Kalkulus 2,
11. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Függvénysorozatok

1. Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok a konvergenciatartományukon? Adjuk meg azt a legnagyobb tartományt, ahol egyenletesen konvergensek!

   (a) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$,

   (b) $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$,

   (c) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

   (d) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$,

   (e) $f_n(x) = nxe^{-nx}$,

   (f) $f_n(x) = \frac{\ln n^x}{n^x}$, $x > 0$,

   (g) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$, $x > 0$.

2. Mutassuk meg, hogy az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x^2 & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{ha } \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

   függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

3. Tekintsük az $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$ függvénysorozatot!

   (a) Egyenletesen konvergens-e a sorozat? (Használjuk a Dini-tételt!)

   (b) Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ az $[1,2]$ intervallumon?

(c) Igaz-e, hogy
$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 f_n(x) \ \mathrm{d}\, x \quad ?$$

4. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f_n : H \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy ha az f_n függvények monoton növekedőek, és $f_n \to f$ pontonént a H-n, akkor f is monoton növekedő.

5. Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és
$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = g(x)x^n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ga $g(1) = 0$.

6.
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \ \mathrm{d}\, x =?$$

7.
$$\lim_{n\to\infty} \int_2^5 nxe^{-nx} \ \mathrm{d}\, x =?$$

Függvénysorok 1.

1. Döntsük el, hogy egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok a megadott T tartományon!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$, $T = [-a, a]$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$, $T = \mathbb{R}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)x^n}{(1-x^{2n})}$, $T = (0,1)$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $T = [0, 2\pi]$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2}$, $T = \mathbb{R}$

2. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n}$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$