Kalkulus 2,
12. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Függvénysorok 2.

1. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^{2n} \cos x$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a, b]$ intervallumon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{e^{nx}} \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b \frac{x}{e^x - x} \,\mathrm{d}\, x.$$

3. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

   (a)

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 e^{-nx} + \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

   (b)

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n = 0$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

függvény folytonos és akárhányszor deriválható $(1,\infty)$-n.

Hatványsorok

1. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{5^{n+2}}x^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények adott x_0 körüli Taylor-sorát és konvergenciatartományát! Előállítja-e a függvényt a Taylor-sor a konvergenciatartományon?

   (a) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3, \quad x_0 = 1,$

   (b) $f(x) = e^{-2x+1}, \quad x_0 = 3,$

   (c) $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0,$

   (d) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \quad x_0 = 0,$

   (e) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0,$

   (f) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}, \quad x_0 = 0$

   (g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0$

   (h) $f(x) = \ln\cos x, \quad x_0 = 0$

3. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor négyzete, azaz önmagával vett Cauchy-szorzata és deriváltsora azonos.

4. Számoljuk ki az alábbi integrálokat 10^{-5} pontossággal!

   (a)
   $$\int_0^1 \cos x^2 \, \mathrm{d}\, x$$

   (b)
   $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}\, x$$

   (c)
   $$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} \, \mathrm{d}\, x$$

   (d)
   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1+x^4}}$$