111/

Példák

① $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ hol deriválható?

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\cdot y=\frac{y}{3(xy)^{2/3}} \quad \rightsquigarrow \text{ ha } x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\cdot x=\frac{x}{3(xy)^{2/3}} \quad \rightsquigarrow \text{ ha } x\neq 0,\ y\neq 0$$

$\rightsquigarrow$ f'_x, f'_y folytonos a koordinátatengelyeken kívül $\Rightarrow$ diff.ható ezeken a helyeken

$$f(x,0)=0 \Rightarrow f'_x(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f(0,y)=0 \Rightarrow f'_y(0,y)=0$$

ha itt $\exists$ a derivált, az csak a $(0,0)$ lehet

$$f(x+\Delta x,\Delta y)-f(x,0)=\sqrt[3]{(x+\Delta x)\cdot\Delta y}=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon(\underline{\Delta x})\cdot\underbrace{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}_{\|(\Delta x,\Delta y)\|}$$

$$\underline{\Delta x}=(\Delta x,\Delta y)$$

$$\hookrightarrow \quad \varepsilon(\underline{\Delta x})=\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)\cdot\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$\hookrightarrow$ a derivált $\exists$ az $(x,0)$ pontokban, ha erre az $\varepsilon(\underline{\Delta x})$-re teljesül, hogy $\varepsilon(\underline{\Delta x})\to 0$, ha $\underline{\Delta x}\to\underline{0}$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon(\underline{\Delta x}) \underset{\Delta y=m\cdot\Delta x}{\Uparrow}= \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)m\Delta x}}{\sqrt{\Delta x^2+m^2\Delta x^2}}}_{} \quad \not\exists \ \Uparrow$$

$$\frac{\sqrt[3]{mx\Delta x+m\Delta x^2}}{|\Delta x|\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt[3]{\frac{mx}{(\Delta x)^2}+\frac{m}{\Delta x}}$$

f nem deriválható $(x,0)$, $(0,y)$ pontokban (tengelyeken), azon kívül igen.

11.2/

$$f'(x,y) = \text{grad} f(x,y) = \left(\frac{y}{3(xy)^{2/3}}, \frac{x}{3(xy)^{2/3}} \right)$$

ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$

(2.) $f(x,y) = xy^2$ hol deriválható

$$\left. \begin{array}{l} f'_x(x,y) = y^2 \\ f'_y(x,y) = 2xy \end{array} \right\} \text{ mindenütt folytonosak } \overset{T}{\Rightarrow} \text{ mindenütt deriválható és}$$

$$f'(x,y) = \text{grad} f(x,y) = (y^2, 2xy)$$

ellenőrizzük le!

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 =$$

$$= \underbrace{xy^2}_{f(x,y)} + \underbrace{(y^2 \Delta x + 2xy\Delta y)}_{f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y} + \underbrace{(x(\Delta y)^2 + 2y\,\Delta x\cdot\Delta y + \Delta x\cdot(\Delta y)^2)}_{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\hookrightarrow \quad \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{x(\Delta y)^2 + 2y\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \Delta x(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \underset{\substack{\Delta x = r\cos\varphi \\ \Delta y = r\sin\varphi}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \frac{x r^2 \sin^2\varphi + 2y r^2 \cos\varphi\sin\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

✓

113

(3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
hol deriválható?

- f mindenütt folytonos (szükséges feltétel) (Hf. ell.)
- parciális deriváltak létezése (szükséges feltétel):

$(x,y)\neq(0,0)$
$$f'_x(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y)=\frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$
(szimmetria $\Updownarrow$ $x\Leftrightarrow y$ csere)

$(x,y)=(0,0)$
$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$
$$f'_y(0,0)=1 \quad \text{(szimmetria)}$$

- parciális deriváltak folytonossága (elégséges feltétel)

ha $(x,y)\neq(0,0)$ $\Rightarrow$ f'_x, f'_y folytonosak $\Rightarrow$ f deriválható az origón kívül és:
$$f'(x,y)=\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

<u>origóban való folytonosság:</u>

pl: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) \underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^4\varphi+3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi-2r^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{\underbrace{(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2}_{r^4}}=(\varphi\text{-től függő dolog})$$
$\Updownarrow$
$\nexists$

11b)

vagyis $$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)}_{\nexists} = \underset{\substack{\| \\ 1}}{f'_x(0,0)}$$

$\Rightarrow$ f'_x nem folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow$ itt az elégséges feltétel nem teljesül

$\Downarrow$

- $(0,0)$-ban definícióval dolgozunk. Ha itt deriválható a fv, akkor a derivált csak az $(1,1)$ vektor lehet.

eml.

f deriválható $(0,0)$-ban $\iff$ $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f'_x(0,0)\cdot\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

itt:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} - 1\cdot\Delta x - 1\cdot\Delta y - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3-(\Delta x)^3-\Delta y(\Delta x)^2-(\Delta y)^3-\Delta x(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} -\frac{\Delta x\cdot\Delta y(\Delta x+\Delta y)}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}} \underset{P}{=} \lim_{r\to 0} -\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi+r\sin\varphi)}{r^3} =$$

$\Delta x = r\cos\varphi$

$\Delta y = r\sin\varphi$

$= -\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)$ függ φ-től $\Rightarrow \nexists$

$\Rightarrow$ origóban nem deriválható a fv

115/

(5)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

hol deriválható?

- $f(x,y)$ mindenütt folytonos (szükséges felt.)

$(x,y) \neq (0,0) \rightsquigarrow$ triviális

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to 0} e^{\overbrace{-\frac{1}{r^2}}^{\to -\infty}} = 0 = f(0,0) \checkmark$$

- parciális deriváltak létezése (szükséges felt.)

$(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$ (szimm. $\rightsquigarrow$ $x \leftrightarrow y$ csere)

$(x,y) = (0,0) \to$ def alapján:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \underset{\uparrow}{=} 0$$

e^x $-\infty$-ben gyorsabban tart 0-hoz, mint $\forall$ polinom a 0-hoz

$f'_y(0,0) = 0$ (szimm.)

116)

• $(x,y) \neq (0,0)$ -ban f'_x, f'_y folytonosak $\Rightarrow$ f deriválható és

$$f'(x,y) \underset{(x,y)\neq(0,0)}{=} \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \right)$$

$(0,0)$ -ban

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \underset{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos\varphi}{r^4} e^{-\frac{1}{r^2}} = 0 = f'_x(0,0)$$

$$\left| \frac{2r\overset{[-1,1]}{\cos\varphi}}{r^4} e^{-\frac{1}{r^2}} \right| \leq \frac{2}{r^3} e^{-\frac{1}{r^2}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ f'_x folytonos $(0,0)$ -ban.

hasonlóan: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = f'_y(0,0)$ $\Rightarrow$ f'_y folytonos $(0,0)$ -ban

$\Downarrow$

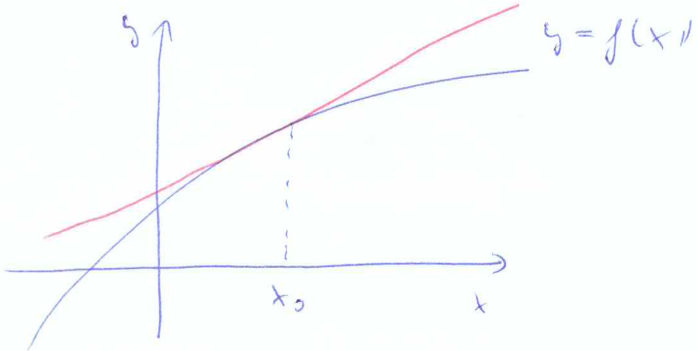
f deriválható $(0,0)$ -ban és

$$f'(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$$

○!

A derivált geometriai jelentése

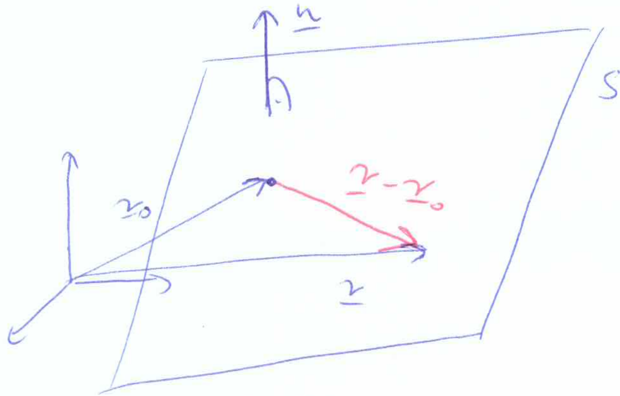
Eml. • 1 változóban



Ha f deriválható x_0-ban, akkor az x_0-beli érintőegyenes egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

• sík egyenlete 3 dimenzióban:



$\underline{r}_0$ ponton átmenő $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete

$$\left.\begin{array}{r} \underline{r} - \underline{r}_0 \in S \\ \underline{n} \perp S \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{r} - \underline{r}_0 \perp \underline{n} \quad \forall\ \underline{r} \in S \text{ esetén}$$

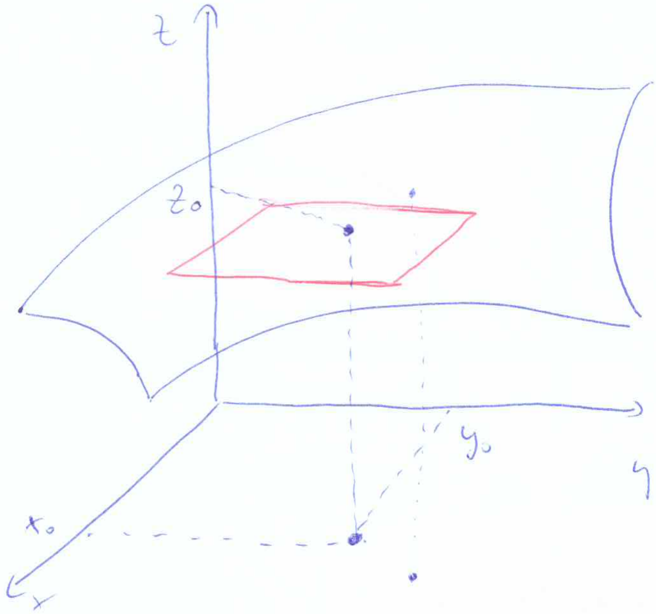
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{n} \rangle = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ \underline{r} = (x, y, z) \\ \underline{n} = (A, B, C) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (A, B, C) \rangle = \\ = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad Ax + By + Cz = \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0}_{D}$$

11.8)



$z = f(x,y)$

$z_0 := f(x_0,y_0)$

Ha f deriválható (x_0,y_0)-ban, akkor

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon(x-x_0,y-y_0)\|(x-x_0,y-y_0)\|$$

ahol

$\varepsilon(x-x_0,y-y_0) \to 0$

ha $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$$z = z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon \cdot \|(x-x_0,y-y_0)\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{0 = -1(z-z_0) + f'_x(x_0,y_0)}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - 1\cdot(z-z_0)} + \underbrace{\varepsilon \|(x-x_0,y-y_0)\|}_{\to\, 0 \text{ ha } (x,y)\to(x_0,y_0)} = 0$$

$$\langle (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1), (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\rangle = 0$$

nyilván ez egy sík-nak az egyenlete = érintősík

melynek normálvektora $\underline{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$ és

átmegy az $(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ponton.

115/ II

Def Az $z=f(x,y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ponthoz tartozó érintősík egyenlete:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Példa Adjuk meg a $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ felület $(1,\sqrt{3})$ ponthoz tartozó érintősíkját!

$$z_0 = f(x_0,y_0) = f(1,\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \rightsquigarrow f'_x(1,\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{1^2+(\sqrt{3})^2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{4}}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \rightsquigarrow f'_y(1,\sqrt{3}) = \frac{1}{1^2+(\sqrt{3})^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

↳ az érintősík egyenlete:

$$\underline{\underline{z = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-\sqrt{3})}}$$

Általában:

$\mathbb{R}^{n+1}$ hipersíkjai az $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = b$ alakú egyenletet kielégítő $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pontok, ahol $a_1, \ldots, a_{n+1}$ nem mind 0.

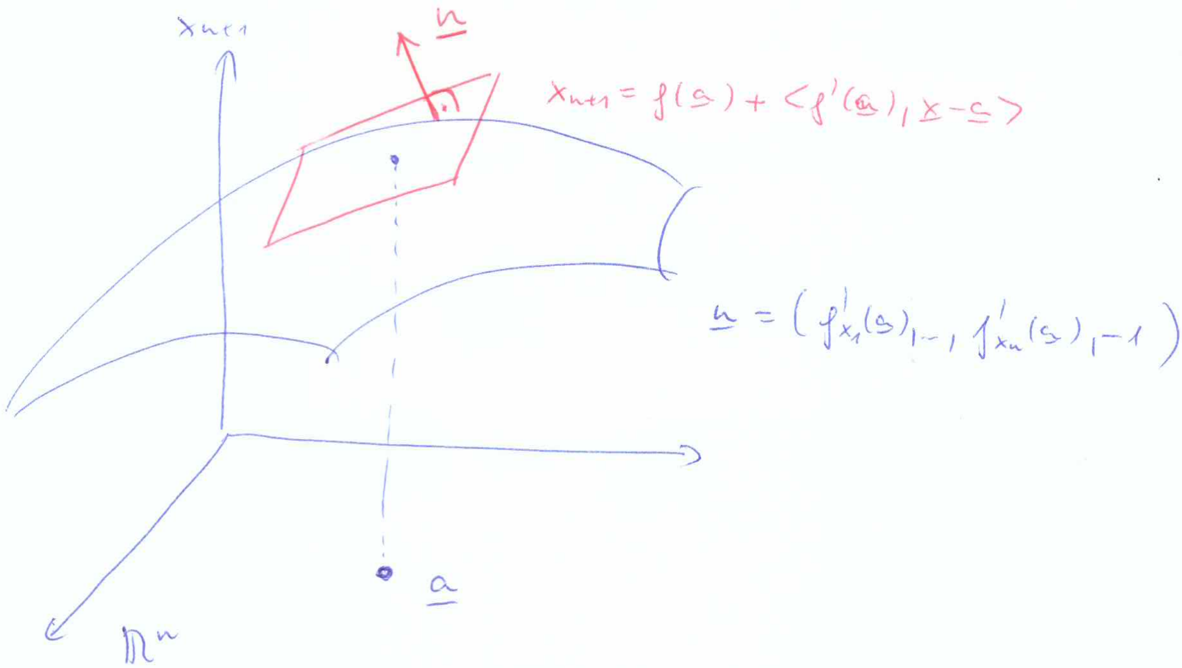
120/

Def. az $x_{n+1} = f(x_1,\dots,x_n)$ $(n+1)$-dimenziós felület

$\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ ponthoz tartozó érintősíkja

$$x_{n+1} = \langle f'(\underline{a}), \underline{x}-\underline{a}\rangle + f(\underline{a})$$, ha $f'(\underline{a})$ $\exists$, ~~a~~ és

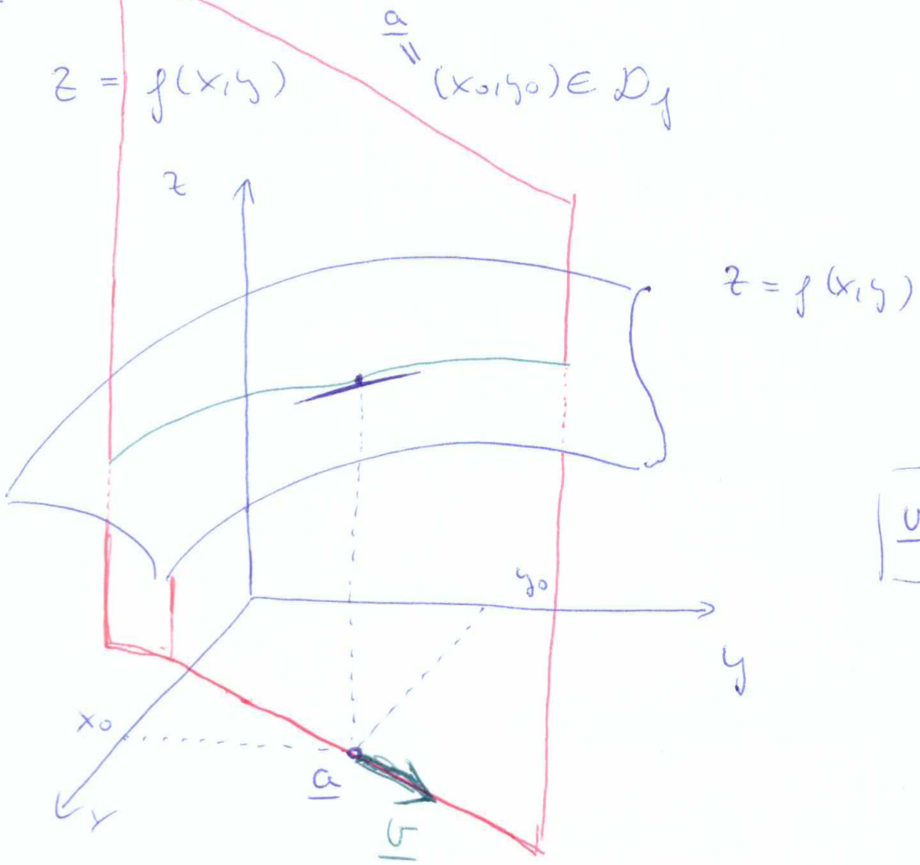
akkor $$f'(\underline{a}) = \left(f'_{x_1}(\underline{a}),\dots,f'_{x_n}(\underline{a})\right)$$



121/

Az iránymenti derivált

Szemléltetés: $n=2$-ben



$\boxed{\underline{v}\in\mathbb{R}^2,\ \|\underline{v}\|=1}$

$\underline{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2 \qquad \|\underline{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1$

Az $t\mapsto f(\underline{a}+t\underline{v})$ függvény $t=0$-beli deriváltját (ha $\exists$) f fv. $\underline{a}$-beli $\underline{v}$ iránymenti deriváltjának hívjuk.

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = D_{\underline{v}}f(\underline{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{a}+t\underline{v})-f(\underline{a})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$\parallel$

$f'_{\underline{v}}(x_0,y_0)$

geometriai jelentés: ha a felület $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontjában a $\underline{v}$ irányban elmozdulunk, ~~ekkor~~ 1 egységnyi lépés ~~után~~ alatt $f'_{\underline{v}}(x_0,y_0)$-t emelkedünk.

122) Legyen
- $\underline{v} = (1,0) = \underline{i}$

$$f'_{\underline{i}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = f'_x(x_0,y_0)$$

- $\underline{v} = (0,1) = \underline{j}$

$$f'_{\underline{j}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = f'_y(x_0,y_0)$$

$\Rightarrow$ tehát a parciális deriváltak az iránymenti derivált speciális esetei.

P1) $z = f(x,y) = 5x + 3y + x^2y^2$ $\underline{a} = (1,2)$ pontbeli deriváltja a $\underline{d} = (4,3)$ irányban?

$$\|\underline{d}\| = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow \underline{v} := \frac{\underline{d}}{\|\underline{d}\|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \|\underline{v}\| = 1 \checkmark$$

$$f'_{\underline{v}}(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t\frac{4}{5}, 2+t\cdot\frac{3}{5}) - f(1,2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{5(1+t\cdot\frac{4}{5}) + 3(2+t\cdot\frac{3}{5}) + \overbrace{(1+t\frac{4}{5})^2(2+t\frac{3}{5})^2}^{4+\frac{16}{5}t+\frac{12}{5}t+t^2(\dots)+t^3(\dots)+t^4(\dots)} - 15}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t + \frac{9}{5}t + \overbrace{t^2(\dots) + t^3(\dots) + t^4(\dots)}^{=o(t^2)}}{t} = 4 + \frac{9}{5} = \underline{\underline{\frac{29}{5}}}$$

123/

Általánosítás:

Def. Legyen $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}\| = 1$. A $t \mapsto f(\underline{a} + t\underline{v})$ függvény 0-beli deriváltját, ha létezik, az f fv $\underline{a}$ pontbeli $\underline{v}$ irányment deriváltjának nevezzük.

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) \equiv \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = D_{\underline{v}} f(\underline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a}+t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t}$$

$t \mapsto f(\underline{a}+t\underline{v})$ azt a „hegymászást" írja le, amikor a felület $(\underline{a}, f(\underline{a}))$ pontjától elindulunk a $\underline{v}$ iránya

$\Downarrow$

ennek az útnak a meredekségét adja meg $f'_{\underline{v}}(\underline{a})$

TÉTEL: Ha az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}\| = 1$ vektorra létezik $f'_{\underline{v}}(\underline{a})$ irányment derivált és

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \langle f'(\underline{a}), \underline{v} \rangle \equiv \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle.$$

Biz.

f deriválható $\underline{a}$-ban, ha $\underline{a} + t\underline{v} \in D_f$

$\hookrightarrow$ $f(\underline{a}+t\underline{v}) = f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), t\underline{v} \rangle + \varepsilon(\underline{a}+t\underline{v}) \cdot \|t\underline{v}\|$, ahol

$\varepsilon(\underline{a}+t\underline{v}) \to 0$, ha $\|t\underline{v}\| \to 0$

124/

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{f(\underline{a}+t\underline{v})-f(\underline{a})}{t}}_{\downarrow\, t\to 0 \;\; f'_{\underline{v}}(\underline{a})} = \langle f'(\underline{a}), \underline{v}\rangle \pm \underbrace{\varepsilon(\underline{a}+t\underline{v})}_{\downarrow\, t\to 0 \;\; 0}$$

$\circ !$

Pl $f(x,y) = x^2y + \mathrm{sh}(2x+y)$ $P_0(0,0)$ -beli iránymenti deriváltja a $\underline{d} = \underline{i} + 2\underline{j}$ iránnyal párhuzamosan?

$$\|\underline{d}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} := \frac{\underline{d}}{\|\underline{d}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rightsquigarrow \|\underline{v}\| = 1$$

$$f'_x(x,y) = 2xy + \mathrm{ch}(2x+y)\cdot 2 \rightsquigarrow f'_x(0,0) = 2\cdot \underbrace{\mathrm{ch}\, 0}_{1} = 2$$

$$f'_y(x,y) = x^2 + \mathrm{ch}(2x+y) \rightsquigarrow f'_y(0,0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(0,0) = \mathrm{grad}\, f(0,0) = (2,1)$$

$$f'_{\underline{v}}(0,0) = \langle \mathrm{grad}\, f(0,0), \underline{v}\rangle = \left\langle (2,1), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{5}}}}$$

Megj (1) ha $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}\| = 1$

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \langle \mathrm{grad}\, f(\underline{a}), \underline{v}\rangle = \|\mathrm{grad}\, f(\underline{a})\|\cdot \overbrace{\|\underline{v}\|}^{1}\cdot \cos\varphi \;\; (=)$$

φ: $\mathrm{grad}\, f(\underline{a})$ és $\underline{v}$ által bezárt szög

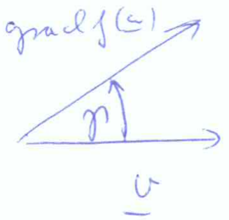
$\uparrow$

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot \cos\alpha$$

$\alpha := \measuredangle(\underline{x}, \underline{y})$ $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok által bezárt szög

125)

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \cos\gamma$$



$$-1 \le \cos\gamma \le 1$$

- Egy rögzített $\underline{a}$ pontban milyen $\underline{v}$ irányban nő a legmeredekebben a felület?

$$\max_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \Leftrightarrow \cos\gamma = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) \parallel \underline{v}$$

↳ a legmeredekebben a $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ iránnyal párhuzamosan nő a felület

⇝ $\operatorname{grad} f(\underline{a})$: legnagyobb növekedés iránya

- Egy rögzített $\underline{a}$ pontban milyen $\underline{v}$ irányban süllyed a legmeredekebben a felület?

$$\min_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = -\|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \Leftrightarrow \cos\gamma = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma = \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) \uparrow\downarrow \underline{v}$$

(antiparalel vektorok)

↳ legmeredekebb süllyedés iránya: $-\operatorname{grad} f(\underline{a})$

Pl) $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ milyen irányban nő a legmeredekebben a felület a $P_0(1,-1)$ pontban?

$$f'_x(x,y)=2x-y \rightsquigarrow f'_x(1,-1)=2-(-1)=3$$

$$f'_y(x,y)=-x+2y \rightsquigarrow f'_y(1,-1)=-1+2\cdot(-1)=-3$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(1,-1)=(3,-3)$$

$$\Downarrow$$

$\underline{v} \parallel (3,-3)$ irányban nő a leggyorsabban a felület

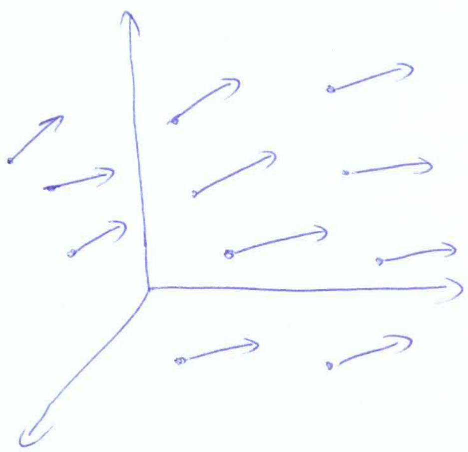
ebben az irányban a meredekség: $\|\operatorname{grad} f(1,-1)\| = \|(3,-3)\| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$!

Megj: példa alkalmazásra:

$P=P(x,y,z)$ nyomás az (x,y,z) pontban

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{grad} P(x,y,z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right) \rightsquigarrow \text{iránymező}$$



a nyilak irányában nő a leggyorsabban a nyomás

$\Downarrow$

a nyilakat megfordítva

$\Downarrow$

szélirányok

127/

TÉTEL (Lagrange-féle középértéktétel)

Legyen f diff.ható az $[\underline{a}, \underline{b}]$ szakaszon pontjaiban, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Ekkor

(i) az $F(t) := f(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})) \quad t \in [0,1]$

$F : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény deriválható $[0,1]$-en és

$$F'(t) = \langle f'(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})), \underline{b} - \underline{a} \rangle \quad \forall t \in [0,1]$$

(ii) $\exists$ $\underline{c} \in [\underline{a}, \underline{b}]$ pont, melyre

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \langle f'(\underline{c}), \underline{b} - \underline{a} \rangle$$

Biz $t_0 \in [0,1]$ tetsz., $\underline{v} := \underline{b} - \underline{a}$

$\hookrightarrow$ $t \mapsto f(\underbrace{\underline{a} + t_0(\underline{b} - \underline{a})}_{\text{fix}} + t(\underline{b} - \underline{a})) = f(\underline{a} + (t_0 + t)(\underline{b} - \underline{a}))$

deriválható $t = 0$-ban

és a deriváltja: $\langle f'(\underline{a} + t_0(\underline{b} - \underline{a})), \underline{b} - \underline{a} \rangle$

$\Downarrow$

$$F'(t_0) = \langle f'(\underline{a} + t_0(\underline{b} - \underline{a})), \underline{b} - \underline{a} \rangle \Rightarrow \text{i)} \checkmark$$

Alkalmazzuk az 1-változós Lagrange-féle középértéktételt F-re:

$\exists$ $u \in [0,1]$, melyre $F(1) - F(0) = F'(u)$

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = f(\underline{a}) \\ F(1) = f(\underline{b}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \langle f'(\underline{c}), \underline{b} - \underline{a} \rangle, \text{ ahol}$$

$\underline{c} = \underline{a} + u(\underline{b} - \underline{a})$ $\circ$!

128)

Összetett függvények diffhatósága

Példák

1. $f(x,y)=3xy$, $x=\sin(u+v)$, $y=\cos(u+v)$

$f'_u=?$, $f'_v=?$

$f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$f'_x(x,y)=3y$, $f'_y(x,y)=3x$

$f'_y(x(u,v),y(u,v))=3\sin(u+v)$

$f'_x(x(u,v),y(u,v))=3\cos(u+v)$

$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos(u+v)$, $\frac{\partial y}{\partial u}=-\sin(u+v)$

$$\Rightarrow f'_u=3\cos(u+v)\cdot\cos(u+v)+3\sin(u+v)(-\sin(u+v))=$$

$$=3\cos^2(u+v)-3\sin^2(u+v)=3\cos 2(u+v)$$

$\frac{\partial x}{\partial v}=\cos(u+v)$, $\frac{\partial y}{\partial v}=-\sin(u+v)$

$$\Rightarrow f'_v=3\cos 2(u+v)$$

125/

(2)

$f(x,y,z) = xyz \quad , x = \ln(u+v) , y = u^2+3v , z = 2uv$

$f'_u = ? \quad , f'_v = ?$

$f'_u(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$

$f'_v(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$

$f'_x(x,y,z) = yz \quad , f'_y(x,y,z) = xy \quad , f'_z(x,y,z) = xy$

$x'_u = \frac{1}{u+v} \quad , y'_u = 2u \quad , z'_u = 2v$

$x'_v = \frac{1}{u+v} \quad , y'_v = 3 \quad , z'_v = 2u$

$\Rightarrow f'_u = (u^2+3v) \cdot 2uv \cdot \frac{1}{u+v} + \ln(u+v)(u^2+3v) \cdot 2u + \ln(u+v) \cdot (u^2+3v) \cdot 2v$

$f'_v = (u^2+3v) \cdot 2uv \cdot \frac{1}{u+v} + \ln(u+v)(u^2+3v) \cdot 3 + \ln(u+v)(u^3+3v) \cdot 2u$

(3) $f(x,y) = \ln(xy) \quad , x = \operatorname{tg} t \quad , y = \sqrt{t}$

$\rightsquigarrow f(x(t), y(t)) \quad \Rightarrow \frac{df}{dt} = ?$

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} \quad , \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}$

$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad , y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{1}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sin t \cdot \cos t} + \frac{1}{2t}$

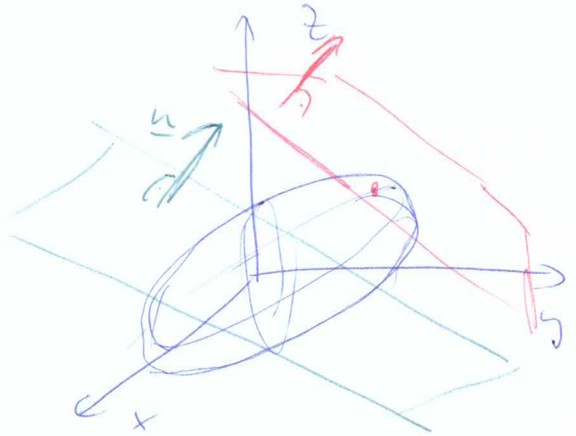
130/

(4.) Határozzuk meg az $x^2+3y^2+2z^2=9$ felületnek a $2x+3y+2z=0$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

felület:
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{\frac{9}{2}}=1$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=1 \longrightarrow \text{ellipszoid}$$

$3,\ \sqrt{3},\ \frac{3}{\sqrt{2}}$ féltengelyekkel



$2x+3y+2z=0$

$\Downarrow$

$\underline{n}=(2,3,2)$ normálvektorú origón átmenő sík

emL. ha $z=f(x,y) \sim (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ -beli érintősík
$$f(x_0,y_0) = z_0$$

$$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

vagy $z=f(x,y)$ miatt:

$$z=z_0+z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\hookrightarrow$ $\operatorname{grad} f = \left(z'_x(x_0,y_0),\ z'_y(x_0,y_0),\ -1\right)$

$\Uparrow$

érintősík normálvektora

131)

Itt a fv implicit módon van megadva:

$$F(x, y, z(x,y)) = 0$$

↳ ebből kellene z'_x-t és z'_y-t meghatározni.

⇒ • deriváljunk parciálisan x szerint:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

↳ $$\boxed{z'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

• deriváljunk parciálisan y szerint:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

↳ $$\boxed{z'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

itt: $$F(x,y,z(x,y)) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 9 = 0$$

↳ $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 4z$

132)

$$\Rightarrow \quad z'_x(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{4z} = -\frac{x}{2z}$$

$$z'_y(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6y}{4z} = -\frac{3y}{2z}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y,z(x,y)) = \left(-\frac{x}{2z}, -\frac{3y}{2z}, -1\right)$$

Mikor lesz ez párhuzamos az adott $\underline{n} = (\cancel{2},3,2)$ normálvektorral?

$$\operatorname{grad} f \parallel \underline{n} \iff \exists\, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \quad \operatorname{grad} f = c \cdot \underline{n}$$

$$\hookrightarrow \quad \left(-\frac{x}{2z}, -\frac{3y}{2z}, -1\right) = (2c, 3c, 2c)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{x}{2z} &= 2c \\ -\frac{3y}{2z} &= 3c \\ -1 &= 2c \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}, \ \boxed{x = 2z, \quad y = z}$$

+ rajta kell lennünk a felületen:

$$F(2z, z, z) = 0$$

$$(2z)^2 + 3z^2 + 2z^2 = 9 \Rightarrow 9z^2 = 9 \Rightarrow z^2 = 1$$

$$\hookrightarrow z = \pm 1 \quad \Rightarrow x = \pm 2, \ y = \pm 1 \quad \Rightarrow P_1(1,2,1), \ P_2(-1,-2,-1)$$

pontbeli érintősíkok jók

P_1-ben: $\operatorname{grad} f(P_1) = (\cancel{\tfrac{1}{2}}, \cancel{\tfrac{3}{2}}), (-1, -\frac{3}{2}, -1) \Rightarrow z = 1 - 1(x-1) - \frac{3}{2}(y-2)$

$\hookrightarrow \cancel{-(x)}$

P_2-ben: $\operatorname{grad} f(P_2) = (-1, -\frac{3}{2}, -1) \Rightarrow z = -1 - 1(x+1) - \frac{3}{2}(y+2)$!