Példa e^{x+y} folytonos $[0,1]\times[0,1]$-en $\Rightarrow$ integrálható

$\hookrightarrow$
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}\,\underbrace{dx\,dy}_{\substack{\parallel \\ dT}} = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^1 e^{x+y}\,dy}_{\left[e^{x+y}\right]_{y=0}^{1} = e^{x+1}-e^x = e^x(e-1)} \Big]\,dx = (e-1)\int_0^1 e^x\,dx = (e-1)\left[e^x\right]_0^1 =$$
$$= (e-1)^2.$$

Természetesen (a szimmetria miatt is), ugyanazt kapjuk, ha
$$\int_0^1 \Big[\int_0^1 e^{x+y}\,dx \Big]\,dy\text{-t}$$
számoljuk.

Megj ① Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ integrálhatóak és

$$h(x,y) := f(x)\cdot g(y)\,,\quad h:\underbrace{[a,b]\times[c,d]}_{\substack{\parallel \\ T}}\to\mathbb{R}$$

$$\int_T h\,dx\,dy = \int_a^b\Big[\int_c^d h(x,y)\,dy\Big]\,dx = \int_a^b\Big[\int_c^d f(x)g(y)\,dy\Big]\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\Big[\int_c^d g(y)\,dy\Big]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

pl: előbb $e^{x+y} = e^x\cdot e^y$

$\hookrightarrow$
$$\int_{T=[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 e^x\,dx\cdot\int_0^1 e^y\,dy = (e-1)^2$$

② Fubini-tétel megfogalmazása szekció függvényekkel:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p \\ \underline{y} &= (y_1,\dots,y_q) \in \mathbb{R}^q \end{aligned}\right\} \quad (\underline{x},\underline{y}) = (x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

$A \subset \mathbb{R}^p$

$\qquad\qquad f: A \times B \to \mathbb{R}$

$B \subset \mathbb{R}^q$

Def. f szekció függvényei

- $f_{\underline{x}} : B \to \mathbb{R} \quad \forall\, \underline{x} \in A$ rögzített

  $f_{\underline{x}}(\underline{y}) := f(\underline{x},\underline{y})$

- $f^{\underline{y}} : A \to \mathbb{R} \quad \forall\, \underline{y} \in B$ rögzített

  $f^{\underline{y}}(\underline{x}) = f(\underline{x},\underline{y})$

Fubini-tétel: $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ téglák, $f: A \times B \to \mathbb{R}$ int.ható. Ekkor

$$\text{i)} \quad \left.\begin{aligned} &\underline{y} \longmapsto \overline{\int_A} f^{\underline{y}}\, d\underline{x} \quad \text{felső integrál} \\ &\underline{y} \longmapsto \underline{\int_A} f^{\underline{y}}\, d\underline{x} \quad \text{alsó integrál} \end{aligned}\right\} \quad \text{integrálhatók } B\text{-n}$$

$$\text{ii)} \quad \int_{A\times B} f\, d\underline{x}\, d\underline{y} = \int_B \left(\overline{\int_A} f^{\underline{y}}\, d\underline{x} \right) d\underline{y} = \int_B \left(\underline{\int_A} f^{\underline{y}}\, d\underline{x} \right) d\underline{y}$$

307/

ii)

$\underline{x} \longmapsto \overline{\int_B} f_{\underline{x}}\, dy$ felső integrál

$\underline{x} \longmapsto \underline{\int_B} f_{\underline{x}}\, dy$ alsó integrál

$\Bigg\}$ integrálható A-n és

$$\int_{A\times B} f\, d\underline{x}\, dy = \int_A \left(\overline{\int_B} f_{\underline{x}}\, dy \right) d\underline{x} = \int_A \left(\underline{\int_B} f_{\underline{x}}\, dy \right) d\underline{x} .$$

$\rightsquigarrow$ f integrálhatóságából nem következnek automatikusan

$\int_B f_{\underline{x}}\, dy$ és $\int_A f^y\, dx$ integrálok létezése $\forall y$-ra ill $\forall \underline{x}$-re

(a tételben a felső ill alsó integrálok nem cserélhetők általában le integrálra!)

Pl

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x=0 \text{ és } y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & \text{ha } x=0 \text{ és } y \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in (0,1] \times (0,1] \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x,y)$ nekünk függvénye

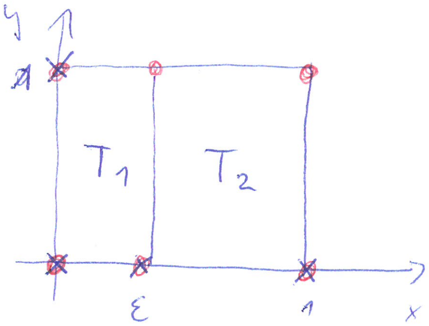
$f_0 \notin R[0,1]$, mert az a Dirichlet-fv, ami nem Riemann-int.ható!

Pe: $f \in R([0,1]\times[0,1])$, ugyanis

308)

$\forall \quad \varepsilon \in (0,1)$-re

$\tau := \{0, \varepsilon, 1\} \times \{0, 1\}$ felosztása $[0,1]\times[0,1]$-nek



$$s_\tau = 0 \cdot V(T_1) + 0 \cdot V(T_2) = 0$$

$$S_\tau = 1 \cdot V(T_1) + 0 \cdot V(T_2) = V(T_1) = \varepsilon$$

↳ oszcillációs összeg:

$$O_\tau = S_\tau - s_\tau = \varepsilon \rightsquigarrow \text{tetszőlegesen kicsi}$$

$$\Downarrow$$

$$f \in R([0,1]\times[0,1])$$

✓!

Nemcsak téglákon szeretnék vizsgálni!

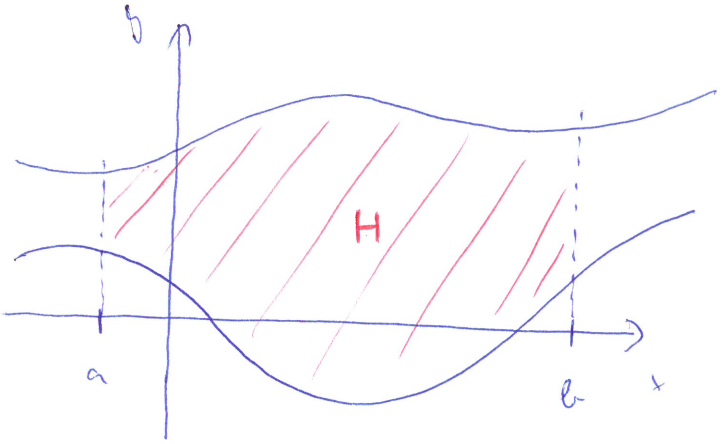
309)

Integrálás normáltartományon

Először csak síkban:

Def.
- $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre
  $\varphi(x) \le \psi(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

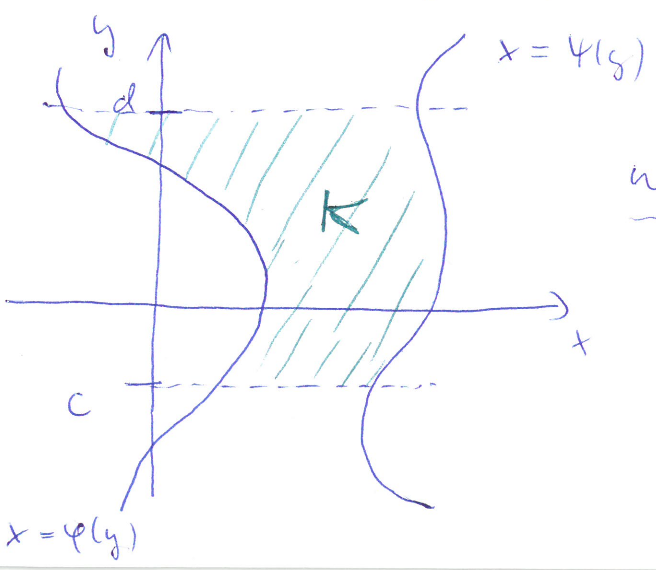
↳ $H := \{(x,y) : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$



normáltartomány az y tengelyre nézve

- $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre
  $\varphi(y) \le \psi(y) \quad \forall\, y \in [c,d]$

↳ $K := \{(x,y) : y \in [c,d],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$



normáltartomány az x tengelyre nézve

Általánosítás

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\underline{x}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

ahol valamely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mellett

$\underline{x} = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = \xi_k \in \mathbb{R}$

$I = I_1 \times I_2$, $I_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tégla , $I_2 = [a, b] \subset \mathbb{R}$

tfh $\varphi, \psi : I_1 \to I_2$, $\varphi(\underline{x}) \le \psi(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \in I_1$

$\hookrightarrow \quad W := \{ (\underline{x}, y) \in I : \underline{x} \in I_1 ,\ \varphi(\underline{x}) \le y \le \psi(\underline{x}) \}$

normáltartomány az x_k tengelye mentén

Hogyan integráljunk egy normáltartományon?

Ötlet: egészítsük ki téglává:

Tfh $W \subset I$ normáltartomány (mint fenn) és

$f : W \to \mathbb{R}$ folytonos ~~⇝ integrálható~~

$$\Rightarrow \quad F(\underline{\xi}) := \begin{cases} f(\underline{\xi}), & \text{ha } \underline{\xi} \in W \\ 0, & \text{ha } \underline{\xi} \in I \setminus W \end{cases}$$

$\hookrightarrow \quad F : I \to \mathbb{R}$

311/

belátható, hogy az így definiált F fv. integrálható I-n

és

$$\int_W f := \int_I F = \int_{I_1} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

<u>TÉTEL</u> (Fubini-tétel normáltartományon -ra)

① $H = \{(x,y) : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

y-menti normáltartomány

$f: H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $\exists \iint_H f$ integrál és

$$\iint_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

② $K := \{(x,y) : y \in [c,d],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$

x tengely menti normáltartomány

$f: K \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $\exists \iint_K f$ integrál és

$$\iint_K f = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

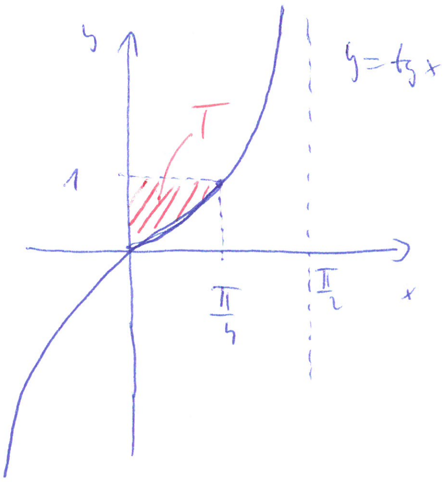
<u>Biz:</u> $H \subset R$ tégla, $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in H \\ 0 & \text{ha } (x,y) \in R \setminus H \end{cases}$

$$\iint_H f = \iint_R \tilde{F} = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{F}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \circ!$$

312/

Példák:

① $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \operatorname{tg} x \le y \le 1\}$



$\Downarrow$

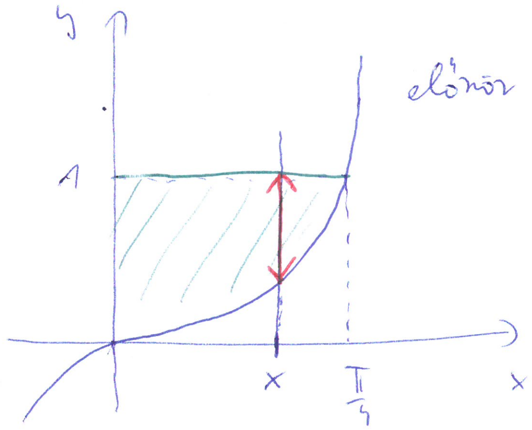
normáltartomány y tengelyre nézve

$f(x,y) := 2y \quad \rightsquigarrow \quad I := \int_T 2y \, dT \equiv \iint_T 2y \, dx\, dy = ?$

$$I = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\left[\int_{\operatorname{tg} x}^{1} 2y \, dy \right]}_{[y^2]_{\operatorname{tg} x}^{1} = 1 - \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} (1 - \operatorname{tg}^2 x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \Big[2 - \underbrace{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}_{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}} \Big] dx =$$

$$= \left[2x - \operatorname{tg} x \right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$



először kiszámoltuk egy „szelet" területét

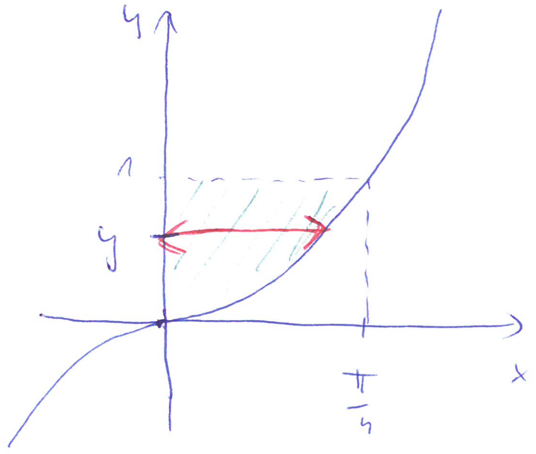
$$\int_{\operatorname{tg} x}^{1} 2y \, dy$$

, majd szelet „összegét":

$$\int_0^{\pi/4} \left[\int_{\operatorname{tg} x}^{1} 2y \, dy \right] dx$$

313/

Vegyük észre, hogy T x tengelyre nézve is normáltartomány!



$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ tg\, x \le y \le 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le arctg\, y \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$T = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le arctg\, y\}$$

$$\begin{array}{c} y = tg\, x \\ x \in [0, \frac{\pi}{4}) \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x = arctg\, y \\ y \in [0,1] \end{array}$$

Ezzel:

$$I = \int_0^1 \underbrace{\left[\int_0^{arctg\, y} 2y \, dx \right]}_{[2xy]_{x=0}^{arctg\, y} = 2y\, arctg\, y} dy = \int_0^1 2y\, arctg\, y \, dy \underset{\text{parc. int}}{=}$$

$u' = 2y \rightsquigarrow u = y^2$

$v = arctg\, y \rightsquigarrow v' = \frac{1}{1+y^2}$

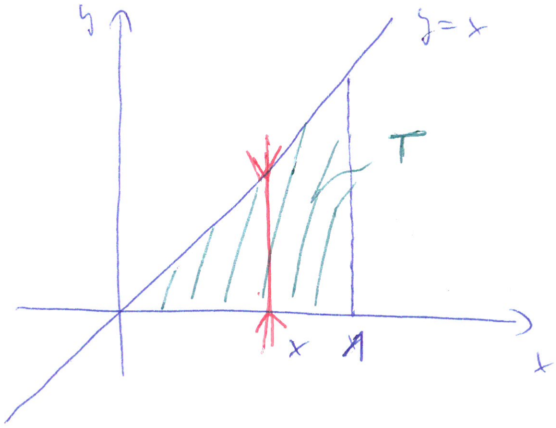
$$= \left[y^2 arctg\, y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy =$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} = \frac{y^2+1-1}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \underbrace{\left[y - arctg\, y \right]_0^1}_{1 - \frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

3 15

(2) $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$



$$I = \iint_T \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$$

- x-szerint nem tudjuk elemi integrállal kiszámolni

$\Downarrow$

ez meghatározza, hogy milyen tengelyre vetítve keressük normáltartományként

$$I = \int_0^1 \Bigg[\underbrace{\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy}_{\left[\frac{\sin x}{x} y\right]_{y=0}^{x} = \sin x} \Bigg] dx \;\stackrel{\circ}{=}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \int_0^1 \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^1 = 1 - \cos 1. \qquad \circ!$$

(3) Alkalmazható egyváltozós integrálokra is!

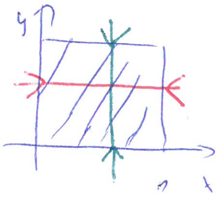
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = ? \qquad \rightsquigarrow \text{elemi úton nem megy}$$

Vegyük észre:

$$\int_0^1 x^y\, dy = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=0}^{1} = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$ $\rightsquigarrow$ éppen ez az integrandus

315

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \Big[\int_0^1 x^y\,dy \Big]\,dx = \int_0^1 \Big[\int_0^1 x^y\,dx \Big]\,dy \;\; \circled{=}$$

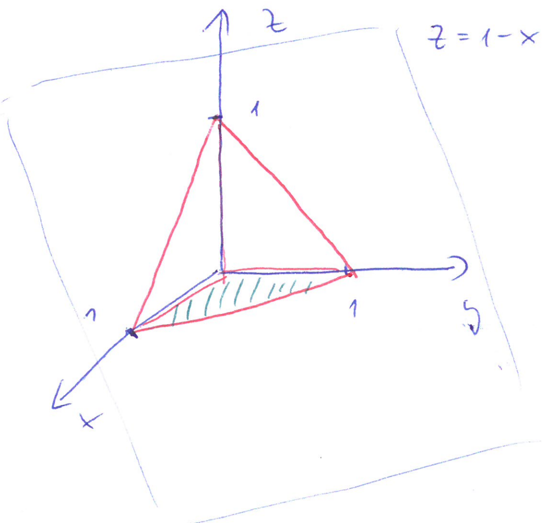
$[0,1]\times[0,1]$ =  normálkový množina [illegible]

$$\circled{=} \int_0^1 \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big]_{x=0}^{1} dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1}\,dy = \Big[\ln|y+1| \Big]_0^1 = \underline{\underline{\ln 2}}$$

$$\| \qquad \frac{1}{y+1} - 0$$

(4) $V := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,y,z \,,\; x+y+z \le 1 \}$: tetraédr

$$I = \int_V (x+y+z)\,dV = \iiint_V (x+y+z)\,dV$$

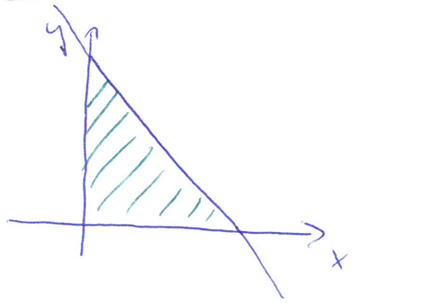


$z = 1-x-y$ [illegible]

$$V: \left.\begin{array}{l} 0 \le z \le 1-x-y \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} \Big[\underbrace{\int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz}_{\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-x-y} = \frac{1-(x+y)^2}{2}} \Big]\,dy \Big]\,dx \;\; \circled{=}$$



$y = 1-x$

3.16

$$\textcircled{=} \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^{1-x} \frac{1-(x+y)^2}{2}\, dy}_{} \Big] dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx \; \boxed{=}$$

$$\left[\frac{y}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} \right]_{y=0}^{1-x} = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

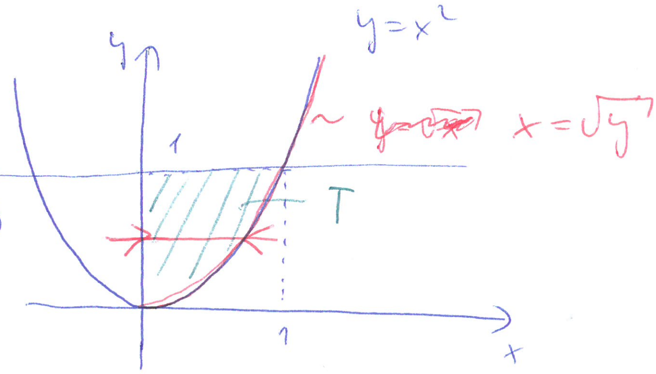
$$\boxed{=} \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}x \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

(5) Előfordul, hogy egy integrált az integrálási sorrend cseréjével tudjuk csak megoldani:

$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 x e^{-y^2}\, dy \right] dx$$ nem tudjuk elemi integrálként kiszámolni

$$\Downarrow$$

$T:$ $\left.\begin{array}{l} x^2 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\}$ normáltartomány x-re



$$\Downarrow$$

$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{array}\right\}$ normáltartomány y-ra

317)

$$I = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^{\sqrt{y}} x e^{-y^2}\, dx}_{\left[\frac{x^2}{2} e^{-y^2}\right]_{x=0}^{\sqrt{y}} = \frac{y}{2} e^{-y^2}} \Big] dy = \int_0^1 \frac{y}{2} e^{-y^2} dy = -\frac{1}{4} \int_0^1 (-2y) e^{-y^2} dy \;=$$

$$\underset{P}{=} -\frac{1}{4} \left[e^{-y^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \left[e^{-1} - 1 \right] = \frac{1 - \frac{1}{e}}{4}$$

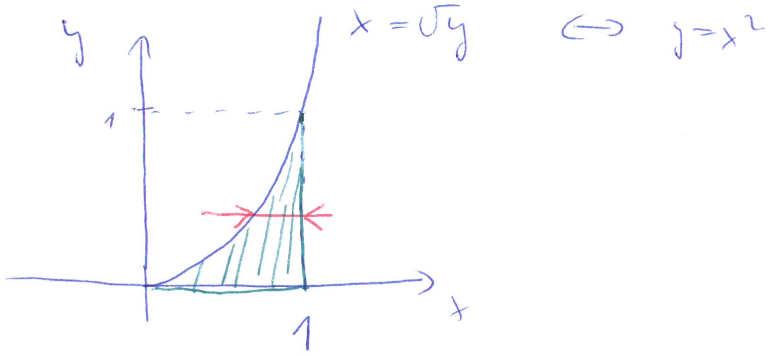
$$\int f' e^f = e^f + c$$

6

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{4+x^3}\, dx\, dy \quad \rightsquigarrow \quad \text{így nem tudjuk kiszámolni}$$

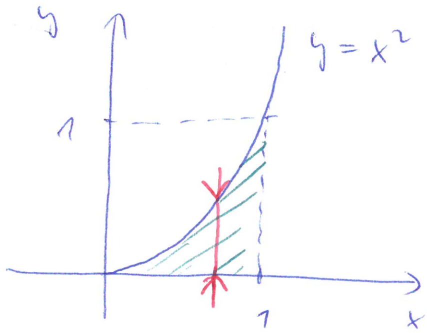
$$T: \left.\begin{aligned} \sqrt{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{aligned}\right\}$$

normáltartomány x-re



$$T: \left.\begin{aligned} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{aligned}\right\}$$

normáltartomány y-ra



$$\hookrightarrow I = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^{x^2} \sqrt{4+x^3}\, dy}_{\left[y\sqrt{4+x^3} \right]_{y=0}^{x^2} = x^2 \sqrt{4+x^3}} \Big] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 (4+x^3)^{1/2} dx \underset{P}{=} \frac{1}{3} \left[\frac{(4+x^3)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \;=$$

$$\int f' \cdot f^{\alpha} = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad = \frac{2}{9}\left(5^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

318)

(7) Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

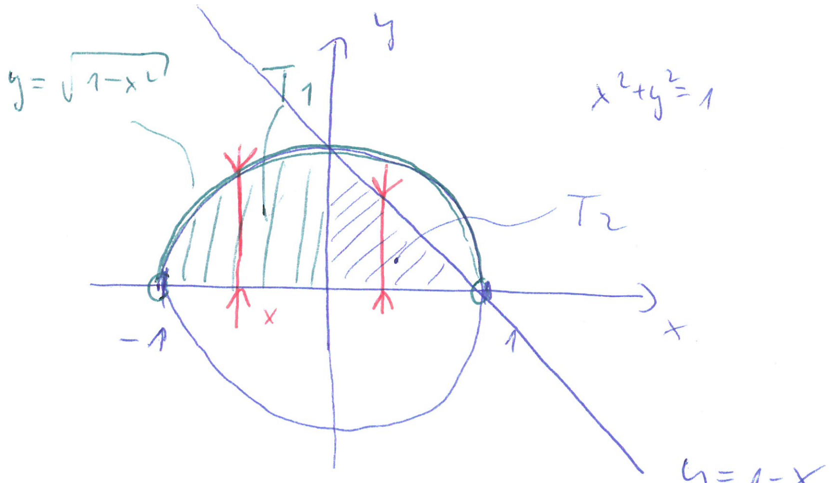
$$I = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

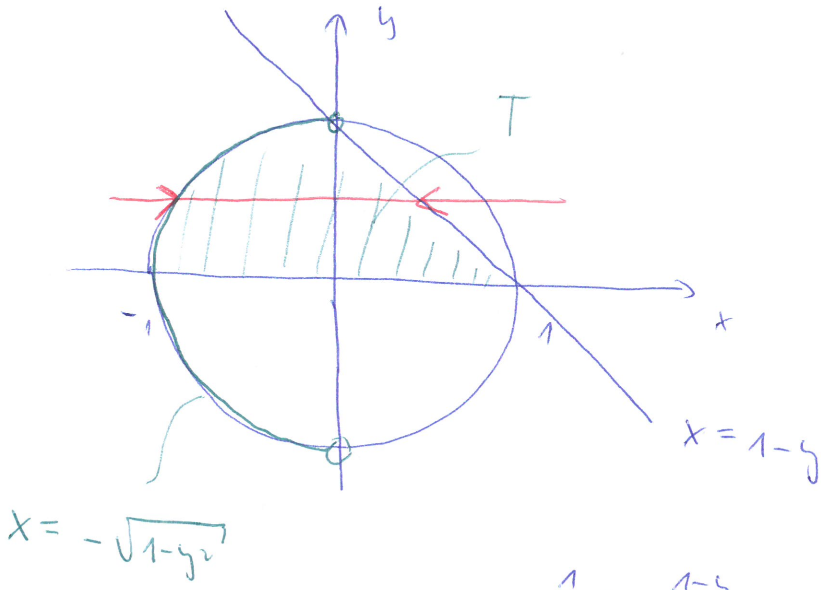
T_1: $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$-1 \le x \le 0$

T_2: $0 \le y \le 1-x$

$0 \le x \le 1$





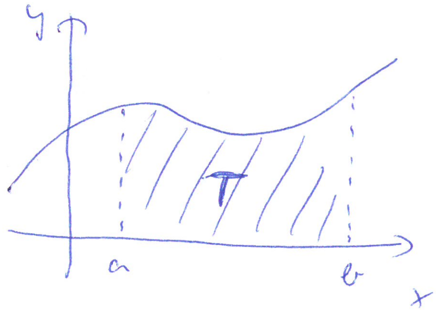
$$T: \left.\begin{array}{l} -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y \\ -1 \le y \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx \right] dy$$

319/

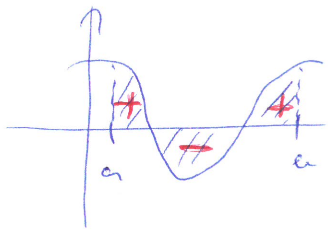
Mégj: milyen geometriai képet társíthatunk a Riemann-integrálhoz?

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrálható $\qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad \int_\Omega f \, d\Omega = ?$

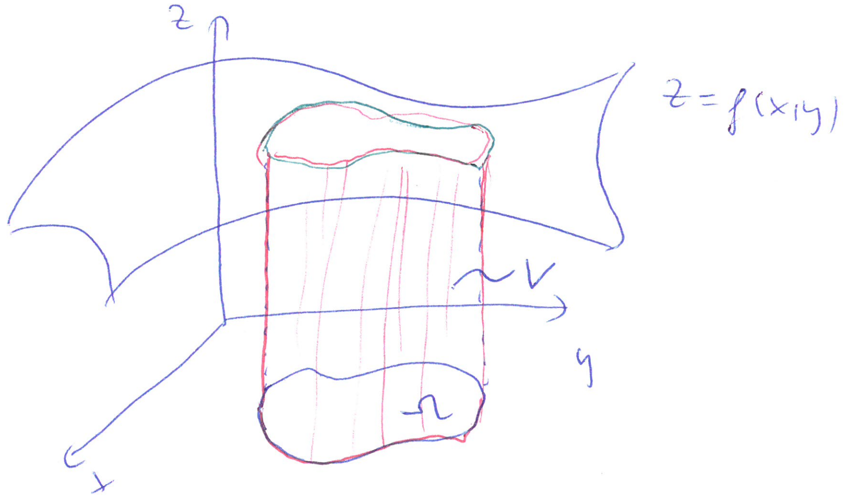
1) $n=1$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



↳ $\int_a^b f(x)dx = T$: f grafikonja és az $[a,b]$ intervallum közé zárt előjeles terület:



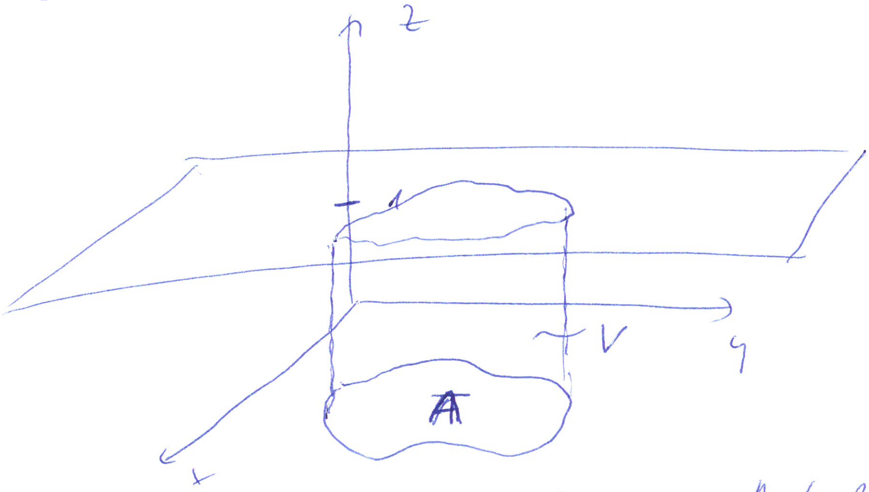
2) $n=2$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



↳ $\iint_\Omega f(x,y)dxdy = V$: $z = f(x,y)$ fv grafikonja (felület) és Ω közötti hengerszerű test előjeles térfogata.

Spec $f(x,y)\equiv 1$ $\quad\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Omega\subset\mathbb{R}^2$



A területe

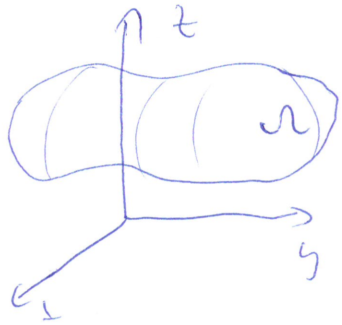
$$\iint_\Omega 1\,dx\,dy = V \underset{\uparrow}{=} \cancel{A\cdot 1 = A}\ mes(A)\cdot 1 = mes(A)$$

henger térfogata = alap terület × magasság

⇝ alkalmazható területszámításra: $\boxed{mes(A)=\iint_A dx\,dy}$

3) $\underline{n=3}$ ⇝ 4 dimenziós térfogat (nem túl szemléletes)

Így: $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \qquad \Omega\subset\mathbb{R}^3$



gondoljunk f-re, mint sűrűségre

$f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \equiv$

$\equiv$ (x,y,z) pont körüli $dx\,dy\,dz$ kocka tömege

$\Rightarrow \int_\Omega f \equiv \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \equiv$ Ω térfogatú $f(\Omega)$ sűrűségű test tömege.

spec $f\equiv 1 \Rightarrow \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = mes(\Omega)$ Ω térfogata

(tömeg = sűrűség × térfogat)