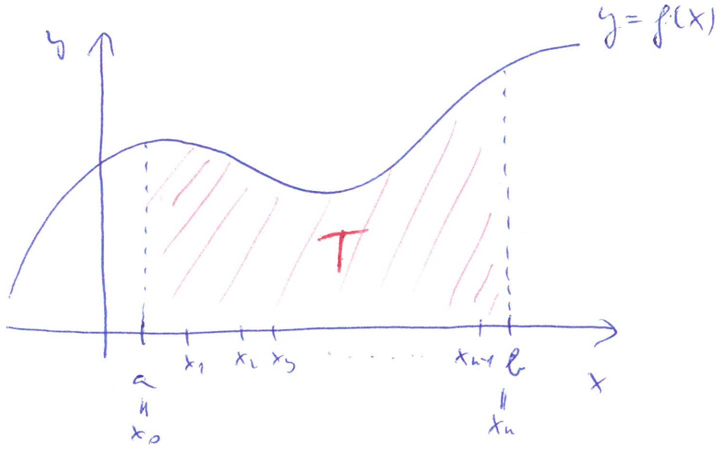
Többváltozós függvények Riemann-integrálja

Eml. 1 változós eset



f korlátos függvény, $[a,b]$ korlátos intervallum

- $F := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $\qquad x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

  $[a,b]$ intervallum egy felosztása

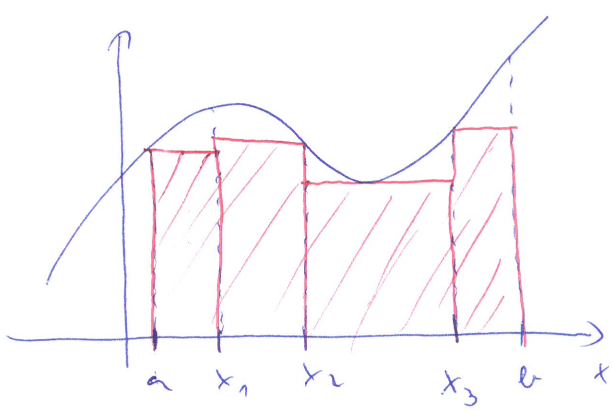
  $\max\limits_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \{|x_{i+1} - x_i|\}$: F felosztás finomsága

- $m_i := \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $\quad M_i := \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$

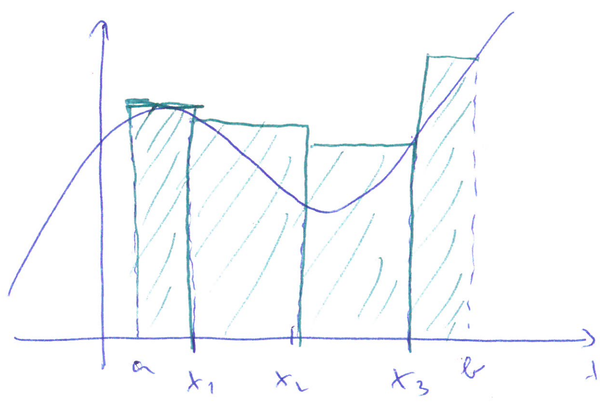
$$\Downarrow$$

$$s_F := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i), \quad S_F := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$

F felosztáshoz tartozó alsó- ill. felső közelítő összeg



s_F



S_F

$$s_F \le T \le S_F \quad \forall F$$

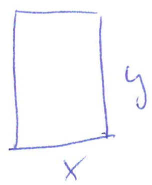
$\underline{I} := \sup_F s_F$ Darboux-féle alsó integrál

$\overline{I} := \inf_F S_F$ Darboux-féle felső integrál

Def: f Riemann-szerint integrálható $[a,b]$-n ($f \in \mathcal{R}[a,b]$), ha $\underline{I} = \overline{I}$. Ekkor

$$\underline{I} = \overline{I} =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Megj: Az egész definíció azon alapul, hogy az



téglalap területe $x \cdot y$.

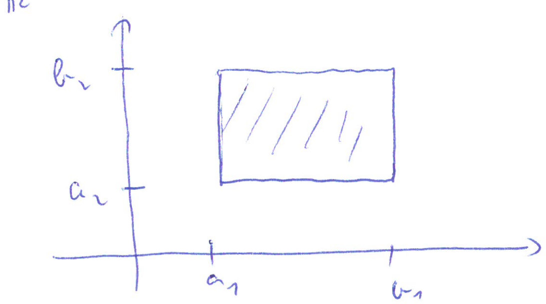
Áll, hogy az $[a,b]$ intervallum hossza $b-a$.

Általánosítás: komponens intervallumok

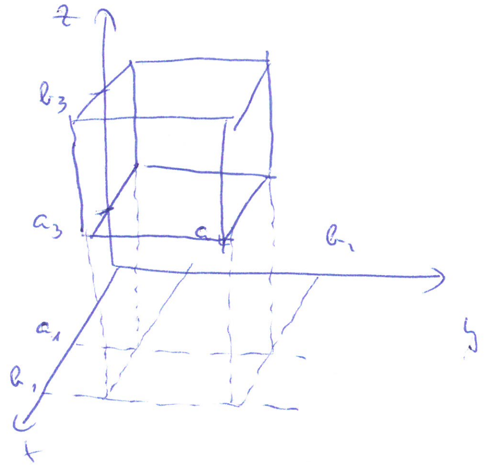
$Q := [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ n dimenziós tégla, vagy n-dimenziós intervallum

$[a_i,b_i] \subset \mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



285/

<u>Def:</u> A $Q=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ tégla <u>egy felosztása</u>

$$P=P_1\times P_2\times\dots\times P_n \quad \text{, ha}$$

P_j az $[a_j,b_j]$ intervallum egy felosztása $\forall j=1,\dots,n$-re:

$$P_j=\{x_{ji}:\ a_j=x_{j0}<x_{j1}<\dots<x_{jk_j}=b_j\}$$

valamely $k_j\in\mathbb{N}$-re

↑ P_j osztópontjainak száma

$I_{ji}:=[x_{j\,i-1},x_{ji}]$ $\quad i=1,\dots,k_j$

↳ az $[a_j,b_j]$ komponens intervallum P_j felosztás által meghatározott részintervallumai

$T_{i_1\dots i_n}:=I_{1i_1}\times\dots\times I_{ni_n}$ téglák $\quad i_1=1,\dots,k_1$, $\vdots$, $i_n=1,\dots,k_n$

↳ Q tégla P felosztás által meghatározott <u>résztéglái</u> (részintervallumai)

$\Downarrow$

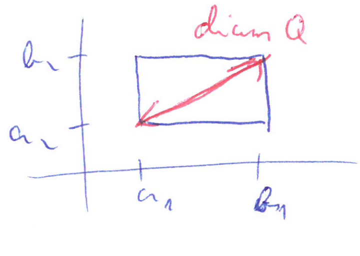
$$\|P\|=\sup_{i_1,\dots,i_n}\{\operatorname{diam} T_{i_1\dots i_n}\}$$ P <u>felosztás finomsága</u>

diam $T_{i_1\dots i_n}$: $T_{i_1\dots i_n}$ tégla átmérője

<u>megj.</u> $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ tégla átmérője:

Q''

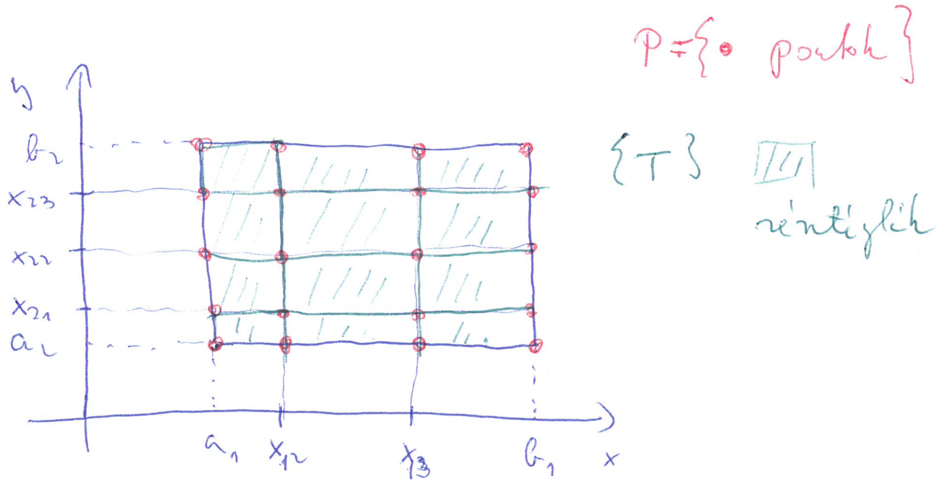
$$\operatorname{diam} Q=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2}$$



Def. A $Q=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ tégla **térfogata** (mértéke)

$$V(Q)\equiv\mu(Q)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

megj: $V(Q)\le(\operatorname{diam} Q)^n$



Def. Legyen P^1 és P^2 Q két felosztása.

P^2 **finomítása** P^1-nek, ha $P^1\subset P^2$.

$P=P^1\cup P^2$ P^1 és P^2 felosztás egyesítése

Mivel $P^1\subset P$ és $P^2\subset P$ $\rightsquigarrow$ P P^1 és P^2 **közös finomítása**

(P^k) **normális felosztássorozata** Q-nak, ha $\lim_{k\to\infty}\|P^k\|=0$.

Megj. (1) Ha $P=P_1\times\dots\times P_n \Longrightarrow \|P\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|P_k\|^2$, $\|P_k\|\le\|P\|$

(2) Ha $(P^k)=(P_1^k\times\dots\times P_n^k)$ normális

$\Longleftrightarrow$ (P_i^k) normális $\forall\, i=1,\dots,n$-re

287/

(3) $P^1 \subset P^2 \iff P_i^1 \subset P_i^2 \quad i=1,\dots,n$

(4) $Q = \bigcup_{i_1,\dots,i_n} T_{i_1\dots i_n}$

Def: $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény (valós)

! P a Q egy felosztása, melynek résztéglái: $T_{i_1,\dots,i_n}$

$$m_{i_1\dots i_n} := \inf_{\underline{x} \in T_{i_1\dots i_n}} \{f(\underline{x})\}$$

(f korlátossága miatt ezek végesek)

$$M_{i_1\dots i_n} := \sup_{\underline{x} \in T_{i_1\dots i_n}} \{f(\underline{x})\}$$

$s(f,P) := \sum m_{i_1\dots i_n} V(T_{i_1\dots i_n})$ $\quad$ P felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg

$S(f,P) := \sum M_{i_1\dots i_n} V(T_{i_1\dots i_n})$ $\quad$ P felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg

$O(f,P) := S(f,P) - s(f,P)$ $\quad$ P felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg

$\sigma(f,P) := \sum f(\underline{t}_{i_1\dots i_n}) V(T_{i_1,\dots,i_n})$ $\quad$ P felosztáshoz tartozó Riemann-közelítő összeg

ahol $\underline{t}_{i_1\dots i_n} \in T_{i_1\dots i_n}$ tetsz.

Az összegzéseket a felosztás összes résztégláján végezzük el.

TÉTEL Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor

(i) $s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P)$ $\forall P$ felosztásra

(ii) $\forall P^1 \subset P^2$-re $s(f,P^1) \leq s(f,P^2)$

$S(f,P^1) \geq S(f,P^2)$

(iii) $\forall P^1, P^2$-re $s(f,P^1) \leq S(f,P^2)$.

Biz. ugyanúgy, mint 1 változóban, csak a résztéglákon dolgozunk intervallumok helyett.

Def. $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos

$\underline{I} := \sup_P \{s(f,P)\}$ Darboux-féle alsó integrál

$\overline{I} := \inf_P \{S(f,P)\}$ Darboux-féle felső integrál

TÉTEL: $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos $\Rightarrow \underline{I}, \overline{I} \in \mathbb{R}$

és $\underline{I} \leq \overline{I}$, $0 \leq \overline{I} - \underline{I} < O(f,P)$.

Biz. ugyanúgy, mint 1 változóban.

Példa ① Ha $f(\underline{x}) = c \in \mathbb{R}$ konstans $\Longrightarrow \underline{I} = \overline{I}$

② Ha

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \underline{x} \in Q \text{ és } \underline{x}\ \forall \text{ koordinátája racionális} \\ 0, & \text{ha } \underline{x} \in Q \text{ és } \underline{x}\ \forall \text{ koordinátája irracionális} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$s(f,P) = 0$ $\forall$ P-re, hiszen $\forall$ résztégla tartalmaz olyan irracionális koordinátájú pontokat

$S(f,P) = V(Q)$ $\forall$ P-re, hiszen $\forall$ résztégla tartalmaz olyan racionális koordinátájú pontokat

$$\Longrightarrow \quad \underline{I} = 0 \neq \overline{I} = V(Q)$$

Def: Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható Q-n, ha $\underline{I} = \overline{I}$. Ekkor ezt a közös értéket az f függvény Q tégla feletti Riemann-integráljának nevezzük.

jel:

$$\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} \equiv \int_Q f = \underline{I} = \overline{I}$$

TÉTEL (Darboux-tétel)

$Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy Q $\forall\, P$ felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,

$$S(f,P) - \overline{I} < \varepsilon \quad \text{és} \quad \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon \quad \text{teljesül.}$$

Köv. Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor

a) Q $\forall\, (P^k)$ normális felosztássorozatára

$$\exists \lim_{k\to\infty} s(f,P^k) = \underline{I}, \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P^k) = \overline{I} \quad \text{és}$$

$$\lim_{k\to\infty} \omega(f,P^k) = \overline{I} - \underline{I}.$$

b) Q $\forall\, (P^k)$ normális felosztássorozatára

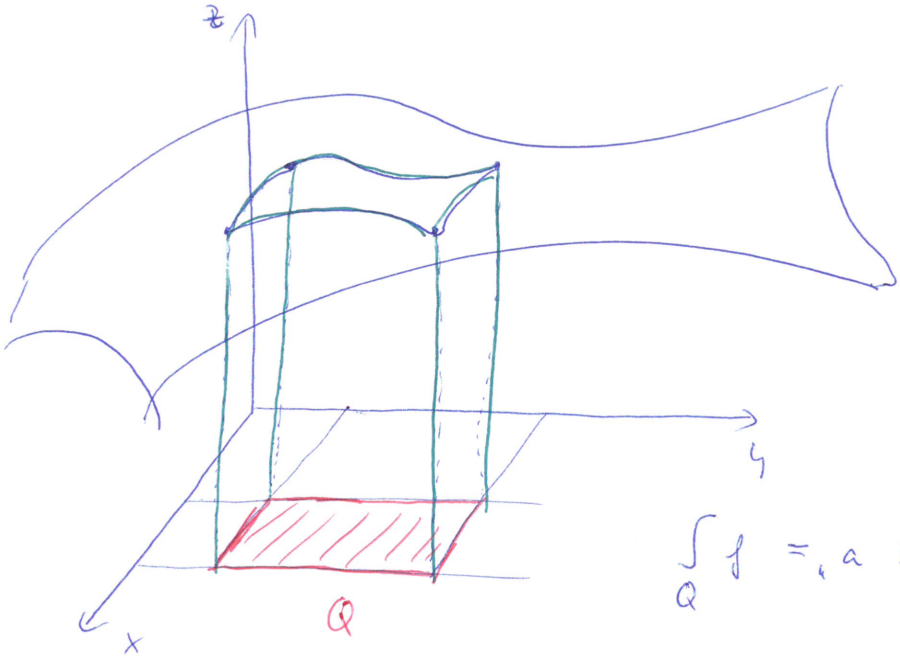
$\exists\, (\sigma^1(f,P^k)),\ (\sigma^2(f,P^k))$ Riemann-közelítő összeg sorozatok, melyekre:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P^k) = \underline{I}, \quad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P^k) = \overline{I}.$$

A bizonyítások ugyanazok, mint 1 változóban.

251)

Szemléltetés.



$\int_Q f$ = „a hasáb térfogata"

A Riemann-integrálhatóság kritériumai

TÉTEL $f: Q \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha $\exists\, I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy Q bármely olyan P felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,

$$|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon \text{ teljesül } \forall\, \sigma(f,P)\text{-re}.$$

Biz. Tfh $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \overline{I} =: I$

$\varepsilon > 0$ adott.

$\Rightarrow \exists\, P^0$ felosztása Q-nak, melyre $S(f,P^0) - \overline{I} < \varepsilon$ és $\underline{I} - s(f,P^0) < \varepsilon$

(def. miatt)

$\|P^0\| =: \delta(\varepsilon)$. Akkor, ha $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ esetén $\underline{I} = \overline{I} = I$ és

$$s(f,P^0) \le s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P) \le S(f,P^0)$$

252/ $\Rightarrow \quad |\sigma(f,P) - I| < \varepsilon \quad \forall\, \sigma(f,P)$-re ✓

Megfordítás: Legyen $\varepsilon > 0$,

- $\underline{I}\ \exists \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\ P^0$ felosztás, melyre

$$\underline{I} - s(f,P^0) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (*)$$

- a feltétel miatt $\exists\ I$, hogy $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\ \delta(\frac{\varepsilon}{3})$, hogy $\forall\ P'$-re, melyre $\|P'\| < \delta(\frac{\varepsilon}{3})$

$$|\sigma(f,P')) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (**)$$

Legyen $P = P^0 \cup P'$, így, hogy $\|P\| \le \|P'\|$ és $\|P\| \le \|P^0\|$,

$$\Downarrow \ (*), (**)$$

$$\underline{I} - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad |\sigma(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- $\frac{\varepsilon}{3V(Q)}$-hoz $\exists\ t_{i_1 \dots i_n} \in T_{i_1 \dots i_n}$, hogy

$$f(t_{i_1 \dots i_n}) - m_{i_1 \dots i_n} < \frac{\varepsilon}{3V(Q)}$$

$$\Rightarrow \sigma(f,P) - s(f,P) = \sum \left(f(t_{i_1 \dots i_n}) - m_{i_1 \dots i_n}\right) V(T_{i_1 \dots i_n}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3V(Q)} \sum V(T_{i_1 \dots i_n}) = \frac{\varepsilon}{3}$$

253/

$$\Longrightarrow \quad |\underline{I} - \overline{I}| \leq \underbrace{|\underline{I} - \sigma(f,P)| + |\sigma(f,P) - s(f,P)| + |s(f,P) - \overline{I}|}_{\substack{P \\ \delta\text{-egy}}} < \varepsilon$$

ha $\|P\| < \delta(\varepsilon) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$

Következésképpen $|\underline{I} - \overline{I}| < \varepsilon$, amiből $|\overline{I} - \underline{I}| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$-ra

$$\Downarrow$$

$\underline{I} = \overline{I} \rightsquigarrow f$ R-integrálható Q-n.

$\circ !$

<u>TÉTEL</u> (Riemann-kritérium)

$f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható Q-n, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ P felosztás, melyre

$$\sigma(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

<u>Biz.</u> Ha f R-integrálható, akkor $\underline{I} = \overline{I} = I$-re

$\exists$ P felosztás, melyre $\quad I - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $S(f,P) - I < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Longrightarrow \quad O(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

megfordítás hiányzik

$\circ !$

294)

Köv.: 1) Ha $f(\underline{x}) = c \in \mathbb{R}$ konstans

$$\hookrightarrow \int_Q k = k V(Q) = k \sum V(T_{i_1 \dots i_n})$$

$\forall P$ felosztásra

2) $Q \subset \mathbb{R}^n$, $\{Q_1, \dots, Q_n\} \subset \mathbb{R}^n$ téglák, melyek lefedik Q-t:

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$$

$$\Rightarrow V(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} V(Q_i)$$

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ megszámlálható sok $Q_1, Q_2, \dots$ tégla, hogy $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon$.

TÉTEL (Lebesgue-kritérium)

Az $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha f egy Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-beli halmaztól eltekintve folytonos.

Köv: Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható.

A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai

TÉTEL (az integrál additivitása téglákon)

Legyen Q_1 és $Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ két tégla melyre $\operatorname{int} Q_1 \cap \operatorname{int} Q_2 = \emptyset$ (nincs közös belső pontjuk) és $Q = Q_1 \cup Q_2$ is tégla (vagyis van közös lapjuk). Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos Riemann-int.ható Q_1-en és Q_2-n, akkor Q-n is és

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f .$$

Biz. triv. (ugyanúgy, mint $\mathbb{R}$-ben)

Megj. Kiterjeszthető ~~ko~~ véges sok téglára:

$Q = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ tégla, Q_i-knek $\nexists$ közös belső pontja

$f : Q \to \mathbb{R}$ R-int.ható Q_i-n $\forall i = 1, \dots, k$

$$\Downarrow$$

$$\int_Q f = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i} f$$

Az alábbi tételek bizonyítása megegyezik az 1 változós esetek bizonyításával:

TÉTEL (Az integrálás linearitása)

$f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.hatók Q-n, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ is Riemann-int.ható és

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g ,$$

256)

TÉTEL: • Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.ható, akkor f^2 is, és ha $\exists\, c>0$, hogy $|f(\underline{x})| \geq c$ $\forall \underline{x} \in Q$, akkor $\frac{1}{f}$ is Riemann-integrálható.

• Ha $f, g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.hatók, akkor $f \cdot g$ is és ha $\exists\, c>0$, hogy $|g(\underline{x})| > c$ $\forall \underline{x} \in Q$-ra, úgy $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható.

• $f: Q \to \mathbb{R}$ R-int.ható $\Rightarrow$ $|f|$ is R-int.ható és

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

• $f, g: Q \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in Q$ R-int.hatók

$$\Rightarrow \int_Q f \leq \int_Q g .$$

TÉTEL (Középértéktétel)

$f, g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.hatók, $0 \leq g(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in Q$

és $m \leq f(\underline{x}) \leq M$ $\forall \underline{x} \in Q$

$$\Rightarrow m \int_Q g \leq \int_Q f \cdot g \leq M \cdot \int_Q g$$

257/

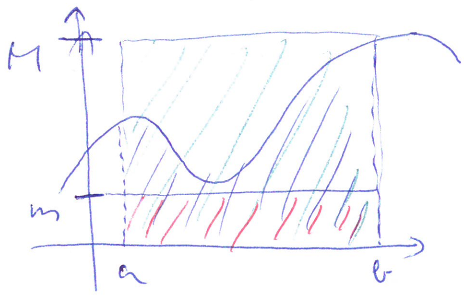
Köv

① $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.ható, $m \le f(\underline{x}) \le M \quad \forall \underline{x} \in Q$

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{1}{V(Q)} \int_Q f \le M .$$

Biz. $g \equiv 1$, $\int_Q 1 = V(Q)$ miatt.

(eml:



$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f \le M \quad)$$

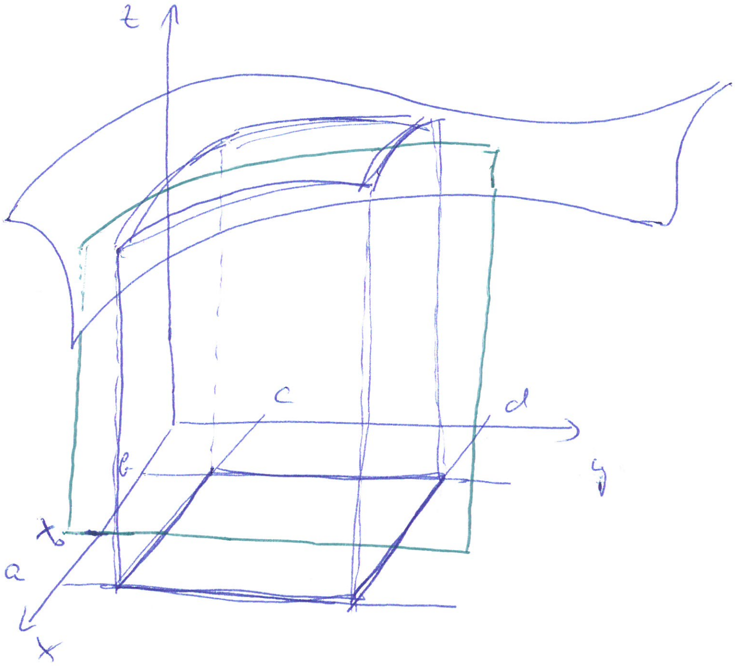
② Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists\, \underline{c} \in Q$, melyre

$$f(\underline{c}) = \underbrace{\frac{1}{V(Q)} \int_Q f}_{\text{integrálközép}}$$

Eddig: Láttuk, hogy a konstrukcióból adódóan minden 1-változós tulajdonság öröklődik.

Kérdés: Hogy kell kiszámolni?

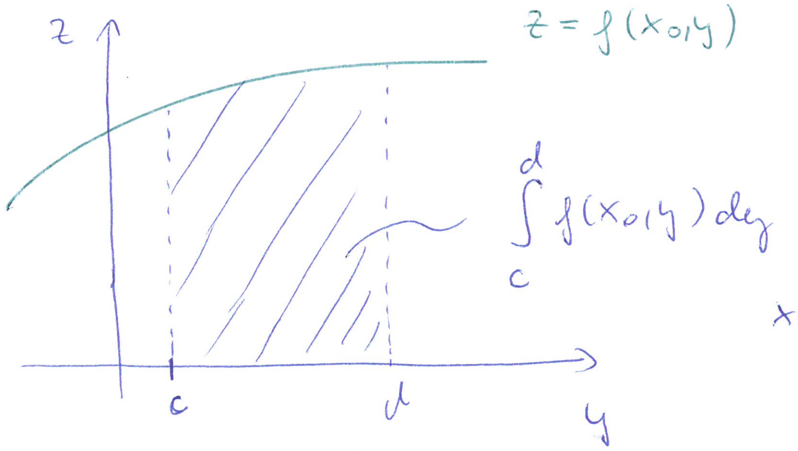
Ötlet: visszavezetjük alacsonyabb dimenziójú integrálokra.



$Q=[a,b]\times[c,d]$

Metsszük el a felületet az $x=x_0$ síkkal, ahol $x_0\in(a,b)$

↪ a metszetgörbe:



$x_0\in[a,b]$

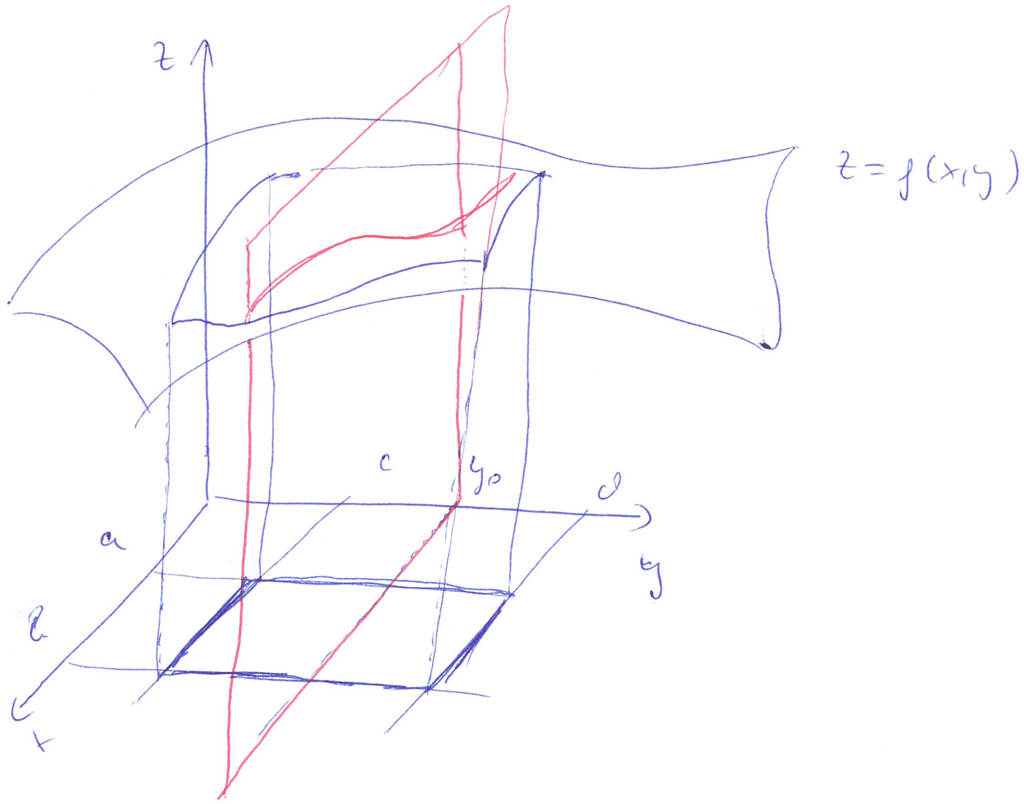
$\int_c^d f(x,y)\,dy =: g(x)$ paraméteres integrál = megadja egy szelet területét

↓

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

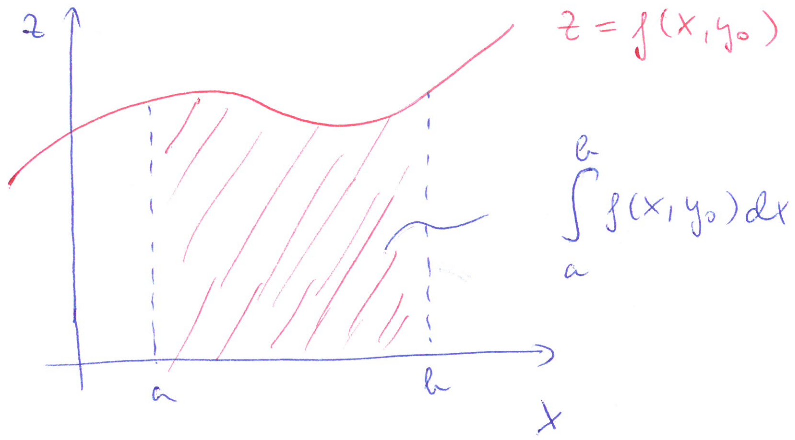
255)

Másik irányból is metszhetnénk volna:



Metsszük el a felületet az $y = y_0$ síkkal, ahol $y_0 \in [c,d]$

↳ a metszetgörbe



$\int_a^b f(x,y)\,dx =: h(y)$ paraméteres integrál = megadja egy szelet területét

$\Downarrow$

$$\int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

300/

TÉTEL (Fubini-tétel)

Legyen $Q = A \times B \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák.

Legyen $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $f(\underline{x}, \underline{y})$ $\underline{x} \in A$, $\underline{y} \in B$.

$$\underline{I}(\underline{x}) := \underline{\int}_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y}) \qquad \text{alsó integrál}$$

$$\overline{I}(\underline{x}) := \overline{\int}_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y}) \qquad \text{felső integrál}.$$

Ha $\exists \int_Q f$, akkor $\underline{I}$ és $\overline{I}$: $A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható

és

$$\int_Q f = \int_{\underline{x} \in A} \left(\underline{\int}_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y}) \right) = \int_{\underline{x} \in A} \left(\overline{\int}_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y}) \right).$$

Biz: • Q egy tetszőleges P felosztására $P = P_A \times P_B$

(P_A A egy felosztása, P_B B egy felosztása)

t_A : A tégla egy P_A által meghatározott egy felosztásának résztéglája (általános)

t_B : B tégla egy P_B által meghatározott egy felosztásának résztéglája (általános)

$t_A \times t_B$ Q tégla P által meghatározott általános résztéglája

301)

Azt mutatjuk belátni, hogy

$$s(f,P) \le s(\underline{I},P_A) \quad \text{ill.} \quad S(f,P) \ge S(\overline{I},P_A)$$

$\forall$ $t_A \times t_B$ téglalapra és $x_0 \in t_A$-ra:

$$m^f_{t_A \times t_B} \le f(x_0, y) \qquad \forall y \in t_B$$

$$\Downarrow$$

$$m^f_{t_A\times t_B} \le m^{f(x_0,y)}_{t_A \times t_B}$$

$\hookrightarrow$ $\forall$ $x_0 \in t_A$

$$\sum_{t_B} m^f_{t_A\times t_B} V(t_B) \le s(f(x_0,y),P_B) \le \int_{y\in B} f(x_0,y) = \underline{I}(x_0)$$

$\Rightarrow$ $\forall$ t_A-ra: $\displaystyle\sum_{t_B} m^f_{t_A\times t_B} V(t_B) \le m^{\underline{I}}_{t_A}$ $\quad / \cdot V(t_A)$ $+\sum$

$$\underbrace{\sum_{t_A}\sum_{t_B} m^f_{t_A\times t_B} \underbrace{V(t_A)V(t_B)}_{=V(t_A\times t_B)}}_{s(f,P)} \le \underbrace{\sum_{t_A} m^{\underline{I}}_{t_A} V(t_A)}_{s(\underline{I},P_A)}$$

Mivel $\underline{I} \le \overline{I}$, $s(\underline{I},P_A) \le s(\overline{I},P_A)$, $S(\underline{I},P_A) \le S(\overline{I},P_A)$

$\Rightarrow$ $s(f,P) \le s(\underline{I},P_A) \le S(\underline{I},P_A) \le S(\overline{I},P_A) \le S(f,P)$

és

$s(f,P) \le s(\underline{I},P_A) \le s(\overline{I},P_A) \le S(\overline{I},P_A) \le S(f,P)$

302)

∘ f Riemann-integrálható $\xRightarrow{\text{R-kritérium}}$ ~~$\underline{I}$ és $\overline{I}$ Riemann-integrálható~~

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, P = P_A \times P_B$ felosztása Q-nak, melyre

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$S(\underline{I},P_A) - s(\underline{I},P_A) < \varepsilon \quad \text{és}$$

$$S(\overline{I},P_A) - s(\overline{I},P_A) < \varepsilon$$

$$\Downarrow \text{ Riemann-kritérium}$$

$\underline{I}$ és $\overline{I}$ R-integrálható

$$s(\underline{I},P_A) \le \int_A \underline{I} \le S(\underline{I},P_A) \quad \text{és} \quad s(\overline{I},P_A) \le \int_A \overline{I} \le S(\overline{I},P_A)$$

$$\Downarrow$$

$$s(f,P) \le \int_A \underline{I},\ \int_A \overline{I},\ \int_Q f \le S(f,P)$$

ε tetszőleges $\Longrightarrow$ ∘ !

<u>Megj:</u> A másik sorrendben való integrálásra ugyanígy.

303/

Köv:

(1) $Q = A \times B$ $\quad A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m$ téglák

$f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos

Ha $\exists \int_Q f$ és $\forall\, \underline{x} \in A$-ra $\exists \int_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y})$ vagy

$\forall\, \underline{y} \in B$-re $\exists \int_{\underline{x} \in A} f(\underline{x}, \underline{y})$, akkor

$$\int_Q f = \int_{\underline{x} \in A} \left[\int_{\underline{y} \in B} f(\underline{x}, \underline{y}) \right] = \int_{\underline{y} \in B} \left[\int_{\underline{x} \in A} f(\underline{x}, \underline{y}) \right].$$

(2) Spec $\quad A = [a, b] \subset \mathbb{R},\ B = [c, d] \subset \mathbb{R}$

$f : Q = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ korlátos, melyre

$$\exists \int_Q f := \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$$

és $\forall\, x \in [a,b]$-re $\exists \int_c^d f(x,y)\, dy$

vagy $\forall\, y \in [c,d]$-re $\exists \int_a^b f(x,y)\, dx$, akkor

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx$$

vagy

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy.$$

304/ 3

$Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n]$

$f: Q \to \mathbb{R}$ spojitá

$$\Rightarrow \int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

[illegible] [illegible].

Př) $Q := [0,2] \times [0,1]$

$$\iint_Q (4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^2 \Big[\underbrace{\int_0^1 (4-x-y)\,dy}_{\left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = 4 - x - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - x} \Big] dx = \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - x\right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= 7 - 2 = \underline{\underline{5}}$$

naopak

$$\iint_Q (4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^2 (4-x-y)\,dx}_{\left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{2} = 8 - 2 - 2y = 6 - 2y} \Big] dy = \int_0^1 (6 - 2y)\,dy = \left[6y - y^2\right]_0^1 =$$

$$= 6 - 1 = \underline{\underline{5}}$$