ nem szemidefinit $\Rightarrow$ P_1-ben $\nexists$ sz.é.

- $P_2(-1,0)$ $\lambda = \frac{1}{2}$ feltétel mellett

$$L\left(x, y, \tfrac{1}{2}\right) = x + y^2 + \tfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 3, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ pozitív definit $\Rightarrow$ P_2-ben MIN.

- $P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\lambda = -1$ $\Rightarrow L(x, y, -1) = x + y^2 - (x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ negatív szemidefinit

$\Downarrow$

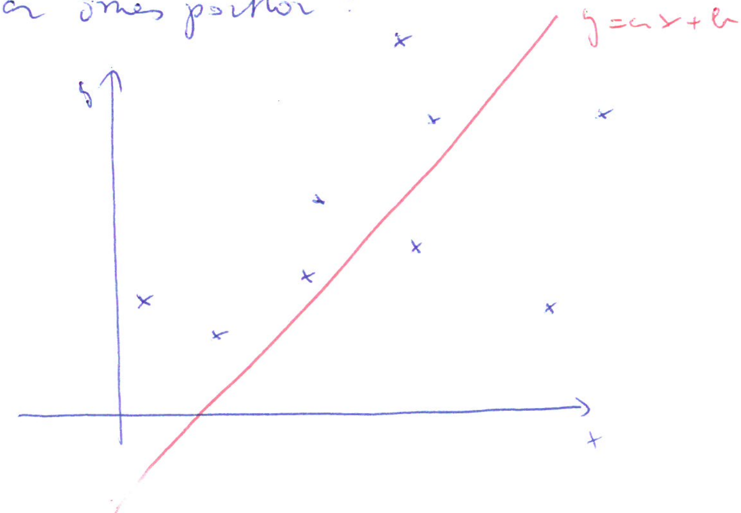
P_3, P_4 lok max.

!

Megj. Legkisebb négyzetek módszere

Adott a síkon n pont $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $\quad x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$

Keressük azt az $y = ax + b$ egyenest, mely „egyszerre a ~~leg~~ legközelebb van az összes ponthoz":



$$\sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \implies \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i (\alpha x_i + \beta - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i) = 0$$

281)

$$R := \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$S := \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$T := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$V := \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$R\alpha + S\beta = T$$

$$S\alpha + n\beta = V$$

$$\begin{pmatrix} R & S \\ S & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ V \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

α, β meghatározható.