Példa $u := u(x,y)$, $u \in C^2$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$ Laplace-egyenlet – Zeitlánóban

↳ hővezetés egyenlete

Írjuk át a Laplace-egyenletet polárkoordinátákba!

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \quad u = u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(u'_x \cdot x'_r + u'_y \cdot y'_r\right) = u''_{xr}\cdot x'_r + u'_x \cdot x''_{rr} + u''_{yr}\cdot y'_r + u'_y \cdot y''_{rr} =$$

$$= \underbrace{\left(u''_{xx}\cdot x'_r + u''_{xy}\cdot y'_r\right)}_{u''_{xr}}\cdot x'_r + u'_x \cdot x''_{rr} + \underbrace{\left(u''_{yx}\cdot x'_r + u''_{yy}\cdot y'_r\right)}_{u''_{yr}}\cdot y'_r + u'_y\, y''_{rr}$$

$$= u''_{xx}\cdot (x'_r)^2 + u''_{xy}\cdot y'_r \cdot x'_r + u'_x \cdot x''_{rr} + u''_{yx}\, x'_r \cdot y'_r + u''_{yy}\,(y'_r)^2 +$$

$$+ u'_y\, y''_{rr} =$$

$$\underset{\text{Young-Schwarz}}{=} u''_{xx}(x'_r)^2 + 2u''_{xy}\cdot x'_r \cdot y'_r + u''_{yy}(y'_r)^2 + u'_x \cdot x''_{rr} + u'_y \cdot y''_{rr}$$

hasonlóan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = u''_{\varphi\varphi} = u''_{xx}(x'_\varphi)^2 + 2u''_{xy}\, x'_\varphi \cdot y'_\varphi + u''_{yy}(y'_\varphi)^2 + u'_x\, x''_{\varphi\varphi} + u'_y\, y''_{\varphi\varphi}$$

150/

$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi$

$\hookrightarrow \; x'_r = \cos\varphi \left(= \frac{x}{r} \right) \quad \rightsquigarrow \quad x''_{rr} = 0$

$y'_r = \sin\varphi \left(= \frac{y}{r} \right) \quad \rightsquigarrow \quad y''_{rr} = 0$

$x'_\varphi = -r\sin\varphi \; (= -y) \quad \rightsquigarrow \quad x''_{\varphi\varphi} = -r\cos\varphi \; (= -x)$

$y'_\varphi = r\cos\varphi \; (= x) \quad \rightsquigarrow \quad y''_{\varphi\varphi} = -r\sin\varphi \; (= -y)$

$$\hookrightarrow \; r^2 u''_{rr} = r^2 \left(u''_{xx} (x'_r)^2 + 2u''_{xy} x'_r \cdot y'_r + u''_{yy} \cdot (y'_r)^2 + u'_x x''_{rr} + u'_y \cdot y''_{rr} \right) =$$

$$= r^2 \left(u''_{xx} \cdot \frac{x^2}{r^2} + 2u''_{xy} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} + u''_{yy} \frac{y^2}{r^2} + u'_x \cdot 0 + u'_y \cdot 0 \right) =$$

$$= u''_{xx} \cdot x^2 + 2u''_{xy} \cdot xy + u''_{yy} \cdot y^2$$

$$r u'_r = r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) = r \left(u'_x \cdot \frac{x}{r} + u'_y \cdot \frac{y}{r} \right) = u'_x \cdot x + u'_y \cdot y$$

$$u''_{\varphi\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{korábban}}}{=} u''_{xx} y^2 - 2u''_{xy} \cdot xy + u''_{yy} x^2 - u'_x \cdot x - u'_y \cdot y$$

$$\Rightarrow \; r^2 u''_{rr} + r u'_r + u''_{\varphi\varphi} = u''_{xx} \cdot x^2 + 2u''_{xy} \cdot xy + u''_{yy} \cdot y^2 +$$

$$+ u'_x \cdot x + u'_y \cdot y + u''_{xx} y^2 - 2u''_{xy} \cdot xy + u''_{yy} x^2 - u'_x x - u'_y y$$

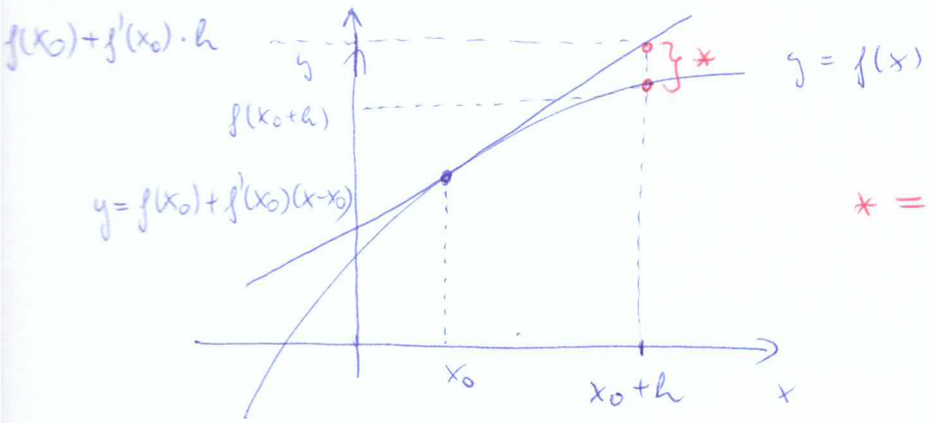
$$= \underbrace{(u''_{xx} + u''_{yy})}_{=0} (x^2 + y^2) \qquad (\text{Laplace-egyenlet})$$

$$\Rightarrow \; \boxed{r^2 u''_{rr} + r u'_r + u''_{\varphi\varphi} = 0}$$

Differenciálok

Emlék: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f diffható

$$df(x_0,h) = f'(x_0)\cdot h \quad \text{elsőrendű differenciál}$$



$$* = \left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h - f(x_0+h)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0+h)-f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot h = df(x_0,h)$$

az elsőrendű differenciál közelítést ad f megváltozására, ~~ha~~ miközben x_0-ról x_0+h-ba megyünk.

Általánosítás

$D\subset\mathbb{R}^n$, $f\in C^2(D)$

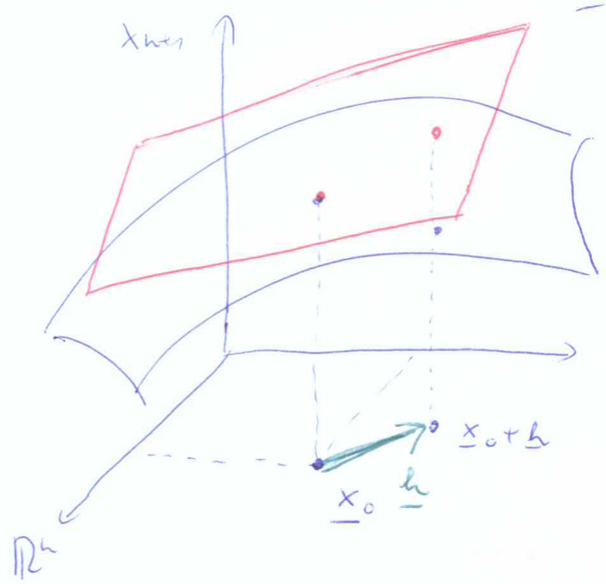
↳ $$df(\underline{x},\underline{h}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})\cdot h_i \equiv \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}), \underline{h}\rangle$$

↳ f elsőrendű differenciálja $\underline{x}$-ben $\underline{h}$ irányban

$$\Downarrow$$

elsőrendű közelítés: $f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x}) \approx df(\underline{x},\underline{h})$

15 2)



$\underline{x}_0$-beli érintősík

$x_{n+1} = f(\underline{x})$

$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) \approx \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle$

Ha $f \in C^2 \Rightarrow df$ differenciálható $\Rightarrow df$ differenciálja $\equiv$

f második differenciálja

$$d^2 f(\underline{x}, \underline{h}) = d(df(\underline{x}, \underline{h})) = \sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_i x_k}(\underline{x})\, h_i h_k =$$

$$= \underline{h}^T \left[f''(\underline{x}) \right] \cdot \underline{h} =$$

itt már persze, hogy $\underline{h}$ oszlopvektor

Hesse-mátrix

$$= \boxed{\underline{h}^T} \; \boxed{f''(\underline{x})} \cdot \boxed{\underline{h}}$$

Pl) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\underline{x}$-ben folytonosan diffható ~~2x~~ 2-szer

$\hookrightarrow$ $d^2 f((x,y),(h,k)) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + 2 f''_{xy}(x,y)\, h\cdot k + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$

Def: $D\subset\mathbb{R}^n$, $f: D\to\mathbb{R}$, $f\in C^k(D)$ k-szor folytonosan diffható D-n

$\Rightarrow$ f k-adik differenciálja $\underline{x}$ helyen a $\underline{h}$ irányban:

$(\underline{x}\in D,\ \underline{h}\in\mathbb{R}^2:\ \underline{x}+\underline{h}\in D)$

$$d^k f(\underline{x},\underline{h}) = d\left(d^{k-1}f(\underline{x},\underline{h})\right) = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\underline{x})}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}\, h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k}$$

Példa

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, df, $d^2f=?$

$$f'_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\hookrightarrow f''_{xx}(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{xy}=f''_{yx}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{(szimmetria)}$$

$$\Rightarrow \quad df((x,y),(h,k))=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot h+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot k=\frac{xh+y\cdot k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

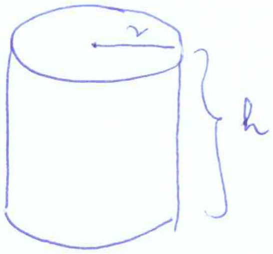
megj: gyakran $h=dx$, $k=dy$, ekkor $(dx,dy)\equiv \underline{dx}$

$$df(\underline{x},\underline{dx})=\frac{x\,dx+y\cdot dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

154)

$$d^2 f(\underline{x}, d\underline{x}) = \frac{y^2 \cdot dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2 dy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Példa 2)



Tekintsük az $r = 10$ cm alapkörsugarú, $h = 20$ cm magas hengert.

Tegyük fel, hogy a térfogatot akarjuk meghatározni, de a sugarat $\Delta r = 0{,}1$ cm hibával tudjuk megmérni, a magasságot pedig $\Delta h = 0{,}01$ cm hibával.

Elsőrendű közelítésben mekkora hibával tudjuk megmondani a térfogatot?

$$V = V(r,h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$\hookrightarrow \quad dV((r,h),(dr,dh)) = V'_r \cdot dr + V'_h\, dh \;(=)$$

$$V'_r = 2r\pi \cdot h \quad , \quad V'_h = r^2\pi$$

$$(=)\; 2r\pi \cdot h\, dr + r^2\pi\, dh$$

$$\hookrightarrow dV((10,20),(\pm 0{,}1; \pm 0{,}01)) = 2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 20 \cdot (\pm 0{,}1) + 10^2 \cdot \pi (\pm 0{,}01)$$

$$\left.\begin{array}{l} \max dV = 40\pi + \pi = 41\pi \\ \min dV = -40\pi - \pi = -41\pi \end{array}\right\} \quad dV = \pm 41\pi \approx \pm 128{,}74 \text{ cm}^3$$

$(V = 6280 \text{ cm}^3)$

155/

Pl: Összetett függvény differenciálja

$$D \subset \mathbb{R}^m, \quad \varphi_i : D \to \mathbb{R} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$D_f \subset \mathbb{R}^n, \quad f : D_f \to \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad g(x_1, \dots, x_m) := f\left(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)\right)$$

összetett fv

Tfh φ_i-k diffhatók $\underline{a} \in D$-ben és f diffható $\underline{b} = (\varphi_1(\underline{a}), \dots, \varphi_n(\underline{a}))$-ban.

Láttuk:
$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(\underline{b}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\underline{a}) \qquad k = 1, \dots, m$$

(láncszabály)

$$\Downarrow$$

$$dg(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{\varphi_i}(\underline{b}) \cdot (\varphi_i)'_{x_k}(\underline{a}) \cdot dx_k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{\varphi_i}(\underline{b}) \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} (\varphi_i)'_{x_k}(\underline{a})\, dx_k \right)}_{d\varphi_i(\underline{a}, d\underline{x})} = df(\underline{b}, d\underline{\varphi}),$$

ahol
$$d\underline{\varphi} = (d\varphi_1, \dots, d\varphi_n)$$

Köv (szorzat fv differenciálja)

$$g : \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{D}} \to \mathbb{R}, \quad g := \prod_{i=1}^{n} \varphi_i, \quad \varphi_i : D \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

φ_i deriválható $\forall \underline{x} \in D$-n

↳ g-t tekinthetjük összetett függvénynek:

$$f(y_1, \dots, y_n) := y_1 y_2 \dots y_n$$

↳ $g = f \circ \varphi$

⇓

$$dg(\underline{x}, d\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{y_i}(\varphi(\underline{x}))\, d\varphi_i(\underline{x}, d\underline{x}) =$$

$$= (d\varphi_1)\varphi_2\varphi_3 \dots \varphi_n + \varphi_1(d\varphi_2)\varphi_3 \dots \varphi_n + \dots + \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_{n-1}(d\varphi_n)$$

hasonlóan:

$$d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2$$

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{df_1 \cdot f_2 - f_1 df_2}{f_2^{\,2}}$$

157/

Megj: Differenciálegyenleteknél, fizikában, stb. gyakran előforduló kérdés:

$n=2$-ben: Mikor lehet egy $p(x,y)dx + q(x,y)dy$ egy $f(x,y)$ függvény elsőrendű differenciálja?

($\equiv$ teljes differenciál)

Keressünk egy olyan f kétszer különös függvényt, melyre:

$$df((x,y),(dx,dy)) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$$

p, q diff.ható függvények.

Szükséges és elégséges:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$$

Ha $f \in C^2 \Rightarrow$ Young-Schwarz-tétel igaz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x,y)}$$

szükséges feltétel arra, hogy teljes differenciál legyen

$\Rightarrow$ f meghatározása később

158)

Pl Lehet-e $(6xy-2y^2)\,dx+(3x^2-4xy)\,dy$ teljes differenciál?

$$p(x,y)=6xy-2y^2$$
$$q(x,y)=3x^2-4xy$$

$\hookrightarrow \quad \dfrac{\partial p}{\partial y}=6x-4y \qquad \dfrac{\partial q}{\partial x}=6x-4y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \quad \Rightarrow$ <u>IGEN</u>

Többváltozós függvények Taylor-polinomja

Eml. $f: B(a,r)\to\mathbb{R}$, $B(a,r)\subset\mathbb{R}$, $(n+1)$-szer diffható. Ekkor $\forall x\in B(a,r)$

$\exists\ \xi$ a és x között, melyre

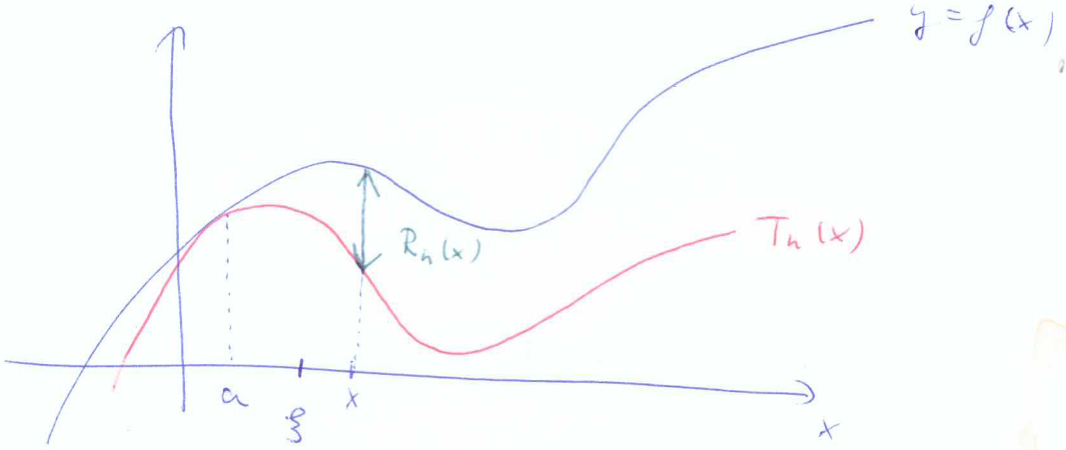
$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(x)\ \ n\text{-ed fokú Taylor-polinom}}+R_nf(x)$$

$$R_nf(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{Lagrange-féle maradéktag}$$

$h:=x-a \rightsquigarrow \xi=a+th \quad t\in(0,1)$

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n+1)}(a+th)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

159/



$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$

<u>Általánosítás</u> (egyelőre 2 változóban):

cél: $f(x+h, y+k)$ közelítése Taylor-polinommal.

↳ $F(t) := f(x+h\cdot t, y+k\cdot t) \quad t\in[0,1]$

↳ $F:[0,1]\to\mathbb{R}$

• Tfh f $(n+1)$-szer deriválható $\Rightarrow$ F is $(n+1)$-szer deriválható

Kiszámoljuk F Taylor-polinomját $t=0$ körül:

$$F'(t)=f'_x(x+h\cdot t, y+k\cdot t)\cdot h+f'_y(x+ht, y+kt)\cdot k$$

$$\hookrightarrow F'(0)=f'_x(x,y)\cdot h+f'_y(x,y)\cdot k$$

$$F''(t)=f''_{xx}(x+h\cdot t, y+kt)\cdot h^2+f''_{xy}(x+ht, y+kt)\cdot h\cdot k+$$

$$+f''_{yx}(x+ht, y+kt)\cdot h\cdot k+f''_{yy}(x+ht, y+kt)\cdot k^2=$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Young-Schwarz}}}{=} f''_{xx}(x+ht, y+kt)\cdot h^2+2f''_{xy}(x+ht, y+kt)\,h\cdot k+f''_{yy}(x+ht, y+kt)\,k^2$$

$$\Rightarrow F''(0) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + 2 f''_{xy}(x,y)\cdot h\cdot k + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$$

folytatva:

$$F^{(n)}(0) = f_{x^n}\, h^n + \binom{n}{1} f_{x^{n-1}y}\, h^{n-1} k + \binom{n}{2} f_{x^{n-2}y^2}\, h^{n-2} k^2 + \ldots + f_{y^n}\, k^n$$

ahol: $f_{x^k y^l}$: k-szor deriváljuk parciálisan x-szerint

l-szer —||— y-szerint

(Young-Schwarz tétel miatt a sorrend indifferens)

(Megj. szimbolikusan $F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$ + binomiális tétel)

Taylor-tétel F-re: $\exists\ \vartheta \in (0,1)$, hogy

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \underbrace{\frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}t^{n+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

$\Downarrow t=1$

$$F(1) = f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(f'_x(x,y)\cdot h + f'_y(x,y)\, k\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x,y)\, h^2 + 2 f''_{xy}(x,y)\cdot h\cdot k + f''_{yy}(x,y)\, k^2\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(f_{x^n}(x,y)\, h^n + \binom{n}{1} f_{x^{n-1}y}(x,y)\, h^{n-1}k + \ldots + f_{y^n}(x,y)\cdot k^n\right) + R_n f$$

$$R_n f = \frac{1}{(n+1)!}\left(f_{x^{n+1}}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)\, h^{n+1} + \ldots + f_{y^{n+1}}(x+\vartheta h, y+\vartheta k)\, k^{n+1}\right)$$

161)

Megj. $df((x,y),(h,k)) = f'_x \cdot h + f'_y \cdot k$

$d^2f((x,y),(h,k)) = f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} \cdot h \cdot k + f''_{yy} k^2$

$\vdots$

$\hookrightarrow f(x+h, y+k) = f(x,y) + df((x,y),(h,k)) + \frac{1}{2!} d^2 f((x,y),(h,k)) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f((x,y),(h,k)) + R_n$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x+\vartheta h, y+\vartheta k) \qquad \vartheta \in (0,1)$$

$$\| $$

$$o\left((h^2+k^2)^{n/2}\right)$$

Példa 1) Állítsuk elő $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x - 3y + 2$ függvényt $(x-1)$ és $(y-2)$ hatványai szerint!

$\Longleftrightarrow$ adjuk meg az $\underline{a} = (1,2)$ körüli Taylor-polinomját

$$h = (x-1) \quad , k = (y-2)$$

$f(1,2) = -21$

$f'_x(x,y) = 2x - 2y - 2 \rightsquigarrow f'_x(1,2) = -4$

$f'_y(x,y) = -2x - 6y - 3 \rightsquigarrow f'_y(1,2) = -17$

$f''_{xx}(x,y) = 2 \quad , \quad f''_{xy}(x,y) = -2 \quad , \quad f''_{yy}(x,y) = -6$

$\hookrightarrow f''_{xx}(1,2) = 2 \quad , \quad f''_{xy}(1,2) = -2 \quad , \quad f''_{yy}(1,2) = -6$

$\Rightarrow$

$$f(x,y) = -21 - 4(x-1) - 17(y-2) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) - 6(y-2)^2\right)$$

162)

Példa 21 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cos y$

Adjuk meg $a=(0,0)$ körüli 3-ad fokú Taylor-polinomját és a maradéktagot!

- $f(0,0) = 1$
- $f'_x(x,y) = e^x \cos y \rightsquigarrow f'_x(0,0) = 1$

  $f'_y(x,y) = -e^x \sin y \rightsquigarrow f'_y(0,0) = 0$

- $f''_{xx}(x,y) = e^x \cos y \rightsquigarrow f''_{xx}(0,0) = 1$

  $f''_{xy}(x,y) = -e^x \sin y \rightsquigarrow f''_{xy}(0,0) = 0$

  $f''_{yy}(x,y) = -e^x \cos y \rightsquigarrow f''_{yy}(0,0) = -1$

- $f'''_{xxx}(x,y) = e^x \cos y \rightsquigarrow f'''_{xxx}(0,0) = 1$

  $f'''_{xxy}(x,y) = -e^x \sin y \rightsquigarrow f'''_{xxy}(0,0) = 0$

  $f'''_{xyy}(x,y) = -e^x \cos y \rightsquigarrow f'''_{xyy}(0,0) = -1$

  $f'''_{yyy}(x,y) = e^x \sin y \rightsquigarrow f'''_{yyy}(0,0) = 0$

- $f^{(4)}_{x^4} = e^x \cos y$, $f^{(4)}_{x^3y} = -e^x \sin y$, $f^{(4)}_{x^2y^2} = -e^x \cos y$, $f^{(4)}_{xy^3} = e^x \sin y$

  $f^{(4)}_{y^4} = e^x \cos y$

163/

$$\Rightarrow \quad T_3(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(1\cdot x + 0\cdot y) + \frac{1}{2!}(1\cdot x^2 - 2\cdot 0\cdot xy - 1\cdot y^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(1\cdot x^3 + 3\cdot 0\cdot x^2 y + 3\cdot(-1)xy^2 + 0\cdot y^3) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

maradéktag: $\quad \vartheta \in (0,1)$:

$$R_3(x,y) = \frac{1}{4!}\left[x^4 e^{\vartheta x}\cos\vartheta y - 4x^3 y e^{\vartheta x}\sin\vartheta y - 6x^2y^2 e^{\vartheta x}\cos\vartheta y + \right.$$

$$\left. + 4xy^3 e^{\vartheta x}\sin\vartheta y + y^4 e^{\vartheta x}\cos\vartheta y\right]$$

<u>TÉTEL</u> (Taylor-tétel n változóra)

$U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $[\underline{a}, \underline{a}+\underline{h}] \subseteq U$, $f: U \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-szer deriválható. Ekkor $\exists\ \vartheta \in (0,1)$, hogy

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|i|=k} \frac{\partial^{\underline{i}} f(\underline{a})}{\underline{i}!}\underline{h}^{\underline{i}} + \sum_{|i|=n+1} \frac{\partial^{\underline{i}} f(\underline{a}+\vartheta\underline{h})}{\underline{i}!}\underline{h}^{\underline{i}}$$

itt $\underline{i}! = i_1!\, i_2! \dots i_n!$ $\qquad \underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ index

$\underline{h}^{\underline{i}} = h_1^{i_1} h_2^{i_2} \dots h_n^{i_n}$

A szélsőérték

Emlék: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in U$-ban f-nek

- lokális minimuma van, ha $\exists\ \delta > 0$, hogy

$$f(\underline{a}) \leq f(\underline{x}) \quad \forall\ \underline{x} \in B(\underline{a}, \delta) \text{ esetén}$$

- lokális maximuma van, ha $\exists\ \delta > 0$, hogy

$$f(\underline{a}) \geq f(\underline{x}) \quad \forall\ \underline{x} \in B(\underline{a}, \delta)$$

Emlék: 1 változó

$$f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, \quad a \in (\alpha, \beta)$$

- TÉTEL (szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Ha f differenciálható a-ban és itt f lokális szélsőértéke van

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

Megj: Ha $f'(a) = 0$ teljesül, akkor f-nek a-ban kritikus pontja ~~van~~. (vagy stacionárius pontja) van

- TÉTEL (másodrendű elégséges feltétel szélsőérték létezésére)

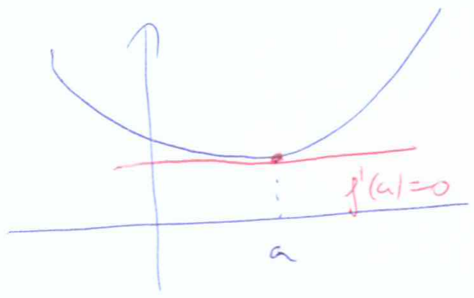
Ha f a-ban kétszer deriválható, $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, akkor a-ban szélsőértéke van. Ha $f''(a) > 0 \Rightarrow a$-ban MIN

ha $f''(a) < 0 \Rightarrow a$-ban MAX.

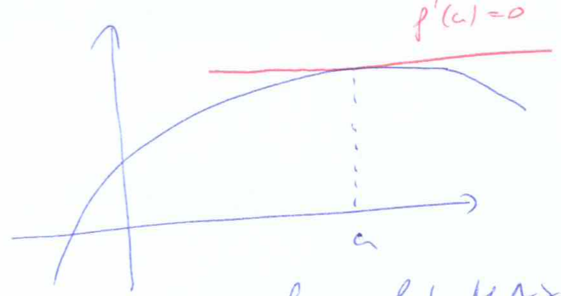
105)

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{1}{2!} f''(a)\, h^2 + o(h^3)$$

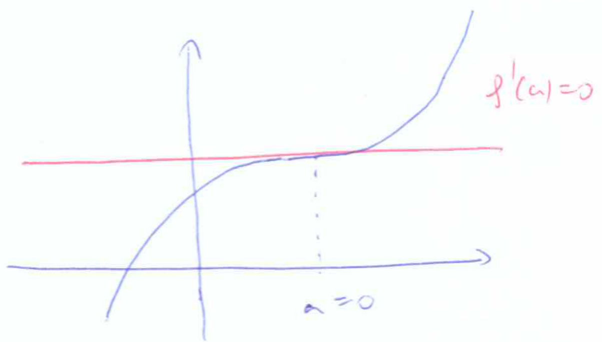
szükséges feltétel: $f'(a)=0$ $\Rightarrow$ a-beli érintő egyenes vízszintes



a-ban lok MIN



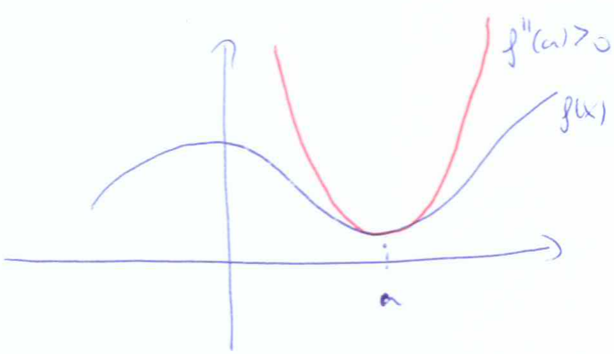
a-ban lok MAX



a-ban $\nexists$ szélsőérték

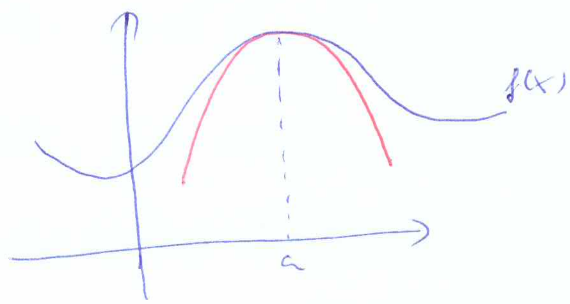
elégséges feltétel:

$$f(a+h) = \underline{f(a)} + \underbrace{f'(a)h}_{=0} + \underline{\frac{1}{2} f''(a) h^2} + o(h^3)$$



$\Downarrow$

lok MIN



$f''(a)<0$

$\Downarrow$

lok MAX

166)

TÉTEL (Szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

$U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}$ differenciálható.
Ha $\underline{a} \in U$-ban f-nek lokális szélsőértéke van, akkor

$$f'(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(f'_{x_1}(\underline{a}), \dots, f'_{x_n}(\underline{a})\right) = \underline{0}$$

azaz $f'_{x_1}(\underline{a}) = 0, \dots, f'_{x_n}(\underline{a}) = 0$.

Biz Ha f-nek szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor az

$$f_k(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \text{ szekciófüggvénynek}$$

is szélsőértéke van a_k-ban $\forall k = 1, \dots, n$-re

$$\Downarrow$$

$$\frac{df_k}{dx}(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a}) = 0$$

$\circ$!

Pl $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

$f'_x(x,y) = 2x - 2 = 0 \iff x = 1$

$f'_y(x,y) = 2y - 6 = 0 \iff y = 3$

lehetséges szélsőérték $(1,3)$-ban.

Mivel $f(x,y) = 4 + \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-3)^2}_{\geq 0} \geq 4 \Rightarrow f(1,3) = 4$

lok MIN, sőt

abszolút MIN

Def:

- $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in D$

  f-nek $\underline{a}$-ban abszolút minimuma (abszolút maximuma) van, ha $f(\underline{a}) \le f(\underline{x})$ $\left(f(\underline{a}) \ge f(\underline{x}) \right)$ $\forall \underline{x} \in D$

- f-nek $\underline{a}$-ban kritikus pontja (stacionárius pontja) van, ha $f'_{x_k}(\underline{a}) = 0$ $\forall k = 1, \dots, n$, vagy $\underline{a}$-ban nem létezik az összes parciális deriváltja.

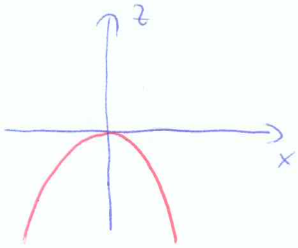
Pl: $f(x,y) = y^2 - x^2$

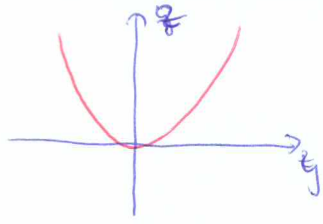
$$f'_x(x,y) = -2x = 0 \iff x = 0$$

$$f'_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$$

↳ $(x,y) = (0,0)$-ban kritikus pont, de nem szélsőérték, mert

$f(x,0) = -x^2$, $f(0,y) = y^2$





↳ $(0,0)$ közelében van kisebb és nagyobb érték is.

168)

<u>Megj</u> A Taylor-tételben az R_n Lagrange-féle maradéktag helyett használható más is, pl. a <u>Peano-féle maradéktag</u>:

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ n-szer diffható $\mathcal{U}$-ban, akkor

$\exists \quad \eta : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} \eta(\underline{x}) = 0$ függvény, melyre

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\underline{i}|=k} \frac{\partial^{\underline{i}} f(\underline{a})}{\underline{i}!} \underline{h}^{\underline{i}} + \underbrace{\eta(\underline{h}) \cdot \|\underline{h}\|^n}$$

$\underline{h} \in \mathbb{R}^p$, $\underline{a}+\underline{h} \in \mathcal{U}$

Peano-féle maradéktag

$\sim o(\|\underline{h}\|^n)$

Ezzel pl. a másodrendű közelítés:

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2!} \langle \underline{h}, f''(\underline{a}) \underline{h} \rangle +$$

$$+ \eta(\underline{h}) \cdot \|\underline{h}\|^2 ,$$

ahol $\eta \to 0$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$

$\underline{h} \in \mathbb{R}^p$, $\underline{a}+\underline{h} \in \mathcal{U}$

165)

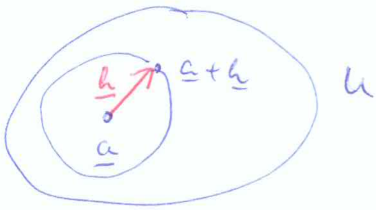
↳ Ha $\underline{a} \in U$-ban stacionárius pont van $\Rightarrow$ grad $f(\underline{a}) = \underline{0}$

(nebővebb környezetben
nincs feltétel)

$\Rightarrow$

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \frac{1}{2} \langle \underline{h}, f''(\underline{a}) \underline{h} \rangle + o(\|h\|^2)$$

$\underline{h}$ tetszőleges, úgy hogy $\underline{a}+\underline{h} \in U$



↳ Ha $\|\underline{h}\|$ kicsi ($\|\underline{h}\| \to 0$) és $\forall \underline{h}$-ra $\frac{1}{2}\langle \underline{h}, f''(\underline{a}) h \rangle > 0$,

akkor $f(\underline{a}+\underline{h}) > f(\underline{a})$ $\forall \underline{h}$-ra, ami éppen

$\Downarrow$

$\underline{a}$-ban lok MIN.

↳ Ha $\|\underline{h}\|$ kicsi és $\forall$ megfelelő $\underline{h}$-ra $\frac{1}{2}\langle \underline{h}, f''(\underline{a}) \underline{h} \rangle < 0$,

akkor $f(\underline{a}+\underline{h}) < f(\underline{a})$ $\Rightarrow$ $\underline{a}$-ban lok MAX.

$\Rightarrow$ $\langle \underline{h}, f''(\underline{a}) \underline{h} \rangle$ vizsgálata szükséges

170)

<u>Eml.</u>

$$f''(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(\underline{a}) & f''_{x_1x_2}(\underline{a}) & \dots & f''_{x_1x_n}(\underline{a}) \\ f''_{x_2x_1}(\underline{a}) & f''_{x_2x_2}(\underline{a}) & \dots & f''_{x_2x_n}(\underline{a}) \\ \vdots & & & \\ f''_{x_nx_1}(\underline{a}) & \dots & & f''_{x_nx_n}(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

Hesse-mátrix ≡ másodrendű derivált mátrix

$$\left[f''(\underline{a})\right]_{ij} = f''_{x_ix_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a}) = \partial_{x_j}\left(\partial_{x_i} f\right)(\underline{a})$$

Ha f kétszer deriválható $\Rightarrow$ $f''(\underline{a})$ szimmetrikus (Young–Schwarz)

$$\langle \underline{h}, f''(\underline{a})\underline{h} \rangle = \boxed{\underline{h}^T}\ \boxed{f''(\underline{a})} \cdot \boxed{\underline{h}} =$$

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} h_i \left(f''(\underline{a})\right)_{ij} h_j =$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a})\, h_i h_j}_{}$$

$f''(\underline{a})$ mátrix <u>kvadratikus alakja</u>

171)

Kvadratikus alakok

<u>Def</u>: Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})_{i,k=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ egy $\mathbb{R}$ feletti

szimmetrikus mátrix, azaz $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$.

Ekkor a $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{x} \rangle$ függvényt

az $\underline{\underline{A}}$ mátrix kvadratikus alakjának hívjuk.

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, akkor $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$

<u>Pl</u> $n=2$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) = \cancel{\Sigma}\ \underbrace{(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = (x\ \ y) \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} & \begin{matrix} ax+by \\ bx+cy \end{matrix} \end{array}$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

172/

Def: $Q_{\underline{\underline{A}}}$ ~~(x)~~ kvadratikus alak

- positív definit, ha $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- negatív definit, ha $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- pozitív szemidefinit, ha $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
- negatív szemidefinit, ha $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
- indefinit, ha $\exists\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, hogy $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{y}) < 0 < Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x})$

Megj: • $Q_{\underline{\underline{A}}}$ $\pm$ definit $\Rightarrow$ $Q_{\underline{\underline{A}}}$ szemidefinit

• $Q_{\underline{\underline{A}}}$ szemidefinit, de nem definit $\Leftrightarrow$ $\exists\ \underline{x} \neq 0 \ .\ Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) = 0$

• $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\left\{\begin{array}{l} + \text{ definit} \\ + \text{ szemidefinit} \\ - \text{ definit} \\ - \text{ szemidef.} \\ \text{indefinit} \end{array}\right\}$, ha $Q_{\underline{\underline{A}}}$ kvadratikus alak az.

Pl: $Q_{\underline{\underline{A}}}(\underbrace{x,y}_{\underline{x}}) := 2x^2 + 2xy - y^2 \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} Q_{\underline{\underline{A}}}(0,1) = -1 \\ Q_{\underline{\underline{A}}}(1,0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_{\underline{\underline{A}}}$ indefinit

173)

Megj: $\underline{Q}_{\underline{A}}(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{A}\,\underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2 \cdot \left\langle \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \underline{A}\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\rangle =$

$$= \|\underline{x}\|^2 \cdot Q_{\underline{A}}\left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}\right) \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$$

$\|\underline{x}\|^2 > 0$ és $\left\| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\| = 1$

$\Rightarrow$ $Q_{\underline{A}}(\underline{x})$ definitségének vizsgálatához elég az egységgömbhéjra szorítkozni:

$G := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| = 1\}$ korlátos és zárt

$\Downarrow$

kompakt

másrészt: $Q_{\underline{A}}(\underline{x})$ folytonos:

$$|Q_{\underline{A}}(\underline{x}) - Q_{\underline{A}}(\underline{y})| = |\langle \underline{x}, \underline{A}\,\underline{x} \rangle - \langle \underline{y}, \underline{A}\,\underline{y} \rangle| =$$

$$= |\langle \underline{x}, \underline{A}(\underline{x}-\underline{y}) \rangle + \langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{A}\,\underline{y} \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle \underline{x}, \underline{A}(\underline{x}-\underline{y}) \rangle| + |\langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{A}\,\underline{y} \rangle| \underset{\text{Euklideszi-mátrixnorma}}{\leq} \|\underline{A}\| \cdot \|\underline{x}-\underline{y}\| \left(\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|\right)$$

ha $\|\underline{x}-\underline{y}\|$ kicsi $\Rightarrow$ $|Q_{\underline{A}}(\underline{x}) - Q_{\underline{A}}(\underline{y})|$ kicsi

$\Rightarrow$ $Q_{\underline{A}}$ folytonos (egyenletesen).

175)

$\Rightarrow$ $Q_{\underline{A}}$ folytonos G kompakton

$\Downarrow$ Weierstrass

$\{Q(\underline{x}) : \underline{x} \in G\}$ halmaznak $\exists$ minimuma (m)

és $\exists$ maximuma (M)

$\Rightarrow$ $m\|x\|^2 \leq Q_{\underline{A}}(\underline{x}) \leq M \cdot \|\underline{x}\|^2 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\hookrightarrow$

- $Q_{\underline{A}}$ pozitív definit $\Longleftrightarrow$ $m > 0$
- $Q_{\underline{A}}$ negatív definit $\Longleftrightarrow$ $M < 0$
- $Q_{\underline{A}}$ pozitív szemidefinit $\Longleftrightarrow$ $m \geq 0$
- $Q_{\underline{A}}$ negatív szemidefinit $\Longleftrightarrow$ $M \leq 0$
- $Q_{\underline{A}}$ indefinit $\Longleftrightarrow$ $m \cdot M < 0$.