175/

Láttuk: ha $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow Q_{\underline{A}}(\underline{x}) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

↳ $\forall t \in \mathbb{R}$: $Q_{\underline{A}}(t\underline{x}) = a(tx)^2 + 2b(tx)\cdot(ty) + c(ty)^2 =$

$$= t^2\, Q_{\underline{A}}(\underline{x})$$

↳ $Q_{\underline{A}}(t\underline{x})$ és $Q_{\underline{A}}(\underline{x})$ előjele megegyezik $\forall\, t \neq 0$ esetén

$\Rightarrow$ lehetőségünk van az átskálázásra:

$\underline{x}$ helyett vizsgálhatjuk $t\underline{x}$ helyen a kvadratikus alakot.

Válasszuk a következő átskálázást:

- ha $y = 0$, azaz $\underline{X} = (x, 0)$ $\Rightarrow$ térjünk át $\underline{x} = (1, 0)$-ra
- ha $y \neq 0$, azaz $\underline{x} = (x, \underset{\neq 0}{y})$ $\Rightarrow$ térjünk át $\underline{x} = (X, 1)$-re (valamilyen másik X)

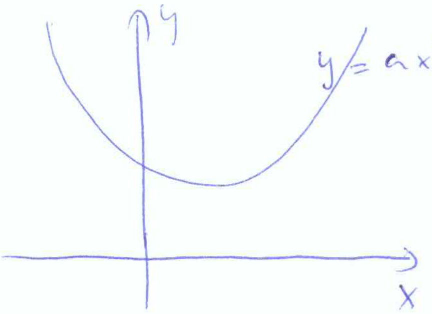
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &Q_{\underline{A}}((1,0)) = a \\ &Q_{\underline{A}}((X,1)) = aX^2 + 2bX + c \end{aligned}}$$

176/

1) ~~Ha~~ $Q_{\underline{A}}$ pozitív definit $\iff$ $Q_{\underline{A}}((1,0)) = a > 0$ és

$Q_{\underline{A}}((x,1)) = ax^2 + 2bx + c > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2 + 2bx + c > 0 \rightsquigarrow D = 4b^2 - 4ac < 0$ (diszkrimináns)



$y = ax^2 + 2bx + c$ (parabola)

$(a > 0)$

Vagyis $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pozitív definit ($Q_{\underline{A}}$ pozitív definit)

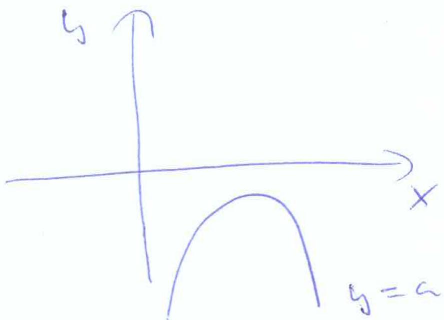
$\iff$ • $a > 0$ és

• $ac - b^2 > 0$, azaz $\det \underline{\underline{A}} > 0$

(2) $Q_{\underline{A}}$ negatív definit $\iff$ $Q_{\underline{A}}((1,0)) = a < 0$ és

$Q_{\underline{A}}((x,1)) = ax^2 + 2bx + c < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2 + 2bx + c < 0 \iff D = 4b^2 - 4ac < 0$



$(a < 0)$

$y = ax^2 + 2bx + c$

Vagyis $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ negatív definit ($Q_{\underline{\underline{A}}}$ negatív def.)

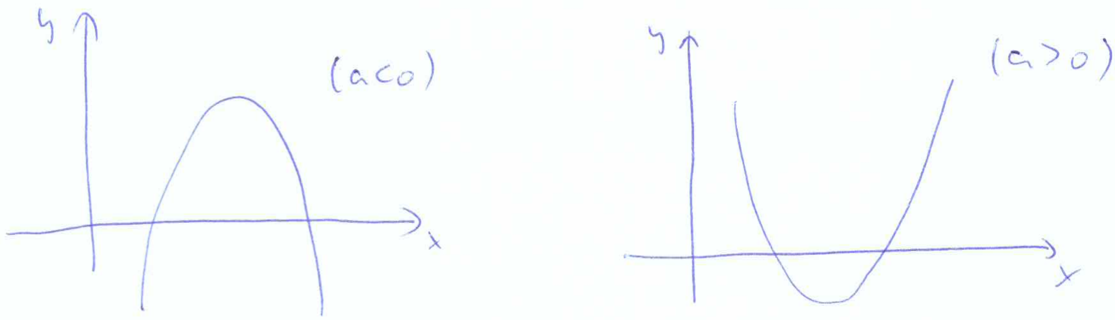
$\Longleftrightarrow$ • $a < 0$ és

• $ac - b^2 > 0$, azaz $\det \underline{\underline{A}} > 0$

(3) $Q_{\underline{\underline{A}}}$ indefinit $\Longleftrightarrow$ $Q_{\underline{\underline{A}}}((x,1)) = ax^2 + 2bx + c$ pozitív és negatív értéket is felvesz

$\Updownarrow$

$y = ax^2 + 2bx + c$ parabolának 2 gyöke van:



$\Longleftrightarrow$ $D = 4b^2 - 4ac > 0$ (diszkrimináns)

Vagyis $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ indefinit ($Q_{\underline{\underline{A}}}$ indefinit)

$\Longleftrightarrow$ $\det \underline{\underline{A}} < 0$.

Összefoglalva:

TÉTEL

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{mátrix}$$

- pozitív definit $\Longleftrightarrow$ • $a > 0$ és
  • $\det \underline{\underline{A}} = ac - b^2 > 0$
- negatív definit $\Longleftrightarrow$ • $a < 0$ és
  • $\det \underline{\underline{A}} = ac - b^2 > 0$
- indefinit $\Longleftrightarrow$ $\det \underline{\underline{A}} < 0$.

Általánosítás

Jelölés:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$$

Jelölje $\underline{\underline{A}}_k$ $\underline{\underline{A}}$ bal felső $k \times k$ méretű minormátrixát:

$$\underline{\underline{A}}_1 = (a_{11})$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\underline{\underline{A}}_n = \underline{\underline{A}}$$

179/

<u>TÉTEL</u> (Sylvester-féle kritérium)

a) $\underline{\underline{A}}$ (ill $Q_{\underline{\underline{A}}}$) pozitív definit $\Longleftrightarrow$ $\det \underline{\underline{A}}_k > 0$

$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$

b) $\underline{\underline{A}}$ (ill $Q_{\underline{\underline{A}}}$) negatív definit $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k \det \underline{\underline{A}}_k > 0$

$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$!

<u>Megj</u>

① $(-1)^k \det \underline{\underline{A}}_k > 0$ jelentése:

- páros rendű sarokaldeterminánsok pozitívak
- páratlan rendű —ıı— negatívak

② pozitív ill negatív szemidefinitség nem terjeszthető ki a tétel (pl $\det \underline{\underline{A}}_k \geq 0$ $\forall\, k = 1, \ldots, n$ $\not\Longrightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ pozitív szemidefinit)

pl: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det \underline{\underline{A}}_k = 0$ $k = 1, 2$

de $\underline{\underline{A}}$ nem pozitív szemidefinit.

Példa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

↳ $\underline{\underline{A}}_1 = (2)$, $\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}_3 = \underline{\underline{A}}$

$\det \underline{\underline{A}}_1 = 2$, $\det \underline{\underline{A}}_2 = 2$, $\det \underline{\underline{A}}_3 = 8$

$\Rightarrow \det \underline{\underline{A}}_k > 0 \quad k = 1, 2, 3 \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ pozitív definit

Eml.: $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \times n$-es valós mátrix)

$\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $\underline{\underline{A}}$ sajátvektora $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékkel,

ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$ (sajátérték egyenlet).

$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{v} - \lambda \underline{v} = (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{v} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ együttható-mátrixszal és $\underline{v}$ ismeretlennel.

Mivel a $\underline{v} = \underline{0}$ triviális megoldások nem érdekelnek

$\Rightarrow$ $\boxed{\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0}$ karakterisztikus polinom

↳ gyökei: λ sajátértékek

131)

Ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$ és $\underline{\underline{A}}$ pozitív definit, azaz

$$\langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \rangle > 0 \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{x} \neq \underline{0}\ \text{-ra},$$

akkor speciálisan $\underline{x} = \underline{v}$-re alkalmazva:

$$\langle \underline{v}, \underline{\underline{A}}\,\underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \lambda \underbrace{\|\underline{v}\|^2}_{>0} > 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda > 0.$$

A megfordítás is igaz, azaz ha az összes sajátérték pozitív, akkor $\underline{\underline{A}}$ pozitív definit.

(Ha $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$, akkor $\exists$ $\underline{\underline{S}}$ ortogonális mátrix ($\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$), mellyel $\underline{\underline{A}}$ főtengelyre transzformálható, azaz

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{S}}, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{D}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Belátható, hogy $Q_{\underline{\underline{A}}} = Q_{\underline{\underline{D}}}$ és $\underline{\underline{D}}$ pozitív definit, ha $\forall$ sajátérték pozitív)

Hasonló gondolatmenet elvégezhető a többi esetre

$$\Downarrow$$

182/

Az! $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ szimmetrikus mátrix

- $\underline{\underline{A}}$ pozitív definit $\Longleftrightarrow$ $\forall$ sajátértéke pozitív
- $\underline{\underline{A}}$ pozitív szemidefinit $\Longleftrightarrow$ $\forall$ sajátértéke nemnegatív
- $\underline{\underline{A}}$ negatív definit $\Longleftrightarrow$ $\forall$ sajátértéke negatív
- $\underline{\underline{A}}$ negatív szemidefinit $\Longleftrightarrow$ $\forall$ sajátértéke nempozitív
- $\underline{\underline{A}}$ indefinit $\Longleftrightarrow$ $\exists$ pozitív és negatív sajátértéke is.

Megj. ① Mi csak valós vektortér felett dolgoztunk, valójában komplex vektortéren (unitérben) értelmezhető a definitség:

$$\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \underline{\text{önadjungált}}, \text{ ha } \underline{\underline{A}}^* = \overline{(\underline{\underline{A}}^T)}^{\text{konjugált}} = \underline{\underline{A}}$$

$$Q_{\underline{\underline{A}}}(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \rangle \quad \text{kvadratikus alak (forma)}$$

$$\underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \rangle = \underline{x}^* \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \overline{\underline{x}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

183/

Megj. (kvadratikus alakok négyzetösszegre való transzformációja)

tfh $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pozitív definit mátrix

particionáljuk a következőképpen:

$$\underline{\underline{M}} = \left[\begin{array}{c|c} a & \underline{c}^T \\ \hline \underline{c} & \underline{\underline{N}} \end{array}\right]$$

$a > 0$

$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\underline{\underline{N}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ szimmetrikus pozitív definit

$\underline{\underline{M}}_2 := \underline{\underline{N}} - a^{-1}\underline{c}\,\underline{c}^T \rightsquigarrow \underline{\underline{M}}_2 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ szimmetrikus

pozitív definit-e?

ellenőrizhető:

$$\underline{\underline{M}} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & a^{-1}\underline{c}^T \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{I}}_{n-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a & \underline{0}^T \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{M}}_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & a^{-1}\underline{c}^T \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{I}}_{n-1} \end{array}\right]$$

$\underline{v} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{x}_1 := x_1 + a^{-1}\underline{c}^T\underline{v}_2 \in \mathbb{R}$

ezekkel:

$$\underline{v}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v} = \underbrace{a\,\tilde{x}_1^2}_{\geq 0} + \underline{v}_2^T\underline{\underline{M}}_2\underline{v}_2 > 0 \qquad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

Tfh $\underline{v}_2^T\underline{\underline{M}}_2\underline{v}_2 \leq 0$. Válasszuk $x_1 := -a^{-1}\underline{c}^T\underline{v}_2$ -vel

$\Rightarrow \tilde{x}_1 = 0$

184/

$\Rightarrow$ $\underline{v}_2^T \underline{\underline{M}}_2 \underline{v}_2 > 0$ teljesül $\forall$ $\underline{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}_2$ pozitív definit

$\Downarrow$ alkalmazhatjuk rá a fenti módszert

$\vdots$

$$\boxed{\underline{v}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{v} = a_1 \tilde{x}_1^2 + a_2 \tilde{x}_2^2 + \ldots + a_n \tilde{x}_n^2}$$

$a_i > 0$ $\qquad \tilde{\underline{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ $\in$ $\underline{v}$ koordinátáinak megfelelő transzformációjával jön létre

↳ pozitív definit kvadratikus alakok egy transzformált koordinátarendszerben (bázisban) ~~ellipszoidot~~ mint felületei ellipszoidok.

Hasonlóan elvégezhető egyéb típusú kvadratikus alakokra

$\Downarrow$

másodrendű felületek elmélete

185)

TÉTEL (Másodrendű elégséges feltétel lokális szélsőérték létezésére)

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in \mathcal{U}$

Tfh
i) f kétszer folytonosan diffható $\underline{a}$-ban
ii) $f'(\underline{a}) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$
iii) $f''(\underline{a})$ deriváltmátrix pozitív definit (negatív def.)

Ekkor f-nek $\underline{a}$-ban lokális minimuma (lok. maximuma) van.

Biz. $\underline{a} \in \mathcal{U}$ nyílt $\Rightarrow \exists\, r>0$, $B(\underline{a},r) \subset \mathcal{U}$

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(\underline{a})\underline{h}, \underline{h} \rangle + \eta(\underline{h}) \|\underline{h}\|^2 =$$

$$\underset{\text{ii), grad } f(\underline{a})=\underline{0}}{=} \frac{1}{2} \langle f''(\underline{a})\underline{h}, \underline{h} \rangle + \eta(\underline{h}) \cdot \|\underline{h}\|^2 = \frac{1}{2} Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h}) + \eta(\underline{h}) \|\underline{h}\|^2$$

ahol $Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h}) = \langle f''(\underline{a})\underline{h}, \underline{h} \rangle = \langle \underline{h}, f''(\underline{a})\underline{h} \rangle$ $f''(\underline{a})$ kvadratikus alakja

$\underline{a}+\underline{h} \in B(\underline{a},r) \Rightarrow \underline{h} \in B(\underline{0},r)$

és $\eta(\underline{h}) \to 0$, ha $\|\underline{h}\| \to 0$ (Peano-féle maradéktag)

180)

Tfh $Q_{f''(a)}$ pozitív definit, azaz $Q_{f''(a)}(\underline{h}) > 0$

$\forall \underline{h} \neq \underline{0}$-ra

$\Longrightarrow \exists\, m > 0 : \quad Q_{f''(a)}(\underline{\xi}) \geq m \|\underline{\xi}\|^2 \quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{\xi} \neq \underline{0}$-ra

(Áttétel)

$\hookrightarrow \quad f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) \geq \frac{1}{2} m \|\underline{h}\|^2 + \eta(\underline{h}) \|\underline{h}\|^2 = \left(\frac{1}{2}m + \eta(\underline{h})\right) \cdot \|\underline{h}\|^2$

Mivel $\eta(\underline{h}) \to 0$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$, ezért

$|\eta(\underline{h})| < \frac{m}{4}$ alkalmas $r > 0$-ra

$(\underline{h} \in B(\underline{0}, r))$

$\Rightarrow f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) \geq \left(\frac{m}{2} - |\eta(\underline{h})|\right) \cdot \|\underline{h}\|^2 \geq \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4}\right) \|\underline{h}\|^2 = \frac{m}{4} \|\underline{h}\|^2 \geq 0$

$\underline{h} \in B(\underline{0}, r)$

$\hookrightarrow \quad f(\underline{a}+\underline{h}) \geq f(\underline{a}) \quad \forall \underline{h} \in B(\underline{0}, r)$

vagyis $\quad f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) \quad \forall \underline{x} \in B(\underline{a}, r)$

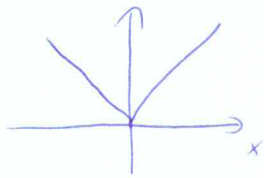
$\Downarrow$

$\underline{a}$-ban lok. MIN.

Teljesen hasonlóan negatív definittel (HF) !

Megj.: már $n=1$ esetben is látható, hogy ezek elégséges, de nem szükséges feltételek.

pl. $f(x)=|x|$



$x=0$-ban lok. MIN, pedig 0-ban f nem is deriválható.

TÉTEL (Másodrendű szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére)

$U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in U$

Tfh: a) f kétszer deriválható $\underline{a}$-ban

b) f-nek $\underline{a}$-ban lokális minimuma (maximuma) van.

Ekkor $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ és $Q_{f''(\underline{a})}$ pozitív (negatív) szemidefinit.

Biz • $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ szükséges feltétel ✓

• $\underline{a} \in U$ nyílt $\Rightarrow \exists\, r>0$, $B(\underline{a}, r) \subset U$

Tfh $\underline{a}$-ban lok. minimum van $\Rightarrow f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) \ \forall x \in B(\underline{a}, r)$

indirekt Tfh $Q_{f''(\underline{a})}$ nem pozitív szemidefinit:

$\exists\ \underline{h} \in \mathbb{R}^n$, melyre $Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h}) < 0$

$\underline{h} \neq \underline{0}$, mert $Q_{f''(\underline{a})}(\underline{0}) = 0$

! $0 < t < \dfrac{r}{\|\underline{h}\|} \Rightarrow \underline{a} + t\underline{h} \in B(\underline{a}, r)$

188)

$$f(\underline{a}+t\underline{h})-f(\underline{a})=\frac{1}{2}Q_{f''(\underline{a})}(t\underline{h})+\eta(t\underline{h})\cdot\|t\underline{h}\|^2=$$

$$=\frac{t^2}{2}\left(Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})+2\eta(t\underline{h})\cdot\|\underline{h}\|^2\right)$$

$$\uparrow$$

$$Q_{\underline{A}}(t\underline{x})=\langle t\underline{x},\underline{A}t\underline{x}\rangle=t^2\langle\underline{x},\underline{A}\underline{x}\rangle=t^2Q_{\underline{A}}(\underline{x})\quad\forall\ \underline{A}\in\mathcal{M}_n$$

($Q_{\underline{A}}$ másodrendű homogén)

ahol

$$\eta(t\underline{h})\to 0\ ,\text{ ha }t\to 0\ .$$

$$\Downarrow\quad 0<t<\frac{r}{\|\underline{h}\|}$$

$$\exists\ \tau<\frac{r}{\|\underline{h}\|}\ \text{, melyre}\quad 2|\eta(\tau\underline{h})|\cdot\|\underline{h}\|^2\le-\frac{Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})}{2}$$

($Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})$-ról feltettük, hogy negatív)

Erre a τ-ra:

$$f(\underline{a}+\tau\underline{h})-f(\underline{a})<\frac{\tau^2}{2}\left(Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})+2|\eta(\tau\underline{h})|\cdot\|\underline{h}\|^2\right)<$$

$$<\frac{\tau^2}{2}\left(Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})-\frac{Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})}{2}\right)=\frac{\tau^2Q_{f''(\underline{a})}(\underline{h})}{4}<0$$

vagyis $f(\underline{a}+\tau\underline{h})<f(\underline{a})$, ~~ha~~ $\underline{a}+\tau\underline{h}\in B(\underline{a},r)$-en

$\lightning$ $\underline{a}$-ban lok minimum volt. $\Rightarrow Q_{f''(\underline{a})}$ pozitív def.

Hasonlóan lok maximumra (HF)

o!

Köv Ha $\operatorname{grad} f(\underline{s}) = \underline{0}$ és $Q_{f''(\underline{s})}$ indefinit $\Longrightarrow$ $\underline{s}$-ben $\nexists$ szélsőérték.

$\Downarrow$

Def ahol $Q_{f''(\underline{s})}$ indefinit: nyeregpont

Megj nem elégséges feltétel! (TÉTEL)

Példák: Keressük meg a lokális szélsőértékhelyeket!

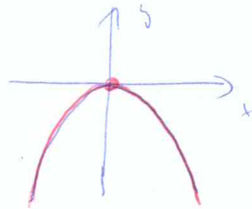
(1) $\boxed{f(x,y) = y^2+2x^2y+x^4}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4xy+4x^3 = 0 \\ f'_y(x,y) &= 2y+2x^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ (szükséges feltétel)

$x(4y+4x^2)=0 \iff x=0$ vagy $y=-x^2$

$x=0 \overset{\text{2. felt}}{\Downarrow} y=0$

$y=-x^2$: $\downarrow$ 2. feltétel automatikus



$\Uparrow$ a szükséges feltétel alapján ezen helyeken lehet szélsőérték

$f''_{xx}(x,y) = 4y+12x^2$

$f''_{xy}(x,y) = 4x = f''_{yx}(x,y)$

$f''_{yy}(x,y) = 2$

$$f''((x,y)) = \begin{pmatrix} 4y+12x^2 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$ Hesse-mátrix

a lehetséges helyeken:

$$f''((x,-x^2)) = \begin{pmatrix} 8x^2 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}}$$

$\underline{\underline{H}}_1 = (8x^2) \rightsquigarrow \det \underline{\underline{H}}_1 = 8x^2 > 0$

$\det \underline{\underline{H}} = 16x^2 - 16x^2 = 0$

$\Longrightarrow$ a szélsőérték létezésének elégséges feltétele nem teljesül

150/

más módon kell:

$$f(x,y) = y^2 + 2x^2y + x^4 = (y+x^2)^2 \geq f(x, -x^2) = 0$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

↪ az $y = -x^2$ pontokban f-nek lokális minimumai vannak, melyek globálisak is.

② $\boxed{f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}}$

$$f'_x(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} \overbrace{\left(-\frac{1}{2}(2x-2)\right)}^{1-x} = 0$$

$$f'_y(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot 2y\right)}_{-y} = 0$$

} nulláég feltétel

↪ $\boxed{y = 0 \quad , \quad x = 1}$ ⇝ szélsőérték csak a $P(1,0)$ pontban lehet

$$f''_{xx}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(1-x)^2 - e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} \Big[\underbrace{(1-x)^2 - 1}_{x^2-2x \, = x(x-2)} \Big]$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(-y)(1-x) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} \cdot y(x-1)$$

$$f''_{yy}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(-y)^2 - e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)} = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(y^2-1)$$

151)

$f''_{xx}(1,0) = -1$, $f''_{xy}(1,0) = f''_{yx}(1,0) = 0$, $f''_{yy}(1,0) = -1$

$$\hookrightarrow \quad f''(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det f''(P) = 1 > 0$ ✓

$f''_{xx}(P) = -1 < 0 \implies$ P-ben lok MAX.

(3) $\boxed{f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3x-3y-3z+1}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 3x^2-3 = 0 \\ f'_y(x,y,z) &= 3y^2-3 = 0 \\ f'_z(x,y,z) &= 3z^2-3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ szükséges feltétel}$$

$\iff x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ z = \pm 1 \implies$ összesen 8 pontban lehet szélsőérték

$f''_{xx}(x,y,z) = 6x$ $\quad f''_{xy}(x,y,z) = 0$, $f''_{xz}(x,y,z) = 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad f''_{yx} \quad\quad\quad\quad\quad\quad f''_{zx}$

$f''_{yy}(x,y,z) = 6y$ $\quad f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = 0$

$f''_{zz}(x,y,z) = 6z$

$$\implies f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}}$$

152/

$\underline{\underline{H}}_1 = 6x \quad \rightsquigarrow \quad \det \underline{\underline{H}}_1 = 6x$

$\underline{\underline{H}}_2 = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{H}}_2 = 36xy$

$\underline{\underline{H}}_3 = \underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{H}}_3 = 198xyz$

Ha (x,y,z)-ben szélsőérték $\Rightarrow \det \underline{\underline{H}}_2 = 36xy > 0$

$\Downarrow$

$x = y = 1$ vagy $x = y = -1$

- Ha $x = y = 1 \Rightarrow \det \underline{\underline{H}}_1 = 6 > 0$

$\Downarrow$

$\det H_3$-nak pozitívnak kell lennie

$\Downarrow$

$z = 1$

↳ $P_1(1,1,1)$-ben $\underline{\underline{H}}$ pozitív definit $\Rightarrow P_1$-ben lok MIN.

- Ha $x = y = -1 \Rightarrow \det \underline{\underline{H}}_1 = -6 < 0$

$\Downarrow$

$\det \underline{\underline{H}}_3$-nak negatívnak kell lennie

$\Downarrow$

$z = -1$

↳ $P_2(-1,-1,-1)$-ben $\underline{\underline{H}}$ negatív definit $\Rightarrow P_2$-ben lok MAX

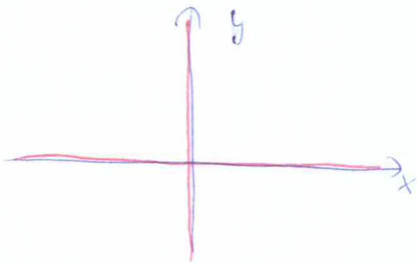
- $\Rightarrow$ a további 6 pontban $\underline{\underline{H}}$ indefinit $\Rightarrow$ nyeregpontok

193/

(5) $\boxed{f(x,y)=x^2y^3}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y)&=2xy^3=0 \\ f'_y(x,y)&=3x^2y^2=0 \end{aligned}\right\}\ \text{szükséges feltétel}$$

$\hookrightarrow$ ∘ $x=0$ vagy $y=0$



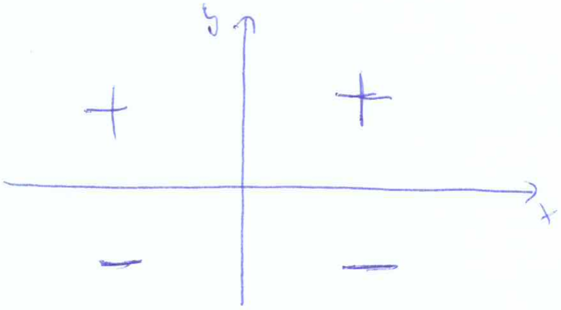
$f''_{xx}(x,y)=2y^3$

$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=6xy^2$

$f''_{yy}(x,y)=6x^2y$

$$f''((x,y))=\begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f''((0,y))=\begin{pmatrix} 2y^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det f''((0,y))=0 \\ &\circ\ f''((x,0))=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det f''((x,0))=0 \end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{elégséges feltétel} \\ \text{nem teljesül}\end{array}$$



$f(x,y)=x^2y^3$

$\Longrightarrow$ ∘ x tengely pontjaiban $\nexists$ szélsőérték

∘ y tengely pontjaiban (az origó kivételével) lehet szélsőérték

$\Downarrow$

további vizsgálat szükséges – pl. síkmetszetek, iránymenti derivált

154)

Abszolút szélsőérték

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (D_f \subset \mathbb{R}^n)$

$D_f^{(1)} := \{ \underline{a} \in \text{int}\, D_f : f$ diffható $\underline{a}$-ban és $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0} \}$

$D_f^{(2)} := \{ \underline{a} \in \text{int}\, D_f : f$ $\underline{a}$-ban nem diffható$\}$

$D_f^{(3)} := D_f \setminus \text{int}\, D_f$

- $D_f^{(1)} \cup D_f^{(2)}$: f <u>stacionárius pontjainak</u> halmaza
- Ha f-nek $\underline{a} \in D_f$-ben abszolút szélsőértéke van, akkor

$$\underline{a} \in D_f^{(1)} \cup D_f^{(2)} \cup D_f^{(3)}$$

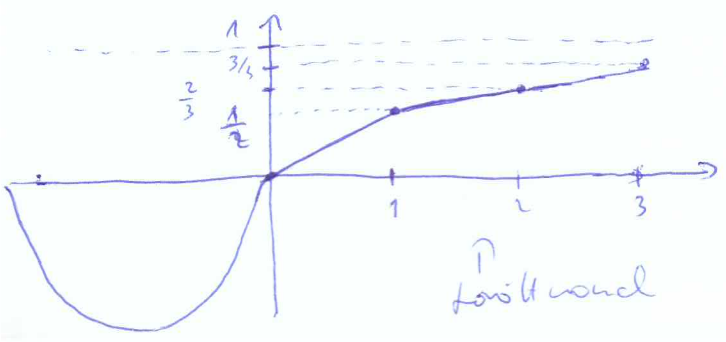
$I := \{ i \in \{1,2,3\} : D_f^{(i)} \neq \emptyset \}$ indexhalmaz

$M_i := \sup \{ f(\underline{x}) \in \mathbb{R} : \underline{x} \in D_f^{(i)} \}$ $\quad i \in I$ $\quad$ (különben $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ lenne)

$m_i := \inf \{ f(\underline{x}) \in \mathbb{R} : \underline{x} \in D_f^{(i)} \}$

<u>Megj:</u> itt nem feltétlenül írható max ill. min:

<u>pl.</u> $f(x) := \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{n+1} + n\right), & \text{ha } n \leq x < n+1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$



$\max R_f = 1$

$D_f^{(2)} = \{ x \in \mathbb{N} \}$ (nem diffható)

$\{ f(x) : x \in D_f^{(2)} \} = \{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \}$

$\nexists$ maximuma!

155/

- $\underline{a} \in D_f$ -ben abszolút maximum $\Longrightarrow$

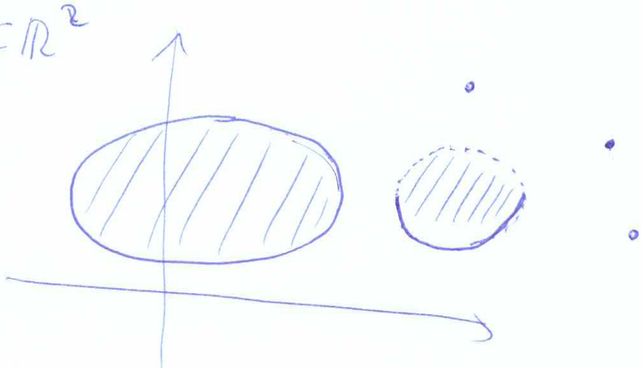
$$f(\underline{a}) = \max\{f(\underline{x}) : x \in D_f\} =$$
$$= \max\{M_i \in \mathbb{R} : i \in I\}$$

- $\underline{a} \in D_f$ -ben abszolút minimum $\Longrightarrow$

$$f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) : x \in D_f\} =$$
$$= \min\{m_i \in \mathbb{R} : i \in I\}$$

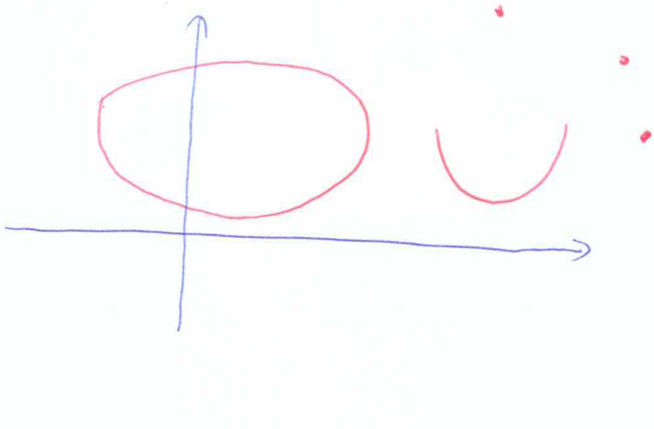
Megj: $D_f^{(3)} := D_f \setminus \operatorname{int} D_f$

Tfh $D_f \subset \mathbb{R}^2$



$D_f^{(3)}$

$\Downarrow$



156/

Példák – abszolút szélsőértékek

(1) $\boxed{f(x,y) = x^3+y^3-3xy}$

a) lokális szélsőértékek

b) $T := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x\}$

abszolút szélsőérték T-n?

a) $f'_x(x,y) = 3x^2-3y = 0$, $f'_y(x,y) = 3y^2-3x = 0$ $\longrightarrow$ $y = x^2$

$x = y^2 = x^4 \rightarrow x(1-x^3) = 0$

$\cancel{x(1-x^3)}$

$x=0 \lor x=1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$y=0 \qquad y=1$

stacionárius pontok:

$S := \{(0,0),(1,1)\}$

$f''_{xx}(x,y) = 6x$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -3$, $f''_{yy}(x,y) = 6y$

$$f''((x,y)) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$f''((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad f''((1,1)) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det f''((0,0)) = -9$

indefinit

$\Downarrow$

$(0,0)$ nyeregpont

$\det f''((1,1)) = 36-9 > 0$

$6 > 0$

pozitív definit

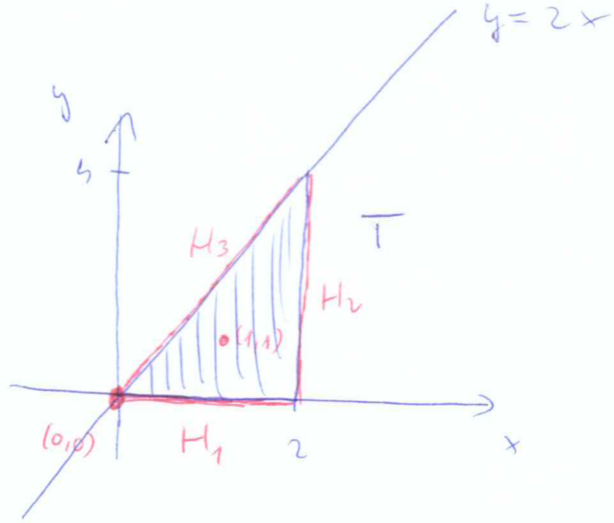
$\Downarrow$

$(1,1)$-ben lok MIN

$f(1,1) = -1$

157/

b)



$D_f^{(1)} = \{(1,1)\}$ $\qquad (0,0) \notin \text{int}\, T$

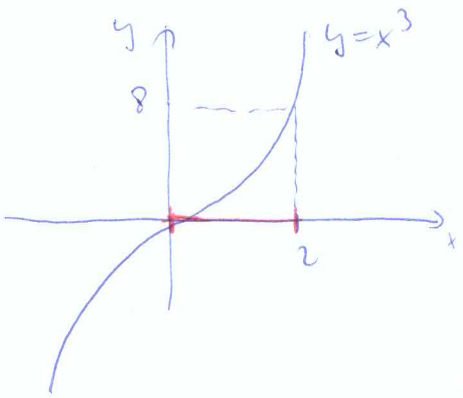
$D_f^{(2)} = \emptyset$ $\qquad$ f mindenütt diff.ható

$D_f^{(3)} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$

$D_f^{(3)}$ vizsgálata:

- $H_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\}$

$f(H_1) = f(x,0) = x^3$ $\rightsquigarrow$ ennek az 1 változós függvénynek keressük az abszolút szélsőértékeit $[0,2]$-n



$\Downarrow$

$\max f(H_1) = f(2,0) = 8$

$\min f(H_1) = f(0,0) = 0$

158/

- $H_2 = \{(2,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4\}$

$f(H_2) = f(2,y) = y^3 - 6y + 8 =: h(y) \qquad 0 \leq y \leq 4$

$\hookrightarrow h : [0,4] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút szélsőértékeit keressük $[0,4]$-en

$h'(y) = 3y^2 - 6 = 0 \quad \rightsquigarrow y = \sqrt{2} \qquad$ (csak itt lehet lok sz.é.)

$$h(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$$

az intervallum szélein:

$h(0) = 8$

$h(4) = 48$

$\Rightarrow \quad \min f(H_2) = \underset{\displaystyle f(2,\sqrt{2})}{8 - 4\sqrt{2}} \quad , \max f(H_2) = 48 = f(2,4)$

- $H_3 = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2\}$

$f(H_3) = f(x, 2x) = 9x^3 - 6x^2 =: g(x)$

$g : [0,2] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút szélsőértékeit keressük $[0,2]$-n

$g'(x) = 27x^2 - 12x = x(27x - 12) = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ vagy $x = \frac{4}{9}$

$g(0) = 0 \; , \; g\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{32}{81}$

az intervallum szélein:

$g(0) = 0$

$g(2) = 48$

$\Rightarrow \quad \min f(H_3) = -\frac{32}{81} = f\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$

$\max f(H_3) = 48 = f(2,4)$

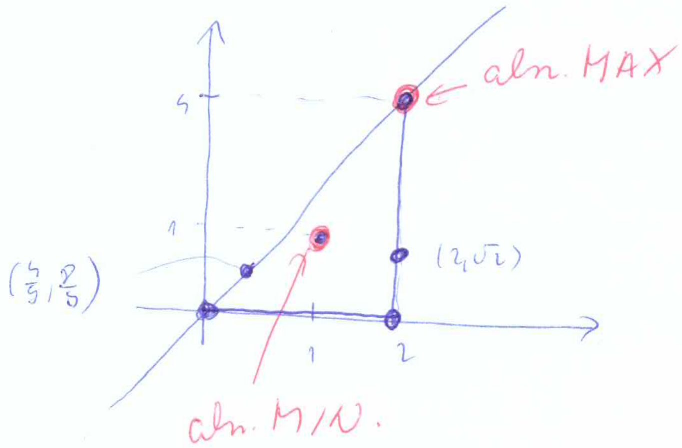
159)

Az alábbiak közül kell kiválasztani a legkisebbet ill. legnagyobbat.

$f(1,1) = -1$ (lok MIN)

$f(2,0) = 8$ $\qquad f(2,\sqrt{2}) = 8-4\sqrt{2}$ $\qquad f(\frac{4}{9},\frac{8}{9}) = -\frac{32}{81}$

$f(0,0) = 0$ $\qquad f(2,4) = 48$



$\Downarrow$

abszolút MAX $= 48$
$(2,4)$-ben

abszolút MIN $= -1$
$(1,1)$-ben

② $\boxed{f(x,y) = y^2(1-x^2-y^2)}$

a) lok szélsőértékek

b) $T := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

abszolút szélsőértékek T-n

a) $f'_x(x,y) = -2xy^2 = 0 \Rightarrow x=0 \lor y=0$

$f'_y(x,y) = 2y(1-x^2-y^2) - 2y\cdot y^2 = -4y^3+2y-2yx^2 = 0$

• ha $x = 0 \rightsquigarrow -4y^3+2y = -2y(2y^2-1) = 0 \to y=0$ vagy $y = 1/\sqrt{2}$ vagy $y = -1/\sqrt{2}$

↳ $P_1(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_2(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3(0,0)$

200/

- ha $y=0 \Rightarrow$ a második feltétel azonosan teljesül

$$\Downarrow$$

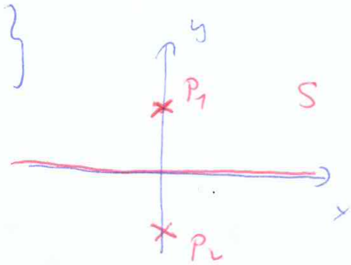
x tetszőleges

$$\Downarrow$$

$P(x,0)$ $\quad x\in\mathbb{R}$ $\quad$ ((0,0) bennevan)

$\Rightarrow$ stacionárius pontok:

$$S=\Big\{\underbrace{\left(0,\tfrac{1}{\sqrt2}\right)}_{P_1},\ \underbrace{\left(0,-\tfrac{1}{\sqrt2}\right)}_{P_2},\ \{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\Big\}$$



$f''_{xx}(x,y)=-2y^2 \qquad f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-4xy$

$f''_{yy}(x,y)=-12y^2+2-2x^2$

$$\Downarrow$$

$$f''((x,y))=\begin{pmatrix}-2y^2 & -4xy\\ -4xy & -12y^2+2-2x^2\end{pmatrix}$$ Hesse-mátrix

- $f''(P_1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\det f''(P_1)=4$, $\ [f''(P_1)]_{11}=-1<0$ $\Bigg\}\Rightarrow f''(P_1)$ negatív definit

$\Rightarrow$ P_1-ben lok max $\quad f(P_1)=\frac14$

201/

- $f''(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ ugyanaz, mint előbb

$\Downarrow$

$f''(P_2)$ negatív definit

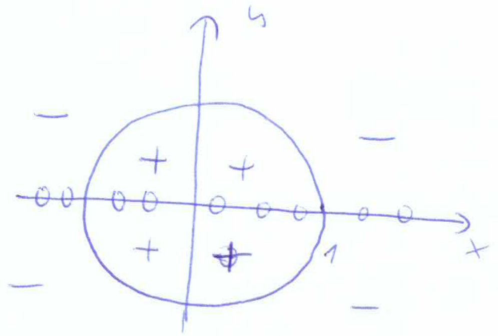
$\Rightarrow$ P_2-ben lok <u>max</u> $\quad f(P_2) = \frac{1}{4}$

- $f''((x,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2-2x^2 \end{pmatrix}$ $\quad \det f''((x,0)) = 0$

$\Downarrow$

nem eldönthető

$f(x,0) = 0 \qquad f(x,y) = y^2(1-x^2-y^2)$

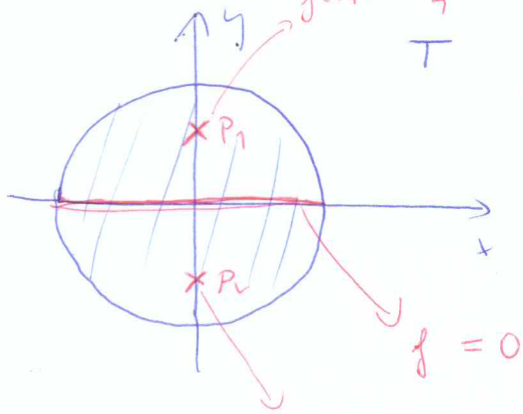


$\Rightarrow$ • ha $|x| < 1$ $\Rightarrow$ $(x,0)$-ban lok MIN $\quad f(x,0)=0$

• ha $|x| > 1$ $\Rightarrow$ $(x,0)$-ban lok MAX $\quad f(x,0)=0$

202)

b)



$P_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$

$\hookrightarrow P_1, P_2 \in T$

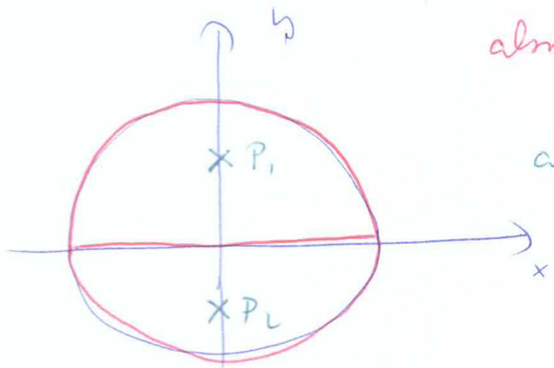
T határa: $x^2+y^2=1$ (∂T)

$f(\partial T) = 0$

$\Downarrow$

abszolút min T-n $= 0$ (a körvonalon és $(x,0)$ $x \in (-1,1)$ pontokban)

abszolút max T-n $= \frac{1}{4}$ P_1, P_2-ben

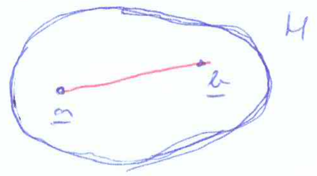


abs MIN $= 1$

abs MAX $= \frac{1}{4}$

Konvexitás

Def $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex**, ha $\forall \, \underline{a}, \underline{b} \in H$ esetén $[\underline{a}, \underline{b}] \subset H$.



$$[\underline{a}, \underline{b}] = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) \quad t \in [0,1]$$

Pl $\forall \, B(\underline{a}, r) \subset \mathbb{R}^n$ gömb konvex:

ha $\underline{x}, \underline{y} \in B(\underline{a}, r)$

$$\|\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) - \underline{a}\| = \|(1-t)(\underline{x} - \underline{a}) + t(\underline{y} - \underline{a})\| \le$$

$$\le (1-t)\|\underline{x} - \underline{a}\| + t\|\underline{y} - \underline{a}\| \le (1-t)r + tr = r.$$

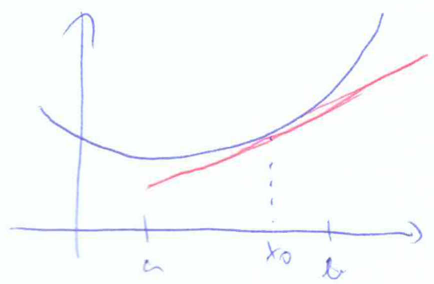
Hasonlóan $\forall$ zárt gömb, nyílt v. zárt tégla konvex.

Def. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : H \to \mathbb{R}$ **függvény konvex H-n**, ha $\forall \, \underline{x}, \underline{y} \in H$ esetén $t \mapsto f(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}))$ függvény konvex, vagyis

$$f((1-t)\underline{x} + t\underline{y}) \le (1-t) f(\underline{x}) + t f(\underline{y}).$$

Eml: 1 változóban, f diffható (a,b)-n

f konvex (a,b)-n $\iff$ f grafikonja az érintőegyenes felett fut $\forall$ (a,b)-beli érintő esetén



204/

TÉTEL: Legyen f diff.ható a $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmazon.

f konvex H-n $\iff$ f grafikonja az $(\underline{a}, f(\underline{a}))$ pontbeli érintősík felett van $\forall\, \underline{a} \in H$ esetén, azaz

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle$$

$$\forall\, \underline{a}, \underline{x} \in H.$$

Biz. Tfh f konvex H-n, $\underline{a}, \underline{x} \in H$, $\underline{a} \neq \underline{x}$

$\Rightarrow$ $F(t) := f(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a}))$ folytonosan diff.ható $\forall\, t \in [0,1]$-ben

$$F'(t) = \langle f'(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a})), \underline{x} - \underline{a} \rangle \quad \forall\, t \in [0,1]$$

Mivel F konvex (def)

$$f(\underline{x}) = F(1) \geq F(0) + F'(0) \cdot 1 = f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle$$

✓

Tfh $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle \quad \forall\, \underline{a}, \underline{x} \in H$

$F(t) = f(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a}))$ $\Rightarrow$ be kell látnunk, hogy F konvex $[0,1]$-n

vagyis $F(t) \geq F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) \quad \forall\, t, t_0 \in [0,1]$

$$F'(t) = \langle f'(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a})), \underline{x} - \underline{a} \rangle$$

$$\Downarrow$$

205/

kell:

$$f(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})) \geq f(\underline{a}+t_0(\underline{x}-\underline{a})) + \langle f'(\underline{a}+t_0(\underline{x}-\underline{a})), (t-t_0)(\underline{x}-\underline{a})\rangle \quad (*)$$

mivel $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), \underline{x}-\underline{a}\rangle$ (feltétel)

$\forall\, \underline{a}, \underline{x} \in H$

$\underline{a}$ helyett $\underline{a}+t_0(\underline{x}-\underline{a})$

$\underline{x}$ helyett $\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})$

$\Downarrow$

$$f(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})) \geq f(\underline{a}+t_0(\underline{x}-\underline{a})) + \langle f'(\underline{a}+t_0(\underline{x}-\underline{a})), (t-t_0)(\underline{x}-\underline{a})\rangle$$

pont $(*)$-t kapjuk.

!

TÉTEL Tfh f kétszer diffható a nyílt és konvex $H \subset \mathbb{R}^n$-en.

f konvex H-n $\iff$ $f''(\underline{a})$ pozitív szemidefinit $\forall\, \underline{a} \in H$.

Biz: Tfh f konvex H-n, $\underline{a}, \underline{b} \in H$, $\underline{a} \neq \underline{b}$.

$F(t) := f(\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a}))$ kétszer diffható $[0,1]$-n

és

$$F''(0) = Q_{f''(\underline{a})}(\underline{b}-\underline{a})$$

F konvex $\Rightarrow F''(0) \geq 0 \Rightarrow Q_{f''(\underline{a})}(\underline{b}-\underline{a}) \geq 0 \quad \forall\, \underline{a}, \underline{b} \in H,\ \underline{a} \neq \underline{b}$

$\Downarrow$

$Q_{f''(\underline{a})}$ pozitív szemidefinit. ✓

206)

Tfh $f''(\underline{a})$ pozitív szemidefinit $\forall\, \underline{a} \in H$-ra

! $\underline{a}, \underline{b} \in H$, $\underline{a} \neq \underline{b}$

$F(t) := f(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})) \quad \forall\, t \in [0,1]$

$\downarrow$

létezik diffható $[0,1]$-n és

$F''(t) = Q_{f''(\underline{a})}(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})) \geq 0$, mert $f''(\underline{a})$ pozitív szemidefinit

$\Downarrow$

F konvex $[0,1]$-n

$\Downarrow$

f konvex H-n

$\dot{!}$

Megj: $H \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : H \to \mathbb{R}$ <u>konkáv</u> H-n, ha $-f$ konvex H-n.

$\Downarrow$

a fenti tételek megfogalmazhatók konkáv fgv-re értelemszerűen.