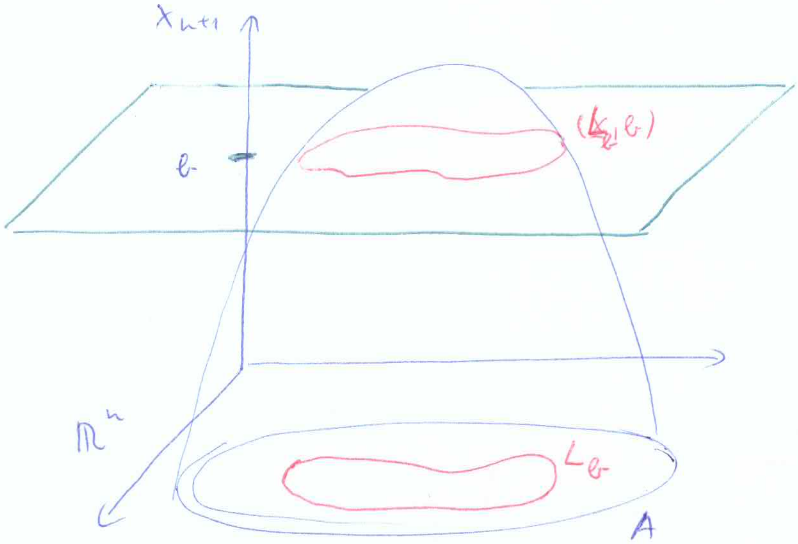
Vizualizáció felületek szemléltetésére

Eml.:

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$

$$L_b := \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = b \} \quad b \in \mathbb{R}$$

f függvény $b \in \mathbb{R}$-hez tartozó szinthalmaza A-n



Példák 1) ~~szintfelületek~~ szintvonalak a térképen

2) izotermák = egyenlő (azonos) hőmérsékleti felületek

izobárok = —||— nyomású felületek

3) közgazdaságtan

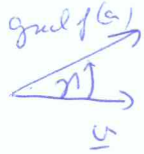
indifferens görbék = hasznossági függvény szintvonalai

izokvantok = termelékenységi függvény szinthalmazai

134)

Eml. $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, f diffható $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}\| = 1$

↳ $f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle = \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \cos\gamma$

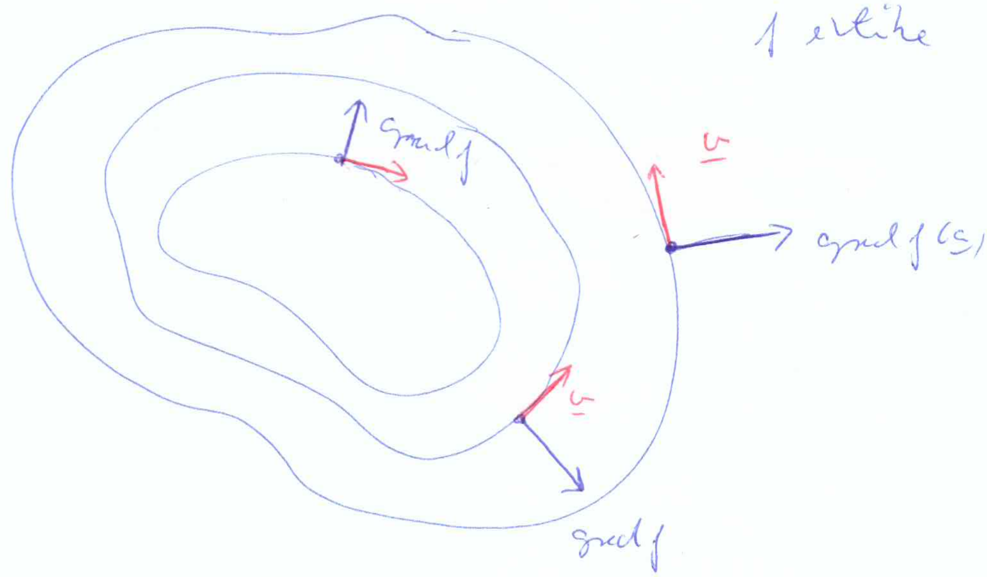


$\Rightarrow$ $f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = 0 \iff \gamma = \frac{\pi}{2}$, vagyis $\operatorname{grad} f(\underline{a}) \perp \underline{v}$

$\Downarrow$

ezen $\underline{v}$ irányában nem változik a fv értéke

pl. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esetén a nívóvonalak $\Rightarrow$ érintő irányban elmozdulva rajtuk nem változik f értéke



Köv. grad f mindig merőleges a nívófelületekre (nívóhalmazokra)

<u>Megj:</u> $\forall$ függvény gráfja tekinthető egy másik függvény nívóhalmazának:

$n>1$ $\quad A_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $f: A_0 \to \mathbb{R}$

$A := A_0 \times R$, $g: A \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) := f(x_1, \dots x_{n-1}) - x_n$

$\Downarrow$

f gráfja g 0-hoz tartozó nívóhalmaza:

$$\operatorname{graph}(f) = \Gamma(f) = \{ \underline{x} \in A_0 \times \mathbb{R} : x_n = f(x_1 \dots, x_{n-1}) \} =$$

$$= \{ \underline{x} \in A : g(\underline{x}) = 0 \}$$

<u>Pl.</u> $f(x,y) = 9 - x^2 - 2y^2$ a $g(x,y,z) = 9 - x^2 - 2y^2 - z$ felület 0-hoz tartozó nívóhalmaza.

<u>Alkalmazás:</u> implicit módon megadott felületek érintősíkjai könnyen megkaphatók, ha nívófelületként tekintünk rájuk:

<u>Pl.:</u> $H: x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloid

$P(2\sqrt{2}, 3, 4)$ a felületen van $\left((2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 4^2 = 1 \right)$

Adjuk meg a P-beli érintősík egyenletét!

$\hookrightarrow$ $g(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 \implies$ a H hiperboloid $= g$ 1-hez tartozó nívófelülete

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial g}{\partial z} = -2z$ folytonosak

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$

$\operatorname{grad} g(2\sqrt{2}, 3, 4) = (4\sqrt{2}, 6, -8)$

$\hookrightarrow$ H érintősíkja P-ben:

$$\langle \operatorname{grad} g(P), (x-2\sqrt{2}, y-3, z-4) \rangle = 0$$

$$\boxed{4\sqrt{2}(x-2\sqrt{2}) + 6(y-3) - 8(z-4) = 0}$$

Megj: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{grad} f(\underline{a})$ megadja az irányt, ami felé elmozdulva f a leggyorsabban nő

Ha $\operatorname{grad} f(\underline{x})$ folytonos, tekintsük azt a görbét, melynek minden pontjában grad f az érintő (ezt még pontosítjuk majd!)

$\Downarrow$

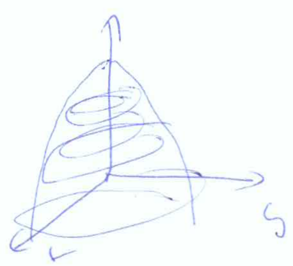
az így kapott görbék: integrálgörbék

$\Downarrow$

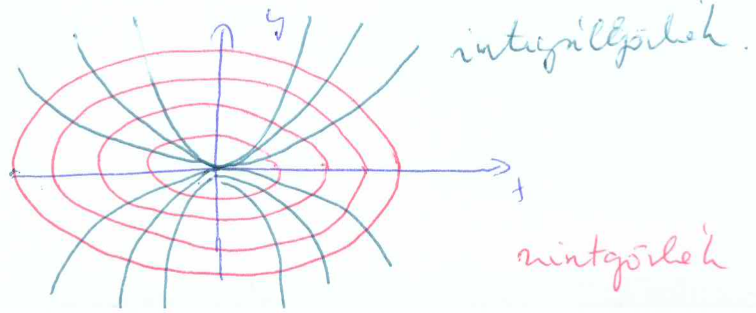
mindig merőlegesen metszik a szinthalmazokat

Pl: $f(x,y) = 9 - x^2 - 2y^2$

ell. paraboloid



$\Rightarrow$



137/

Kitérő: Bachmann–Landau jelölés

Def. Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben az origó kp-ú, ε sugarú egységgömböt: $B(\underline{0}, \varepsilon)$

$$\varphi : \overset{B(\underline{0},\varepsilon)}{\cancel{\mathbb{R}^n}} \to \mathbb{R}^m \quad \text{vektor-vektor fv.}$$

- $\varphi \sim o(1)$ nagyságrendű (kis ordó 1), ha

  $\forall\, c > 0$ esetén $\|\varphi(\underline{h})\| \leq c$, ha $\|\underline{h}\|$ elég kicsi

- $\varphi \sim O(h)$ nagyságrendű (nagy ordó h) $\equiv$ $\underline{h}$ nagyságrendű,

  ha $\exists\, c > 0$, hogy $\|\varphi(\underline{h})\| \leq c \cdot \|\underline{h}\|$, ha $\|\underline{h}\|$ elég kicsi

- $\varphi \sim o(\underline{h})$ nagyságrendű (kis ordó h) $\equiv$ $\underline{h}$-nál kisebb nagyságrendű, ha

  $\forall\, c > 0$ esetén $\|\varphi(\underline{h})\| \leq c\|\underline{h}\|$, ha $\|\underline{h}\|$ elég kicsi.

Megj.
- $\varphi \sim o(1) \iff \lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \|\underline{\varphi}(\underline{h})\| = 0$

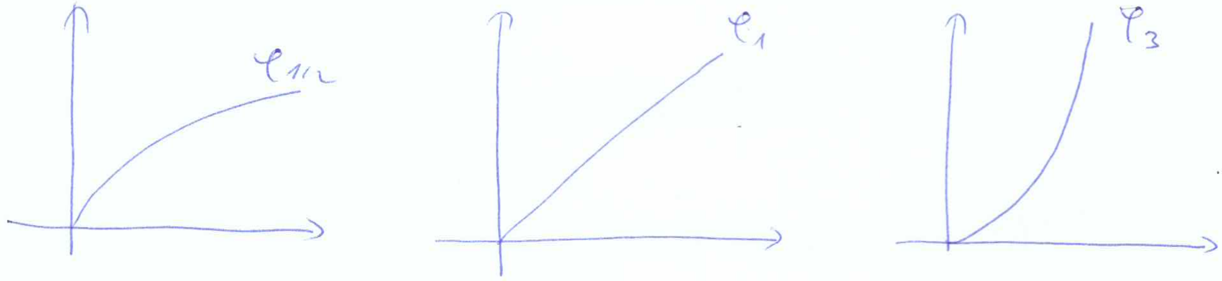
- $\varphi \sim O(\underline{h}) \iff \dfrac{\|\varphi(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}$ korlátos

- $\varphi \sim o(\underline{h}) \iff \lim\limits_{\underline{h}\to 0} \dfrac{\|\varphi(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = 0$

- $o(\underline{h}) \subset O(\underline{h}) \subset o(1)$

<u>Példa</u> $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_\alpha(x) := |x|^\alpha \quad \alpha \geq 0$

- $\varphi_\alpha \sim o(1)$, ha $\alpha > 0$
- $\varphi_\alpha \sim O(h)$, ha $\alpha \geq 1$
- $\varphi_\alpha \sim o(h)$, ha $\alpha > 1$



<u>Megj.</u> A Bachman-Landau szimbólumok valós vektorteret alkotnak:

$$o(1)+o(1)=o(1) \qquad \mathbb{R}\,o(1)=o(1)$$
$$O(h)+O(h)=O(h) \qquad \mathbb{R}\cdot O(h)=O(h)$$
$$o(h)+o(h)=o(h) \qquad \mathbb{R}\,o(h)=o(h)$$

- $\left.\begin{array}{l} \varphi \sim o(1) \\ \psi \sim O(h) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi\cdot\psi \sim o(h)$

13gy)

Magasabbrendű deriváltak

Példa 1| $f(x,y) = x^3y^2 + xe^y$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv f'_x(x,y) \equiv \partial_x f(x,y) \equiv D_1 f(x,y) = 3x^2y^2 + e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv f'_y(x,y) \equiv \partial_y f(x,y) \equiv D_2 f(x,y) = 2x^3y + xe^y$$

$\Longrightarrow$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x,y) \equiv \partial_x \partial_x f(x,y) = D_1 D_1 f(x,y) = D_{11} f(x,y) = 6xy^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y) = D_{21} f(x,y) = 6x^2y + e^y$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x,y) = \partial_x \partial_y f(x,y) = D_1 D_2 f(x,y) = D_{12} f(x,y) = 6x^2y + e^y$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x,y) = \partial_y \partial_y f(x,y) = D_2 D_2 f(x,y) = D_{22} f(x,y) = 2x^3 + xe^y$

látható, hogy $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad$ a vegyes parciális deriváltak megegyeznek

$\Downarrow$

igaz-e általában?

Példa 2|

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

150)

$(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f'_x(x,y) = \dfrac{(3x^2-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$\uparrow$$

$$f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

$(x,y)=(0,0)$ $\quad f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

Vizsgáljuk meg $f''_{yx}(0,0)$-t

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

$$\uparrow$$

$$f'_x(0,h) = \frac{-h^3\cdot h^2}{(h^2)^2} = -h$$

$(x,y)\neq(0,0)$ $\quad f'_y(x,y) = \dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$

$(x,y) = (0,0)$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\uparrow$$

$$f'_y(h,0) = \frac{h^3\cdot h^2}{h^4} = h$$

$\Rightarrow$ $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$)

141/

TÉTEL (Young–Schwarz tétel)

Ha $f(x,y)$ függvény $D_1 f(x,y)$ és $D_2 f(x,y)$ parciális deriváltjai léteznek $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ egy környezetében és differenciálhatók (a,b)-ben, akkor

$$D_{12} f(a,b) = D_{21} f(a,b)$$

($\Leftarrow$ f kétszer deriválható (a,b)-ben)

Biz

akkor az esetben bizonyítunk, ha $f\in C^2$ (azaz kétszer folytonosan deriválható)

$$D_{12} f(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{D_1 f(a,b+k) - D_1 f(a,b)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}$$

hasonlóan:

$$D_{21} f(a,b) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)}{h\cdot k}$$

142/

$$\Delta(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - f(a+h,b) + f(a,b)$$

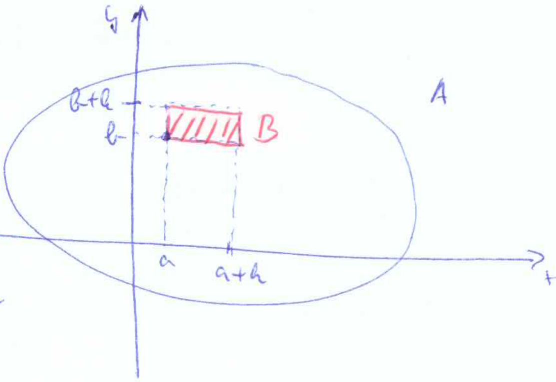
azt szeretnénk belátni, hogy:

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{h\cdot k} = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{h\cdot k}$$

vagyis, hogy a limeszek felcserélhetők legyenek.

$f\in C^2(A)$, $A\subset \mathbb{R}^2$, $(a,b)\in \mathring{A} = \operatorname{int} A$

$B := [a,a+h]\times[b,b+k]\subset A$ valamely h,k-ra



$$\int_a^{a+h}\Bigg[\underbrace{\int_b^{b+k} dy}_{[y]_b^{b+k}=k}\Bigg]dx = \int_a^{a+h} k\,dx = k[x]_a^{a+h} = k\cdot h$$

$$\int_a^{a+h}\Bigg[\underbrace{\int_b^{b+k} D_{12}f(x,y)\,dy}\Bigg]dx = \int_a^{a+h}\big(D_1 f(x,b+k) - D_1 f(x,b)\big)\,dx \;=$$

$$\int_b^{b+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)dy = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]_{y=b}^{b+k} = D_1 f(x,b+k) - D_1 f(x,b)$$

$$= \Big[f(x,b+k) - f(x,b)\Big]_{x=a}^{a+h} = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) =$$

$$= \Delta(h,k)$$

153/

$$m_{h,k} := \min_{(x,y)\in B} D_{12} f(x,y)$$

$$M_{h,k} := \max_{(x,y)\in B} D_{12} f(x,y)$$

$B \neq \emptyset$ kompakt $+$ $f \in C^2 \Rightarrow D_{12} f$ folytonos A-n, így B-n is

Weierstrass $\hookrightarrow$

$$m_{h,k} \leq D_{12} f(x,y) \leq M_{h,k} \qquad \forall (x,y) \in B$$

$$\hookrightarrow \int_a^{a+h}\left(\int_b^{b+k} m_{h,k}\, dy\right)dx \leq \int_a^{a+h}\left(\int_b^{b+k} D_{12} f(x,y)\, dy\right)dx \leq \int_a^{a+h}\left(\int_b^{b+k} M_{h,k}\, dy\right)dx$$

$$m_{h,k} \cdot h \cdot k \leq \Delta(h,k) \leq M_{h,k} \cdot h \cdot k$$

$$\hookrightarrow \quad m_{h,k} \leq \frac{\Delta(h,k)}{h \cdot k} \leq M_{h,k}$$

$+$ láttuk: $\quad m_{h,k} \leq D_{12} f(x,y) \leq M_{h,k}$

ha $(h,k) \to (0+,0+) \Rightarrow m_{h,k} \to D_{12} f(a,b)$

$M_{h,k} \to D_{12} f(a,b)$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{(h,k)\to(0+,0+)} \frac{\Delta(h,k)}{h \cdot k} = D_{12} f(a,b)}$$

Megcserélve az integrálok sorrendjét, teljesen hasonlóan:

$$\int_b^{b+k}\left(\int_a^{a+h} dx\right)dy = h\cdot k$$

$$\int_b^{b+k}\left(\int_a^{a+h} D_{21} f(x,y)\,dx\right)dy = \Delta(h,k)$$

és hasonlóan a fentiekhez:

$$\lim_{(h,k)\to(0+,0+)} \frac{\Delta(h,k)}{h\cdot k} = D_{21} f(a,b)$$

$$\Rightarrow \qquad D_{12} f(a,b) = D_{21} f(a,b)$$

∘ !

Általánosítás több változóra:

Def. $A\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: A\to\mathbb{R}$ n-változós függvény.

Ha $\forall\, \underline{x}\in A$ pontban f differenciálható, a deriváltvektora

$$f'(\underline{x}) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{x}) = (\partial_1 f(\underline{x}), \partial_2 f(\underline{x}),\dots,\partial_n f(\underline{x}))$$

és $f'(\underline{x})$ vektor minden komponense (∀ parciális deriváltfüggvénye) deriválható $\underline{a}\in A$-ban, akkor f _kétszer deriválható_ $\underline{a}$-ban.

A _másodrendű parciális deriváltjai_:

$$D_{ij} f(\underline{x}) \equiv \partial_j(\partial_i f(\underline{x})) \equiv f''_{x_i x_j}(\underline{x}) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})\right)$$

145/

Ha f A $\forall$ pontjában kétszer deriválható, akkor az

$$f''(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\underline{x}), & \partial_2\partial_1 f(\underline{x}) & \dots & \partial_n\partial_1 f(\underline{x}) \\ \partial_1\partial_2 f(\underline{x}) & \partial_2\partial_2 f(\underline{x}) & \dots & \partial_n\partial_2 f(\underline{x}) \\ \vdots & & & \\ \partial_1\partial_n f(\underline{x}) & \dots & \dots & \partial_n\partial_n f(\underline{x}) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} D_{11} f(\underline{x}) & \dots & D_{1n} f(\underline{x}) \\ \vdots & & \\ D_{n1} f(\underline{x}) & \dots & D_{nn} f(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrixot f <u>másodrendű derivált mátrixának</u> hívjuk

(<u>Hesse-mátrix</u>).

<u>TÉTEL</u> (Young–Schwarz tétel)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: A \to \mathbb{R}$ n-változós függvény.

Ha f kétszer deriválható $\underline{a} \in A$-ban, akkor

$$\partial_i \partial_j f(\underline{a}) = \partial_j \partial_i f(\underline{a}) \qquad \forall\, i,j = 1,\dots,n$$

<u>Biz:</u> ugyanígy mint $n=2$-ben!

<u>Köv:</u> Ha f kétszer deriválható $\underline{a} \in A$-ban, akkor

az $f''(\underline{a})$ Hesse-mátrix szimmetrikus:

$$\left[f''(\underline{a})\right]^T = f''(\underline{a})$$

Megj. $f''(\underline{x}) \neq (f'(\underline{x}))'$

mert $f'(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$ vektor (általában megfogalmazható $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények esetén)

$(f'(\underline{x}))'$: Jacobi-mátrix

látjuk majd: $(f'(\underline{x})^T)' = f''(\underline{x})$

Példa. $f(x,y) = \sin^2 x + x^2 y + y^2$

$f'_x(x,y) = 2\sin x \cos x + 2xy = \sin 2x + 2xy$

$f'_y(x,y) = x^2 + 2y$

↳ $f'(\underline{x}) = \operatorname{grad} f(\underline{x}) = (\sin 2x + 2xy, x^2 + 2y)$

$f''_{xx}(x,y) = 2\cos 2x + 2y$ $\qquad f''_{xy}(x,y) = 2x$

$f''_{yx}(x,y) = 2x$ $\qquad f''_{yy}(x,y) = 2$

↳ $$f''(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

Magasabbrendű parciális deriváltak

Pl. $f(x,y) = x^2y^3 + xe^y$

$f'_x(x,y) = 2xy^3 + e^y \qquad f'_y(x,y) = 3x^2y^2 + xe^y$

másodrendűek:

$f'_x(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f''_{xx}(x,y) = 2y^3$

$f'_x(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f''_{xy}(x,y) = 6xy^2 + e^y$

$f''_{xx}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f'''_{xxx}(x,y) = 0$

$f''_{xx}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f'''_{xxy}(x,y) = 6y^2$

$f''_{xy}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f'''_{xyx}(x,y) = 6y^2$

$f''_{xy}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f'''_{xyy}(x,y) = 12xy + e^y$

$f'_y(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f''_{yx}(x,y) = 6xy^2 + e^y$

$f'_y(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f''_{yy}(x,y) = 6x^2y + xe^y$

$f''_{yx}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f'''_{yxx}(x,y) = 6y^2$

$f''_{yx}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f'''_{yxy}(x,y) = 12xy + e^y$

$f''_{yy}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f'''_{yyx}(x,y) = 12xy + e^y$

$f''_{yy}(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f'''_{yyy}(x,y) = 6x^2 + xe^y$

harmadrendűek

stb.

148)

<u>Általános jelölés:</u>

$$\partial_j^0 := f$$

$\underline{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ indexvektor

$|\underline{i}| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ indexvektor hossza (nem mint $\mathbb{R}^n$-beli vektor!)

$A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : A \to \mathbb{R}$

az f fv $\underline{i}$ indexvektorhoz tartozó parciális deriváltja:

$$\partial^{\underline{i}} f(x_1, \ldots, x_n) = \partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \ldots \partial_n^{i_n} f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{\partial^{|\underline{i}|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}} f$$

<u>Def</u>: Tfh már definiáltuk a k-szoros diffhatóság fogalmát ($k = 1, 2$-ben megtettük). Azt mondjuk, hogy f $k+1$-szer differenciálható $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben, ha f k-szor diffható $\underline{a}$ egy környezetében és f minden k-adrendű parciális deriváltja deriválható $\underline{a}$-ban.