321/

Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

Def: $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az $f(\underline{x}) = 1$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ konstans függvény Riemann-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben és

$$m_J(S) := \int_S 1 \qquad \text{az } S \text{ halmaz \underline{Jordan-mértéke}}$$

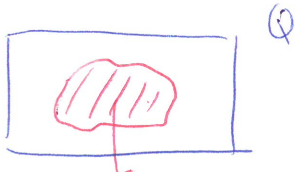
Megj: (1) Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, akkor

$$m_J(Q) = \int_Q 1 = V(Q) \qquad \text{(ahogy eredetileg definiáltuk)}$$

vagyis egy Q tégla Jordan-mértéke megegyezik a térfogatával.

(2) $$\mathbb{1}_S(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \underline{x} \in S \\ 0, & \text{ha } \underline{x} \notin S \end{cases} \qquad S \text{ halmaz \underline{karakterisztikus függvénye}}$$

$\hookrightarrow$ $m_J(S) = \int_S 1 = \int_Q \mathbb{1}_S$, ahol $S \subset Q$, Q tégla



$\Longleftrightarrow$

$$\underline{\int_Q} \mathbb{1}_S = \overline{\int_Q} \mathbb{1}_S \qquad (= m_J(S))$$

Darboux-féle alsó integrál

Darboux-féle felső integrál

322)

$$\underline{\int_Q} \mathbb{1}_S = \sup_P \{ s(\mathbb{1}_S, P) \}$$

P felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg

$$\overline{\int_Q} \mathbb{1}_S = \inf_P \{ S(\mathbb{1}_S, P) \}$$

P felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg

P a Q tégla egy tetszőleges felosztása

$$s(\mathbb{1}_S, P) = \sum_* V(T_{i_1 \dots i_n}) =: j(S, P)$$

$$S(\mathbb{1}_S, P) = \sum^* V(T_{i_1, \dots, i_n}) =: J(S, P)$$

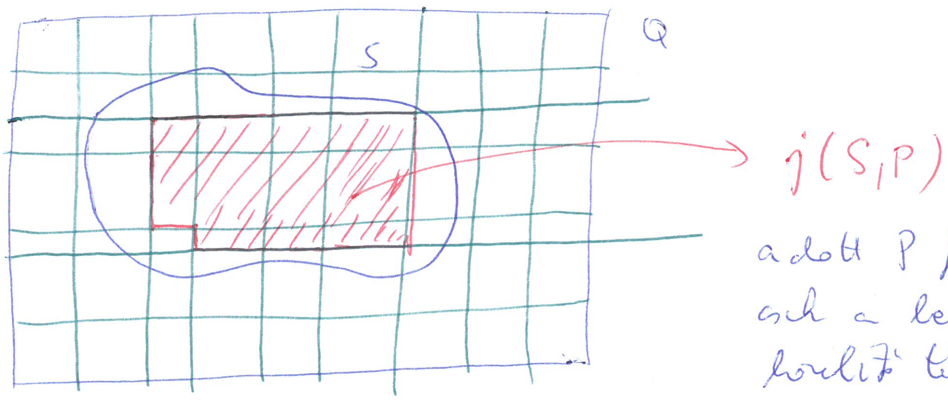
$\sum_*$, ~~$\sum^*$~~ olyan $i_1, \dots, i_n$-ekre való összegzés, melyre

$$\forall\, \underline{x} \in T_{i_1 \dots i_n} \Longrightarrow \underline{x} \in \operatorname{int} S \quad \text{(belső pont)}$$

$\sum^*$ olyan $i_1, \dots, i_n$-ekre való összegzés, melyre

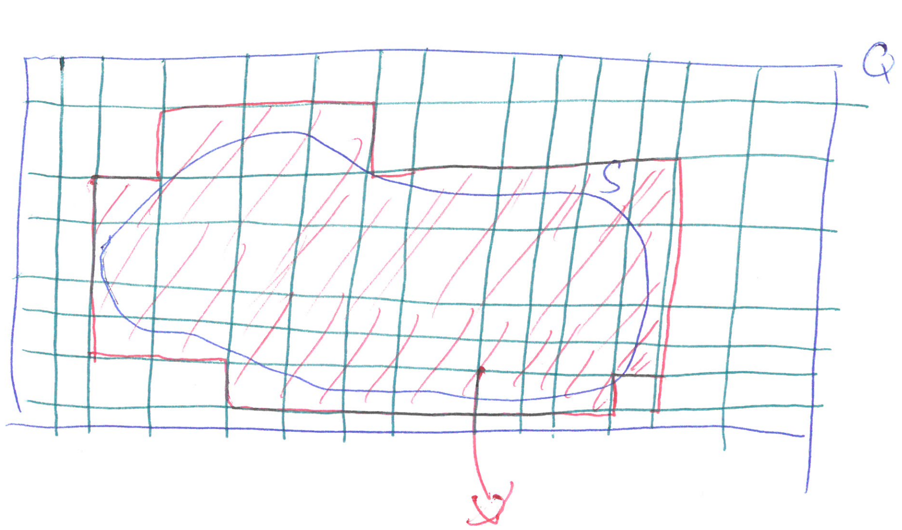
$$T_{i_1 \dots i_n} \cap \overline{S} \neq \emptyset .$$

Vagyis



adott P felosztás esetén, csak a belülről közelítő téglákat vesszük figyelembe

323)



$J(S,P)$

adott P felosztás szerint, csak azokat a téglákat nézzük, melyeknek van $\bar{S}$-sal közös pontja $\Rightarrow$ kívülről közelítünk

$\Rightarrow$ $$0 \le j(S,P) \le J(S,P) \le m(Q)$$

$$m_{*J}(S) := \sup\{j(S,P)\} = \sup_P \{s(\mathbb{1}_S,P)\} = \underline{\int_Q} \mathbb{1}_S$$

S halmaz <u>belső Jordan-mértéke</u>

$$m^*_J(S) := \inf\{J(S,P)\} = \inf_P \{S(\mathbb{1}_S,P)\} = \overline{\int_Q} \mathbb{1}_S$$

S halmaz <u>külső Jordan-mértéke</u>

$\Rightarrow$ $$0 \le m_{*J}(S) \le m^*_J(S) \le m(Q)$$

$m_{*J}(S)$ és $m^*_J(S)$ független Q tégla választásától ($S \subset Q$)

$\Rightarrow$ $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Jordan-mérhető pontosan akkor,

ha $\quad m_{*J}(S) = m_J^*(S) =: m_J(S)$

$\Downarrow$

S halmaz Jordan-mértéke

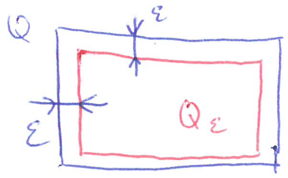
TÉTEL Ha $Q^0 = \text{int}\, Q$ a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla belseje, akkor

Q^0 Jordan-mérhető és $\quad m_J(Q^0) = m_j(Q)$.

Bz.

$Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$\forall \varepsilon > 0 \quad Q_\varepsilon := [a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon] \times \dots \times [a_n+\varepsilon, b_n-\varepsilon]$



$\rightsquigarrow \quad Q_\varepsilon \subset Q^0 \subset Q$

$$m_J(Q_\varepsilon) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 2\varepsilon) = \int_{Q_\varepsilon} \mathbb{1}_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q_\varepsilon} \mathbb{1}_{Q_\varepsilon} \leq$$

$$\leq \underline{\int}_{Q^0} \mathbb{1}_{Q^0} \leq \overline{\int}_{Q^0} \mathbb{1}_{Q^0} \leq \int_Q \mathbb{1}_Q = m_J(Q)$$

$\to m_J(Q)$

ha $\varepsilon \to 0 \qquad \cancel{m_J(Q_\varepsilon) \to m_J(Q)} \quad \prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 2\varepsilon) \to m_J(Q)$

$$\Rightarrow \quad m_J(Q^0) = \underline{\int}_{Q^0} \mathbb{1}_{Q^0} = \overline{\int}_{Q_0} \mathbb{1}_{Q^0} = m_J(Q)$$

!

325)

TÉTEL: Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $m_J(S)=0$

$\Longleftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon>0$-ra $\exists$ véges sok S-et lefedő zárt tégla, melyek Jordan-mértékének összege $<\varepsilon$.

Biz.: houvi (HF)

TÉTEL: Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz Jordan-mérhető

$\Longleftrightarrow$ $m_J(\partial S)=0$ (a határa Jordan-nullmértékű)

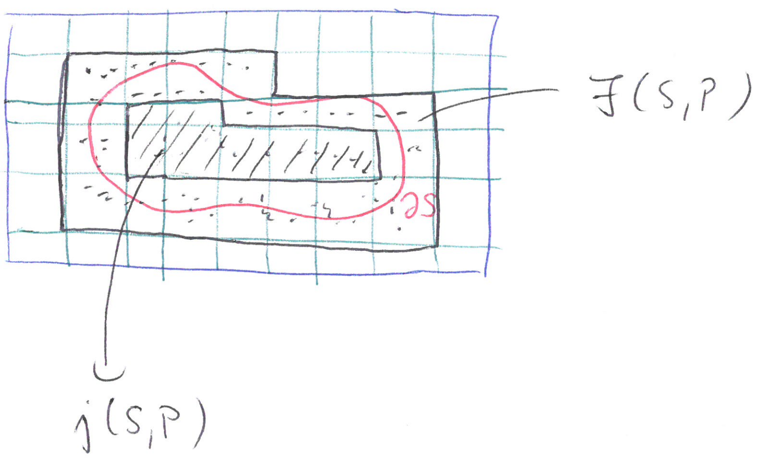
Biz.

áll.: $\boxed{m_J^*(\partial S) = m_J^*(S) - m_{*J}(S)}$

Ha $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{tégla}}}{S \subset Q} \Rightarrow \partial S \subset Q$

Ha P egy tetszőleges felosztása Q-nak, akkor

$$J(\partial S, P) = J(S,P) - j(S,P)$$



326)

$$\Rightarrow \quad J(\partial S, P) \geq m^*_J(S) - m_{*J}(S)$$

$$\overset{d}{\Rightarrow} \quad m^*_J(\partial S) \geq m^*_J(S) - m_{*J}(S) \qquad (*)$$

Másrészt $m^*_J(S)$ és $m_{*J}(S)$ definíciója miatt

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ P^1 és P^2 felosztása Q-nak, hogy

$$J(S, P^1) < m^*_J(S) + \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad j(S, P^2) > m_{*J}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$\hookrightarrow$ $P := P^1 \cup P^2$ közös finomítás

$$\hookrightarrow \quad m^*_J(\partial S) \leq J(\partial S, P) = J(S, P) - j(S, P) \leq$$

$$\leq J(S, P^1) - j(S, P^2) < m^*_J(S) - m_{*J}(S) + \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \quad m^*_J(\partial S) \leq m^*_J(S) - m_{*J}(S) \qquad (**)$$

$$(*) + (**) \Rightarrow \quad m^*_J(\partial S) = m^*_J(S) - m_{*J}(S)$$

Ha S Jordan-mérhető $\Rightarrow$ $0 = m^*_J(S) - m_{*J}(S) = m^*_J(\partial S) \geq$

$$\geq m_{*J}(\partial S) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad m_J(\partial S) = 0 \quad \checkmark$$

<u>Megfordítás:</u>

Ha $m_J(\partial S) = 0 \Rightarrow 0 = m^*_J(\partial S) = m^*_J(S) - m_{*J}(S)$

$\hookrightarrow$ S Jordan-mérhető !

327/

Megj.: emlék.: ∘ $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ megszámlálhatóan sok $Q_1, Q_2, \ldots$ tégla, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} V(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_J(Q_n) < \varepsilon .$$

∘ A Jordan-szerint nullmértékű, ha $m_J(A) = 0$, vagyis

$$m_J^*(A) = m_{*J}(A) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{~~itt csak véges~~ sok}$$

vagyis $\forall \varepsilon > 0$-hoz $m_J^*(A) < \varepsilon$, csak itt csak véges sok téglát használunk a lefedéshez, melyeknek a belseje nem metszi egymást.

TÉTEL $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha határa Lebesgue-szerint nullmértékű.

Biz.

$$\mathbb{1}_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in S \\ 0 & \text{, ha } x \notin S \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ S halmaz belsejében és külsejében is folytonos, vagyis ∂S-en kívül folytonos.

∘ Ha ∂S Lebesgue-szerint nullmértékű, akkor ~~a Rie~~ $\mathbb{1}_S$ Riemann-integrálható (a Lebesgue-kritérium miatt)

$\Rightarrow \forall Q$ téglára melyre $S \subset Q$

$$\int_S 1 = \int_Q \mathbb{1}_S \quad \rightsquigarrow S \text{ mérhető}$$

~~Lebesgue-kritérium~~

∂S ~~nullmértékű~~

328/ ~~Ai...~~

Megfordítva: Ha S mérhető $\xRightarrow{\text{Lebesgue-értelemben}}$ ∂S nullmértékű !

<u>TÉTEL</u>

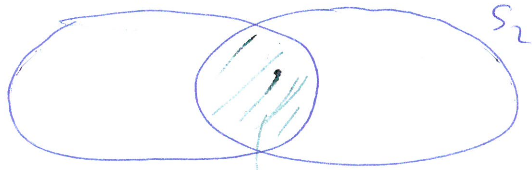
1) Ha S Jordan-mérhető $\Rightarrow m_J(S) \geq 0$.

2) Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, $S_1 \subset S_2 \Rightarrow m_J(S_1) \leq m_J(S_2)$

3) S_1 és S_2 Jordan-mérhető $\Rightarrow S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ is az

és

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) - m_J(S_1 \cap S_2)$$



<u>Biz.</u> def alapján igazolható.

<u>Köv</u> Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, közös belső pont nélküliek, akkor $\operatorname{int} S_1 \cap \operatorname{int} S_2 = \emptyset$

$\Rightarrow m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2)$ additív

$\Downarrow$ teljes indukció

S_i-k $i = 1, 2, \ldots, k$ közös belső pont nélküli, Jordan-mérhetőek

$$\Rightarrow m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)$$

$\leftrightarrow$ Jordan-mérték <u>végesen additív</u>

325)

Megj (tanuljuk majd: Analízis 2, Mértékelmélet)

Ω halmaz, $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (Ω hatványhalmaza)

↳ σ-algebra ($\emptyset, \Omega \in \Sigma$ és zárt a megszámlálható unióképzésre)

$\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ mérték, ha

- $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Sigma$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ páronként diszjunktak $A_i \cap A_j = \emptyset$ ~~$A_i \neq A_j$~~ $i \neq j$

  ↳ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ σ-additív

$\Rightarrow$ Jordan-mérték nem mérték (nem σ-additív)!

Jelöljük $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$-nel az $\mathbb{R}^n$-ben Jordan-mérhető halmazokat

Láttuk: $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Def $t : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény

i) nemnegatív, ha $t(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

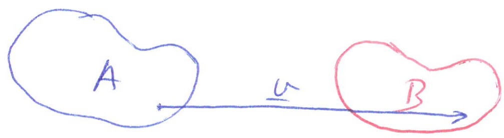
ii) additív, ha $\forall A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, int $A \cap$ int $B = \emptyset$ (A és B nem egymásba nyúlók)

$\Rightarrow \quad t(A \cup B) = t(A) + t(B)$

iii) $B \subset \mathbb{R}^n$ az $A \subset \overset{\mathbb{R}^n}{\cancel{\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)}}$ eltoltja, ha

$\exists\ \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, melyre

$$B = A + \underline{v} = \{\underline{x} + \underline{v} : \underline{x} \in A\}.$$



t eltolás-invariáns, ha $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$B = A + \underline{v} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \text{ és } t(B) = t(A)$$

iv) t normált, ha

$$t(\underset{\text{egységkocka}}{[0,1]^n}) = t([0,1] \times \ldots \times [0,1]) = 1$$

TÉTEL Ha $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény nemnegatív, additív, eltolás-invariáns és normált, akkor

$$\forall\ A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)\text{-re} \qquad t(A) = \underset{\text{Jordan-mérték.}}{m_J}(A)$$

(Vagyis a Jordan-mérték a fenti tulajdonságokra unikális)

331/

TÉTEL $\mathbb{R}^n$-ben minden korlátos és konvex halmaz Jordan-mérhető.

Biz nehéz lásd pl. Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis II.

Példa nem Jordan-mérhető halmazra:

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$$

- $C \subset [0,1] \times [0,1] \rightsquigarrow m_J^*(C) \leq 1$
- C $\forall$ lefedése lefedi $[0,1] \times [0,1]$-et is $\rightsquigarrow m_J^*(C) \geq 1$

$$\Rightarrow m_J^*(C) = 1$$

- $\operatorname{int} C = \emptyset \Rightarrow m_{*J}(C) = 0$

$$\Downarrow$$

C nem Jordan-mérhető

!

Def: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ $k \leq n$

$$\{\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k : 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \leq 1\} =: P(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$$

halmazt a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak hívjuk.

332/

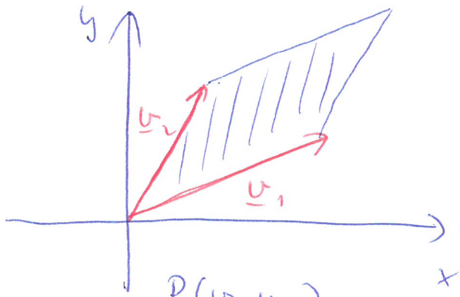
- $k < n$
- $k = n$ és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin. összefüggőek

$\Bigg\} \Rightarrow P(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ <u>elfajuló</u>

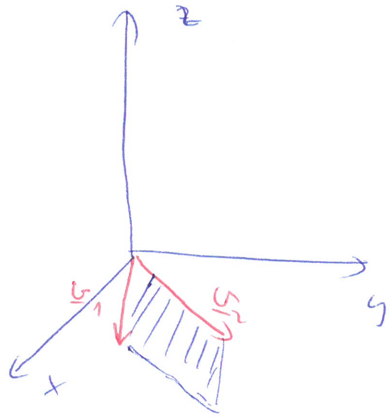
- $k = n$ és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek

$\Rightarrow P(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ <u>nem elfajuló</u>

<u>P()</u>



$P(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ nem elfajuló $\mathbb{R}^2$-ben



$P(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ elfajuló $\mathbb{R}^3$-ban

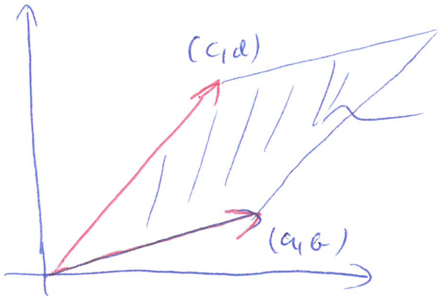
$P(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ korlátos és konvex $\Rightarrow$ Jordan-mérhető

t/h $\underline{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}) \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

Ekkor

$$m_J\big(P(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)\big) = \left| \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

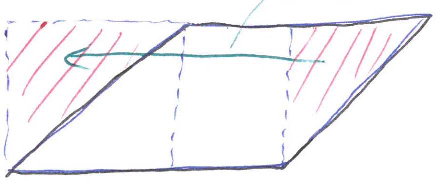
a paralelopipedon térfogata



$$T = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$$

Megj. A bizonyítás átdarabolással történhet

eltolás + m_J eltolásinvariáns



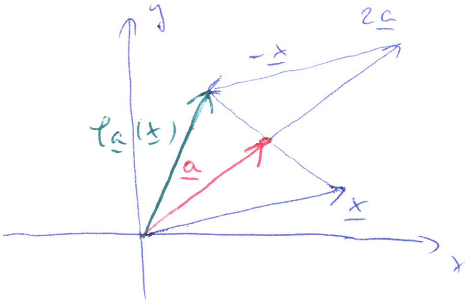
~~Milyen egyéb~~

Hogyan viselkedik a Jordan-mérték egyéb geometriai transzformációkra?

① Def: $\varphi_{\underline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_{\underline{a}}(\underline{x}) := 2\underline{a} - \underline{x}$, $\underline{a}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{a}$ pont körüli középpontos tükrözés

$n=2$



TÉTEL: $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $m^*_J(\varphi_{\underline{a}}(A)) = m^*_J(A)$

$m_{*J}(\varphi_{\underline{a}}(A)) = m_{*J}(A)$.

Ha A Jordan-mérhető, akkor $\varphi_{\underline{a}}(A)$ is Jordan-mérhető és

$$m_J(\varphi_{\underline{a}}(A)) = m_J(A).$$

334/

(2) Pél: $\lambda > 0$, $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_\lambda(\underline{x}) := \lambda \underline{x}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

λ arányú középpontos hasonlóság.

TÉTEL: $\forall$ korlátos $A \subset \mathbb{R}^n$-re $\quad m^*_J(\varphi_\lambda(A)) = \lambda^n m^*_J(A)$

$$m_{*J}(\varphi_\lambda(A)) = \lambda^n m_{*J}(A).$$

Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, akkor $\varphi_\lambda(A)$ is Jordan-mérhető

és $\quad m_J(\varphi_\lambda(A)) = \lambda^n m_J(A)$.

(3) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ távolságtartó, ha $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ $\quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egybevágóság, ha távolságtartó bijekció.

$\hookrightarrow$ egybevágóságok halmaza: G_n : csoport

($\exists$ inverz és zárt a kompozíció képzésre, mint szorzásra)

eltolások csoportja $\mathbb{R}^n$-en: T_n (transzláció csoport)

$$T_n \subset G_n$$

Def: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció ortogonális, ha

$$\left(\begin{array}{l} A(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}) + A(\underline{y}) \\ A(\lambda \underline{x}) = \lambda A(\underline{x}) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$\langle A(\underline{x}), A(\underline{y}) \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

($\Longleftrightarrow$ A-t reprezentáló $\underline{\underline{A}}$ mátrix ortogonális: $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{I}}$)

335)

$\mathbb{R}^n$ ortogonális lineáris transzformációi : O_n

Ha $A \in O_n \Rightarrow \|A\underline{x}\|^2 = \langle A\underline{x}, A\underline{x}\rangle = \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle = \|\underline{x}\|^2 \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow \quad \|A\underline{x} - A\underline{y}\| = \|A(\underline{x}-\underline{y})\| = \|\underline{x}-\underline{y}\| \qquad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ $\forall$ ortogonális lineáris trafó egybevágóság : $O_n \subset G_n$

<u>TÉTEL</u> i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonális $\iff$ $f(\underline{0}) = \underline{0}$ és f távolságtartó

ii) $\forall\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ távolságtartó leképezés egybevágóság

iii) $G_n = \{ f \circ g : g \in O_n, f \in T_n \}$

<u>TÉTEL</u> : $\forall$ $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra és

$\forall$ $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációra

$$m_{*J}(\Lambda(A)) = |\det \Lambda| \cdot m_{*J}(A)$$

$$m_J^*(\Lambda(A)) = |\det \Lambda| \cdot m_J^*(A)$$

Ha A Jordan-mérhető, akkor $\Lambda(A)$ is Jordan-mérhető és

$$m_J(\Lambda(A)) = |\det \Lambda|\, m_J(A)$$

!

Köv: Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ korlátos egybevágó halmazok, akkor

$$m_{*J}(A) = m_{*J}(B)$$

$$m^*_J(A) = m^*_J(B).$$

Ha A Jordan-mérhető, akkor B is Jordan-mérhető és

$$m_J(A) = m_J(B).$$

Biz. eltolásokra láttuk.

Ha $\Lambda \in O_n \Rightarrow (\det \underline{\underline{\Lambda}})^2 = \det \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\Lambda}} = \det \underline{\underline{I}} = 1$

$\hookrightarrow \det \underline{\underline{\Lambda}} = \pm 1$

~~Példa~~

Számoljuk ki az $\mathbb{R}^n$-beli gömbök ~~tér~~ Jordan-mértékét!

$\forall$ gömb korlátos és konvex $\Rightarrow$ Jordan-mérhető.

$\mathbb{R}^n$-beli egységgömbök (1 sugarú) egymás eltoltjai

$$\Downarrow$$

Jordan-mértékük megegyezik:

$\gamma_n :=$ $\mathbb{R}^n$-beli egységgömb térfogata

r sugarú gömb $\equiv$ megkapható az egységgömbből r arányú középpontos hasonlósággal : Ψ_r

mivel

$$m_J(\Psi_\lambda(A)) = \lambda^n m_J(A)$$

337)

$$\Rightarrow \qquad m_J^{\overset{n \text{ dimenziós}}{n}}(B(\underline{x},r)) = m_J^n(\Psi_r(B(\underline{x},1)) = r^n \gamma_n$$

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$r > 0$

TÉTEL

i) $\gamma_{2k} = \dfrac{\pi^k}{k!}$

ii) $\gamma_{2k+1} = \dfrac{\pi^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k!}{(2k+1)!}$

Biz.

$$I_n := \int_0^\pi \sin^n x \, dx$$

$$I_0 = \int_0^\pi dx = \pi$$

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x \, dx = \cos 0 - \cos \pi = 2$$

$$I_{k+1} = \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \sin^{k-1} x \, dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x) \sin^{k-1} x \, dx =$$

$$= \int_0^\pi \left(\sin^{k-1} x - \cos^2 x \cdot \sin^{k-1} x\right) dx = I_{k-1} - \int_0^\pi \cos x \left[\sin^{k-1} x \cdot \cos x\right] dx$$

$$\int_0^\pi \cos x \underbrace{\left[\sin^{k-1} x \cdot \cos x\right]}_{\left(\frac{1}{k}\sin^k x\right)' = u'} dx \underset{\text{parciális}}{=} \left[\cos x \cdot \frac{\sin^k x}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k} \sin^k x \cdot (-\sin x) \, dx \; (=)$$

$\rightsquigarrow u = \frac{1}{k}\sin^k x$

$\cos x = v \qquad \rightsquigarrow v' = -\sin x$

$$(=)\; 0 + \frac{1}{k} I_{k+1}$$

$$\hookrightarrow \quad I_{k+1} = I_{k-1} - \frac{1}{k} I_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{k+1} = \frac{k}{k+1} I_{k-1}}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \underbrace{I_0}_{=\pi}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \dots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \underbrace{I_1}_{2}$$

Ha $-1 \le y \le 1 \Rightarrow B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ gömb y magasságú $B(0,1)^y$ szekciófv-e egy $n-1$ dimenziós $\sqrt{1-y^2}$ sugarú gömb

$$\Rightarrow \quad \gamma_n = \int_{-1}^{1} \gamma_{n-1} \left(\sqrt{1-y^2}\right)^{n-1} dy = \gamma_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-y^2}\right)^{n-1} dy =$$

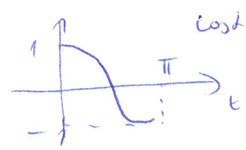
$y := \cos t$

$\frac{dy}{dt} = -\sin t$

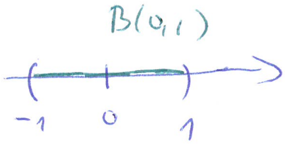
$\rightsquigarrow dy = -\sin t \, dt$

$$= \gamma_{n-1} \int_{\pi}^{0} \sin^{n-1} t \, (-\sin t) \, dt =$$

$$= \gamma_{n-1} \int_{0}^{\pi} \sin^{n} t \, dt = \gamma_{n-1} \cdot I_n$$



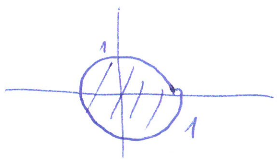
• ~~$\gamma_1 = \gamma_0 I_1$~~ $n = 1$



$\gamma_1 = 2$

• $n = 2$:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \cdot I_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad ✓$$



$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \pi$$

339/

- $n=3$ $\quad \gamma_3 = \gamma_2 \cdot I_3 = \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ← 1 sugarú gömb térfogata

$$I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3} \cdot 2$$

Megj.: $\mathbb{R}^n$-beli egységgömbök Jordan-mértéke γ_n

- $\gamma_1 = 2 < \gamma_2 = \pi < \gamma_3 = \frac{4\pi}{3} < \gamma_4 = \frac{\pi^2}{2} < \underbrace{\gamma_5 = \frac{8\pi^2}{15}}_{\text{maximális}} >$

$$> \gamma_6 = \frac{\pi^3}{6} > \gamma_7 = \frac{16\pi^3}{105} > \ldots$$

$\max\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} = \gamma_5 = \frac{8\pi^2}{15}$ az 5 dimenziós egységgömb Jordan-mértéke a legnagyobb

- $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ $\quad n = 1, 2, 3, 4$

  $\gamma_n > \gamma_{n+1}$ $\quad n = 5, 6, \ldots$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$

Megj. Kalkulus 1. $\quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad x > 0$

Euler-féle gamma függvény

i) $0 < \Gamma(x) < +\infty$

ii) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad x > 0$

iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iv) $\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$ $\quad \rightsquigarrow$ a faktoriális fogalom általánosítása

350)

Belátható:

$$\gamma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

r sugarú $\mathbb{R}^n$-beli gömb Jordan-mértéke:

$$V_n(r) = \frac{(r\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

321)

Integráltranszformáció

(A helyettesítéses integrál általánosítása)

Eml: 1 változóban

- $g:[a,b]\to[c,d]$ folytonosan diffható $(g\in C^1[a,b])$,

  melyre $c=g(a)$, $d=g(b)$

- $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos $(\leadsto f\in R[c,d])$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,d\cancel{x} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

(a gyakorlatban:
$$\int_c^d f(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

$$t:=g(x)$$

$$\hookrightarrow \frac{dt}{dx}=g'(x) \leadsto dt=g'(x)\,dx$$

$$c\le t\le d$$

pl. ha $g\uparrow$
$$g^{-1}(c)\le g^{-1}(t)\le g^{-1}(d)$$
$$\overset{\|}{a}\le x\le \overset{\|}{b} \qquad)$$

Vagyis, ha g szigorúan monoton $[a,b]$-n, azaz $g'(x)\neq 0$ $x\in[a,b]$

$\hookrightarrow$
- $a=g^{-1}(c)$ és $b=g^{-1}(d)$, ha g szig $\uparrow$
- $a=g^{-1}(d)$ és $b=g^{-1}(c)$, ha g szig $\downarrow$

$$\hookrightarrow \int_c^d f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\,g'(x)\,dx \quad , \text{ha } g \nearrow \text{ szig} \quad (g'>0)$$

$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(d)}^{g^{-1}(c)} f(g(x))\,g'(x)\,dx = -\int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\,g'(x)\,dx \quad , \text{ha } g \searrow \text{ szig} \quad (g'<0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_c^d f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))\,|g'(x)|\,dx}$$

, ha g szigorúan monoton

Cél: szeretnénk a fenti tételt általánosítani, akkor, amikor

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ elég jó tulajdonságú függvény

1) Milyen g függvényt kell helyettesíteni a régi változó helyére, vagyis milyen g transzformációval vezessük be új változókat?

2) Az intervallumok helyett, $\mathbb{R}^n$ milyen részhalmazain integrálunk?

3) $f(g(x))$-t $|g'(x)|$ helyett mivel kell megszorozni?

343/

TÉTEL (Jordan-féle mérték és integráltranszformáció)

$G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $g: G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diff.ható ($g \in C^1(G)$), melyre $\det g'(\underline{x}) \neq 0 \quad \forall\, \underline{x} \in G$.

Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\overline{H} \subset G$ és g injektív int H-ban, akkor $g(H)$ is mérhető Jordan-szerint és

$$m_J(g(H)) = \int_H |\det g'(\underline{x})|\, d\underline{x} \;,$$

Ha $f: g(H) \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor

$$\int_{g(H)} f(\underline{t})\, d\underline{t} = \int_H f(g(\underline{x}))\, |\det g'(\underline{x})|\, d\underline{x} \;,$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is.

Megj: ① $\det g'(\underline{x})$: Jacobi-determináns

② $n=1$ $\quad H = [a,b]$

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan diff.ható és injektív (a,b)-n

$\Downarrow$

g szigorúan monoton $[a,b]$-ben

$\Downarrow$

g' állandó előjelű

• ha $g'(x) > 0$, $x \in [a,b]$ $\Rightarrow g \nearrow$ szig $\Rightarrow g(H) = [g(a), g(b)]$

$$\hookrightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

355)

- ha $g'(x)<0$ $\quad x\in[a,b] \Rightarrow g \downarrow$ szig $[a,b]$-n

$$\Downarrow$$

$$g(H)=[g(b),g(a)]$$

$$\Rightarrow \int_{g(b)}^{g(a)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))\underbrace{(-g'(x))}_{|g'(x)|}\,dx$$

$$\hookrightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ a tétel valóban az "valós" helyettesítéses integrál általánosítása.

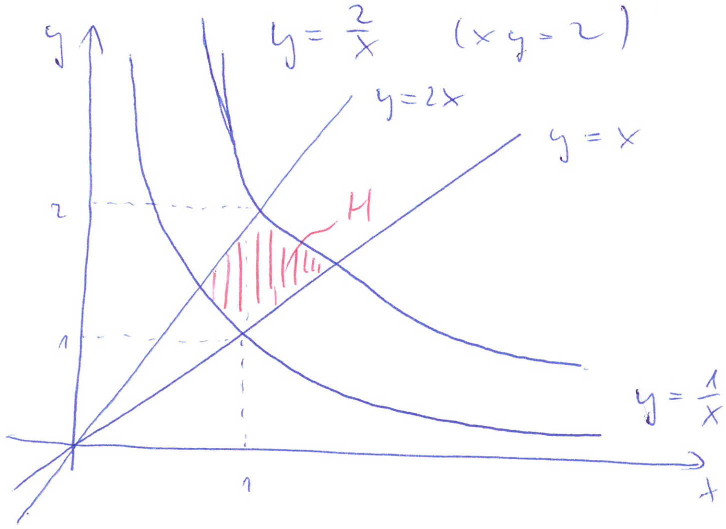
(3)

$$\int_{g(H)} f(\underline{t})\,d\underline{t} = \int_H f(g(\underline{x}))\,|\det g'(\underline{x})|\,d\underline{x}$$

$A := g(H) \rightsquigarrow H = g^{-1}(H)$ $\quad$ g injektív

$$\Rightarrow \int_A f(\underline{t})\,d\underline{t} = \int_{g^{-1}(A)} f(g(\underline{x}))\,|\det g'(\underline{x})|\,d\underline{x}$$

Példa 1. Határozzuk meg az $xy=1$ és az $xy=2$ hiperbolák és az $y=x$ és $y=2x$ egyenesek által határolt korlátos tartomány területét!



1. módszer: feldaraboljuk diszjunkt normál tartományokra $\Longrightarrow$ nehézkes

2. módszer: integráltranszformáció

új változók: $u=u(x,y):=xy$, $v=v(x,y):=\frac{y}{x}$ $\Longrightarrow$

$xy=1 \iff u=1$

$xy=2 \iff u=2$

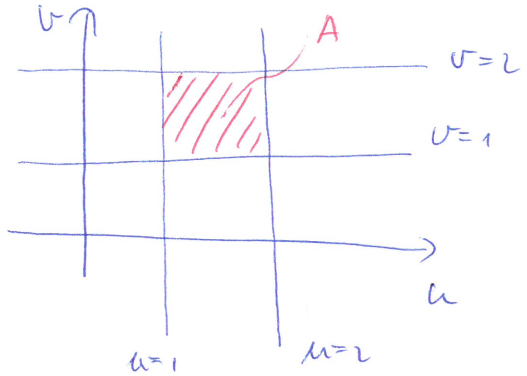
$y=x \iff v=1$

$y=2x \iff v=2$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{u\cdot v} \\ x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \end{aligned}\right\}$$

$\Downarrow$

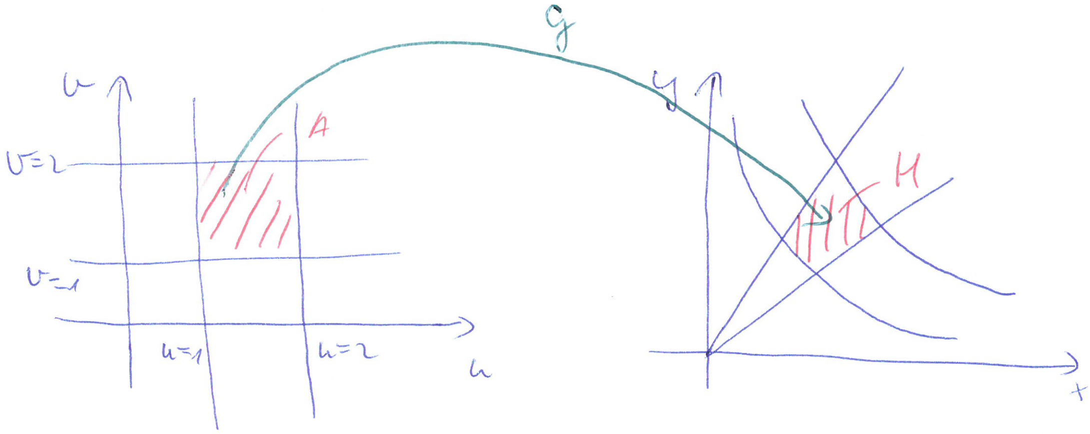


$$\Longrightarrow g(u,v):=(x(u,v),y(u,v))=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)$$

folytonosan diff-ható, ha $u,v>0$

az új változók által meghatározott koordináta-rendszerben négyzetté (normáltartománnyá) transzformálódik H

346)



$g(A) = H$

$\Downarrow$

$A = g^{-1}(H) = [1,2]\times[1,2]$

∘ pl mibe viszi az $u=1$ egyenest?

$g(1,v) = \left(\sqrt{\frac{1}{v}}, \sqrt{v}\right) = (x,y)$

$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{v}} \\ y = \sqrt{v} \end{array}\right\} \quad xy = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x}}$ hiperbolákra

Jacobi-mátrix

$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

gyakori jelölés főleg régebbi könyvekben

∘ pl mibe viszi a $v=2$ egyenest?

$g(u,2) = \left(\sqrt{\frac{u}{2}}, \sqrt{2u}\right) = (x,y)$

$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{2}\sqrt{u} \end{array}\right\} \quad x = \frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{y = 2x}$ egyenesbe

$\hookrightarrow \sqrt{u} = \frac{y}{\sqrt{2}}$

$\downarrow$

$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{4uv}} & -\sqrt{\frac{u}{4v^3}} \\ \sqrt{\frac{v}{4u}} & \sqrt{\frac{u}{4v}} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

Jacobi-det

$|\det g'(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{4uv}} & -\sqrt{\frac{u}{4v^3}} \\ \sqrt{\frac{v}{4u}} & \sqrt{\frac{u}{4v}} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$

357/

$$\Rightarrow \quad m_J(H) = \int_H 1 \, dx\,dy = \int_{g(A)} 1 \, dx\,dy \underset{\text{tétel}}{=} \int_A |g'(u,v)| \, du\,dv =$$

$$= \int_A \frac{1}{2v} \, du\,dv = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v} \, du\,dv =$$

$$A = [1,2] \times [1,2]$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2v} u \right]_{u=1}^2 dv = \int_1^2 \frac{1}{2v} \, dv = \frac{1}{2} \left[\ln v \right]_1^2 =$$

$$\frac{2}{2v} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2v} \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln 1\right] =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\ln 2}{2}}}$$

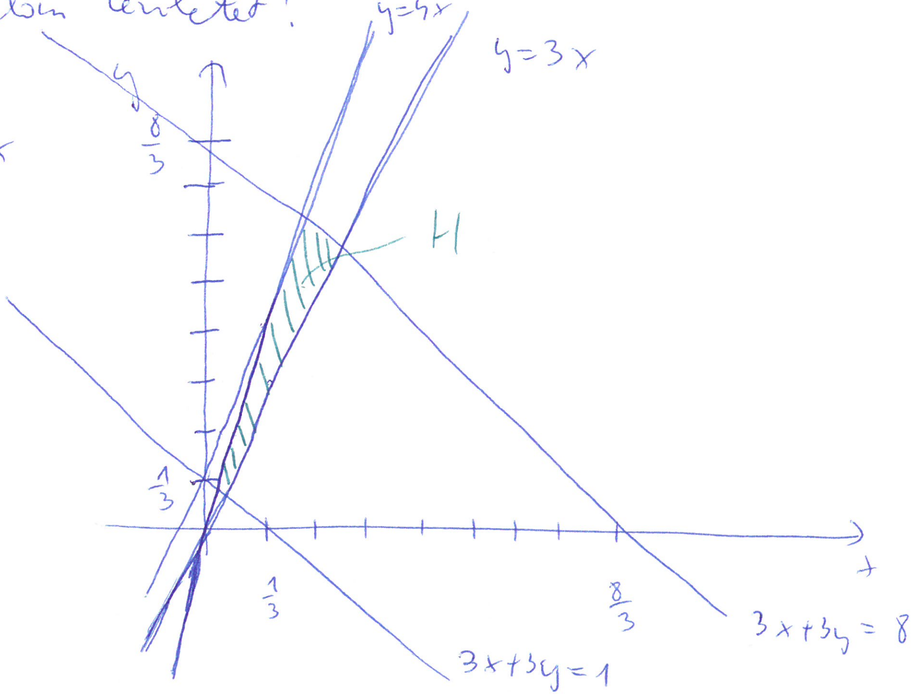
<u>Példa 2</u> Határozzuk meg a $3x+3y=1$, $3x+3y=8$, $y=3x$ és $y=4x$ egyenesek által közrezárt korlátos síkidom területét!

$3x+3y=1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} - x$

$3x+3y=8 \Rightarrow y = \frac{8}{3} - x$

$y = 3x$

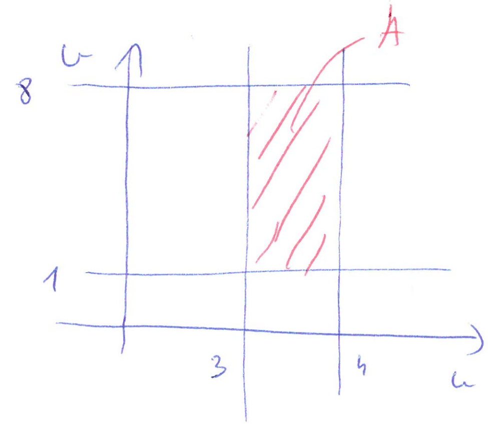
$y = 4x$



348)

új koordináták: $\left.\begin{aligned} u = u(x,y) &:= \frac{y}{x} \\ v = v(x,y) &:= 3x+3y \end{aligned}\right\}$ $(*)$

$\left.\begin{aligned} 3x+3y=1 &\iff v=1 \\ 3x+3y=8 &\iff v=8 \\ y=3x &\iff u=3 \\ y=4x &\iff u=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$



$(*) \Rightarrow$ kifejezzük a régi koordinátákat (x,y) az újakkal (u,v)

$u = \frac{y}{x} \rightsquigarrow y = x \cdot u \rightsquigarrow v = 3x + 3xu = x(3+3u)$

$\hookrightarrow x = \frac{v}{3+3u} = \frac{1}{3}\frac{v}{1+u}$

$y = xu = \frac{1}{3}\frac{uv}{1+u}$

$\Rightarrow g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{1}{3}\frac{v}{1+u}, \frac{1}{3}\frac{uv}{1+u}\right)$

$\hookrightarrow g(A) = H \Rightarrow A = g^{-1}(H) = [3,4]\times[1,8]$

$|g'(u,v)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{3+3u} \\ \frac{1}{3}\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{3}\frac{u}{1+u} \end{pmatrix}\right| =$

$= \left|-\frac{1}{9}\frac{v}{(1+u)^2}\right| = \frac{1}{9}\frac{v}{(1+u)^2}$

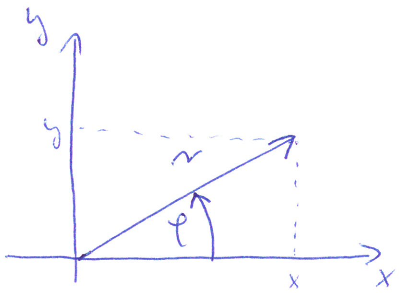
$\Rightarrow m_J(H) = \int_H \underbrace{dH}_{dx\,dy} = \int_A \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_3^4\int_1^8 \frac{1}{9}\frac{v}{(1+u)^2}\,dv\,du \; =$

$$\ominus \ \frac{1}{9}\int_3^4 \underbrace{\left[\frac{v^2}{2(1+u)^2}\right]_{v=1}^{8}}_{\frac{32}{(1+u)^2}-\frac{1}{2(1+u)^2}=\frac{63}{2}\frac{1}{(1+u)^2}} du = \frac{63}{18}\int_3^4 \frac{1}{(1+u)^2}\,du \ \boxed{=}$$

$$\boxed{=}\ \frac{63}{18}\left[-\frac{1}{1+u}\right]_3^4 = \frac{63}{18}\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right] = \frac{7}{40}$$

!

Polártranszformáció



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$\Longleftrightarrow$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$(x,y) \Longleftrightarrow (r,\varphi)$ polárkoordináták

r: sugár, φ: polárszög

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

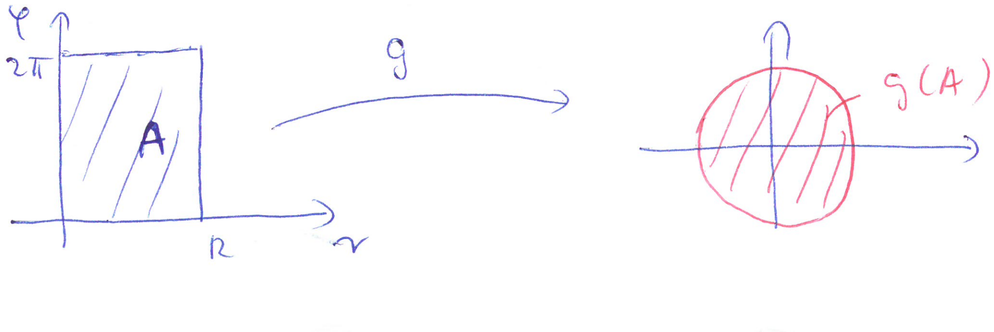
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$g'(r,\varphi) = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi-mátrix

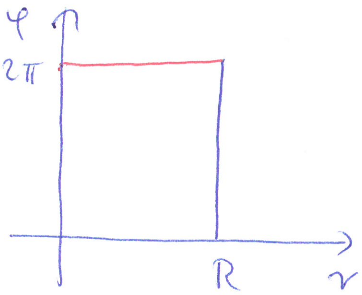
$$\hookrightarrow \ |\det g'(r,\varphi)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

pl.:



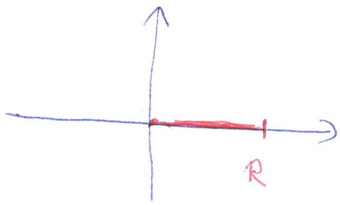
350/

ugyanis

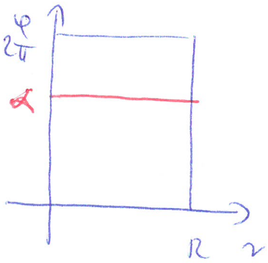


• mibe viszi a $\varphi = 2\pi$ $\quad 0 < r < R$ szakaszt?

$$g(r, 2\pi) = \begin{pmatrix} r\cos 2\pi \\ r\sin 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 \le x = r \le R \\ y = 0 \end{array}$$



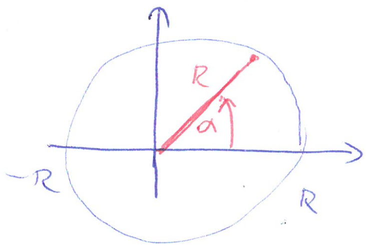
•



$\varphi = \alpha \qquad \alpha \in (0, 2\pi)$

$0 \le r \le R$

$$g(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{array} \qquad 0 \le r \le R$$



$0 \le \alpha \le 2\pi$

<u>Megj</u>: $\left.\begin{array}{l} g(x,0) = g(x, 2\pi) \\ g(0,\varphi) = (0,0) \quad \forall \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow$ g nem injektív, ~~csak~~, de

$[0,R] \times \{0\}$ Jordan-mértéke $= 0$

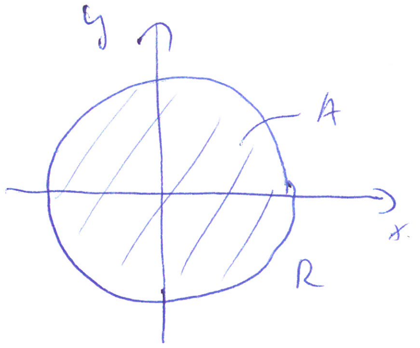
$\Downarrow$

a belsejében injektív, ez elég.

351)

Példák

① R sugarú origó középpontú körlap területe?



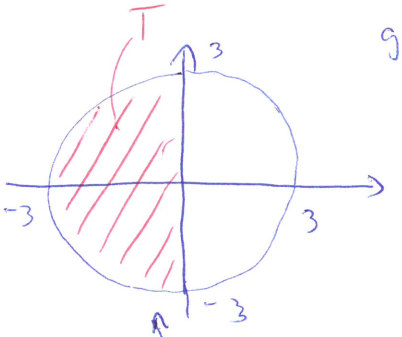
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ $\rightsquigarrow$ $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$m_J(A) = \iint_A 1\,dx\,dy = \int_0^R \underbrace{\int_0^{2\pi} r\,d\varphi}_{[r\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2\pi r}\,dr = 2\pi \int_0^R r\,dr \;=$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underline{\underline{R^2\pi}}$$

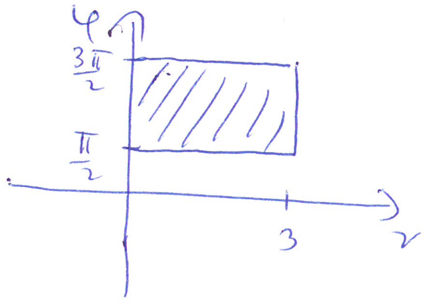
② $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \le 0,\ x^2+y^2 \le 9\}$

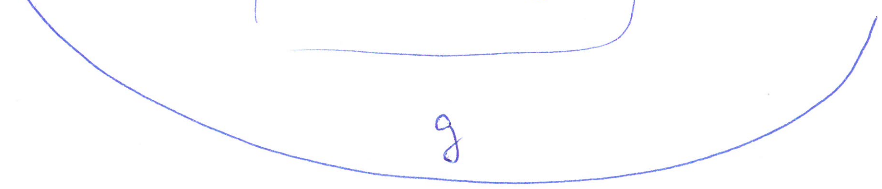
$$\int_T \cos(x^2+y^2)\,dT = ?$$



$g:$ $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 < r \le 3 \\ \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{array}}$$





352)

$$\int_T \cos(x^2+y^2)\,dT \underset{x^2+y^2=r^2}{=} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \underbrace{\int_0^3 (\cos r^2)\cdot r\,dr}\,d\varphi = \frac{\sin 9}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2} d\varphi \ \ominus$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 2r\cos r^2\,dr \underset{\int f'\cdot\cos f = \sin f + C}{=} \frac{1}{2}\left[\sin r^2\right]_0^3 = \frac{\sin 9}{2}$$

$$\ominus\ \frac{\sin 9}{2}\left[\varphi\right]_{\pi/3}^{3\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\sin 9}}$$

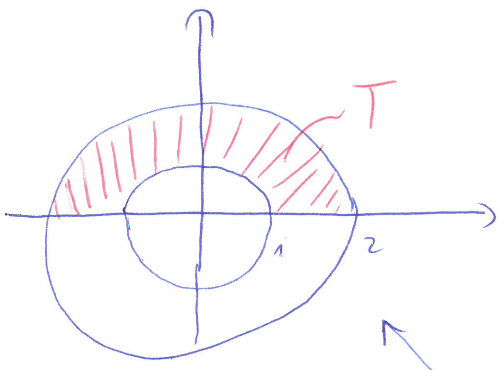
(3)

$$T := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$$

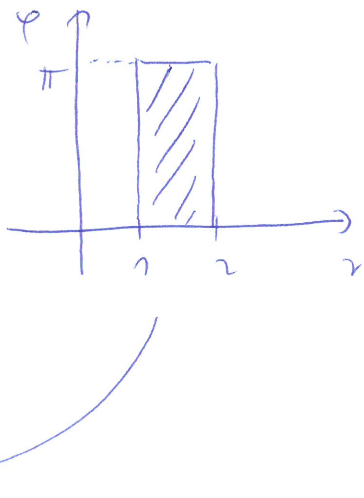
$$\int_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dT = ?$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



$$\boxed{\begin{array}{l} 1\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array}}$$



$$\int_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dT \underset{x^2+y^2=r^2}{=} \int_0^\pi\int_1^2 \frac{1}{(r^2)^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \underbrace{\int_0^\pi d\varphi}_{\pi}\cdot\underbrace{\int_1^2 \frac{1}{r^3}\,dr}_{\left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{8}} = \underline{\frac{3}{8}\pi}$$

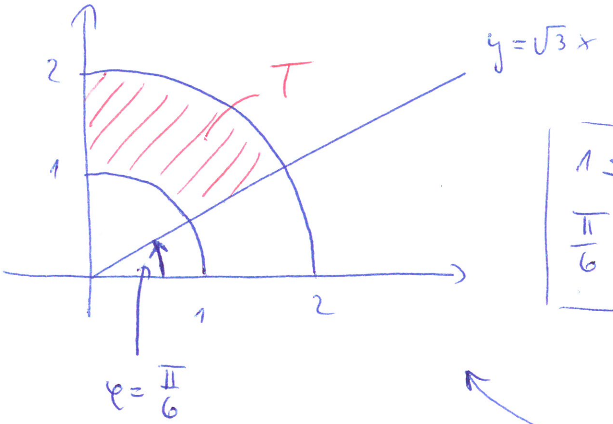
353

(4)

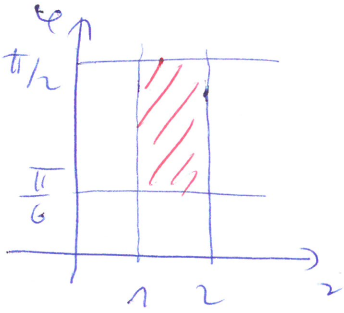
$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

$$\int_T 4xy^3\,dT = ?$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$



$$\boxed{\begin{aligned} 1 \le\ & r \le 2 \\ \frac{\pi}{6} \le\ & \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$



g

$$\int_T 4xy^3\,dT = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^2 4r\cos\varphi \cdot r^3\sin^3\varphi \cdot \underset{\text{Jacobi}}{r}\,dr\,d\varphi =$$

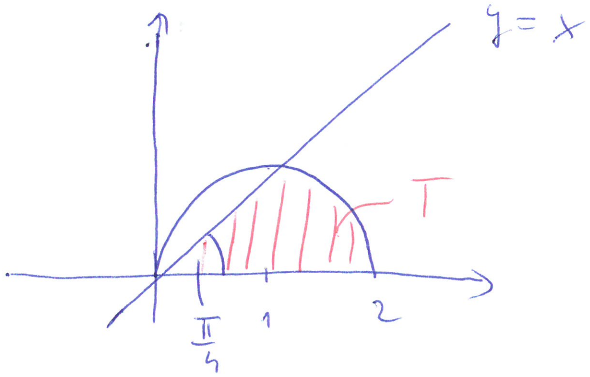
$$= 4\underbrace{\int_1^2 r^5\,dr}_{\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^6-1}{6}} \cdot \underbrace{\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}} = \dots$$

354

(5) $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ \underbrace{x^2+y^2-2x \le 0}_{\Updownarrow}\}$

$\int_T (2+y)\,dT = ?$

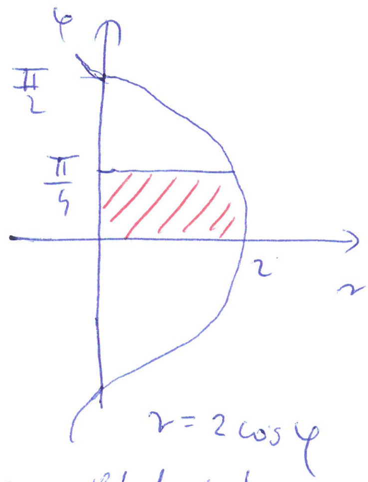
$(x-1)^2 + y^2 \le 1$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

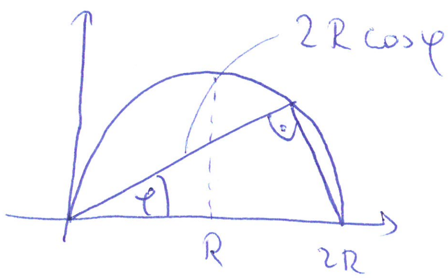
$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{array}}$$



normáltartomány!

trükk: Thalesz-tétel



$$\int_T (2+y)\,dT = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\int_0^{2\cos\varphi} (2 + r\sin\varphi)\cdot r\,dr}\,d\varphi \ \ominus$$

$$\left[r^2 + \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right]_{r=0}^{2\cos\varphi} = 4\cos^2\varphi + \frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi$$

$$\ominus \int_0^{\pi/4} \left(4\cos^2\varphi + \frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\right)d\varphi = \left[2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{8}{12}\cos^4\varphi\right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\frac{\pi+3}{2}}}$$

$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$

(6)

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = ?$$

$\leadsto$ ~~nem~~ elemi függvényekkel nem adható meg a primitív fv.

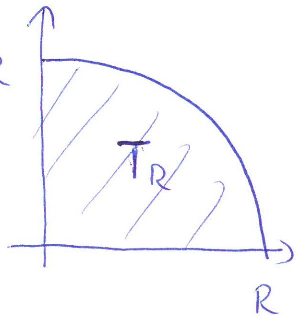
ha $x \geq 1 \leadsto e^{-x^2} \leq e^{-x}$ és $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konvergens

$\Downarrow$

I $\exists$ és véges

Ötlet: alakítsuk át kettős integrállá:

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



$$\iint_{T_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \underset{P}{=} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\int_0^R e^{-r^2} r\,dr}_{\parallel}\,d\varphi =$$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

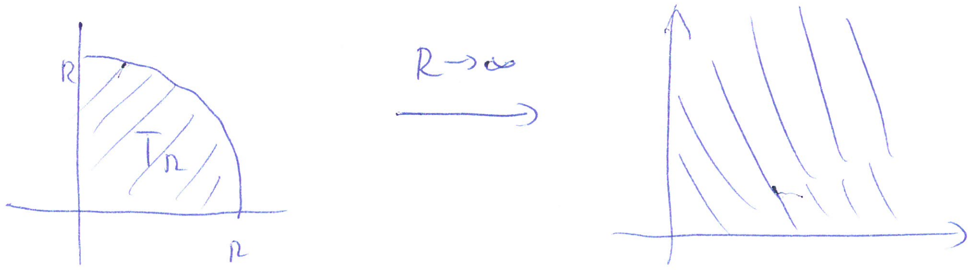
T_R: $0 \leq r \leq R$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{1}{2}\int_0^R (-2r)e^{-r^2}\,dr \underset{P}{=} -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{1-e^{-R^2}}{2}$$

$\int f' e^f = e^f + c$

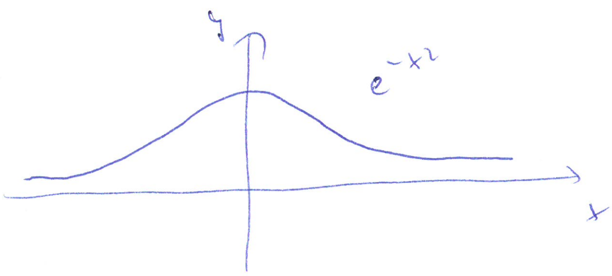
$$= \frac{1-e^{-R^2}}{2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$



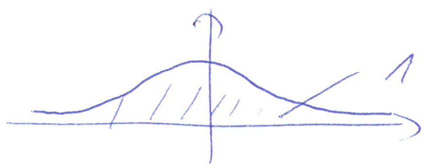
$$\Rightarrow \quad I^2 = \lim_{R\to\infty} \iint_{T_R} e^{-x^2-y^2}\, dT = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e^{-x^2} páros ⇝ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$



$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$: Gauss-görbe ≡ standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye



$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx$$