Kalkulus 2,
13. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Fourier-sorok

1. Adjuk meg a következő $2p$-szerint periodikus függvények Fourier-sorát! (A függvényeket csak a $(-p, p]$ perioduson adjuk meg.) Hol állítja elő a Fourier-sor a függvényt? Hol beszélhetünk egyenletes konvergenciáról?

   (a) $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x \le \pi,$

   (b) $f(x) = |x| - 1, \quad -1 < x \le 1,$

   (c) $f(x) = e^x, \quad -1 < x \le 1,$

   (d) $f(x) = \cos^3 x, \quad -\pi < x \le \pi,$

   (e)
   $$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } -2 < x < -1 \\ x, & \text{ha } -1 \le x \le 1 \\ 2, & \text{ha } 1 < x < 2. \end{cases}$$

2. Írjuk fel az
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
   $f(x + 2\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény Fourier-sorát! Határozzuk meg a sorfejtés segítségével a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ sorösszeget!

3. Határozzuk meg az $f(x) = \sin \alpha x$, $f(x+2\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény Fourier-sorát, amennyiben
   (a) $\alpha \in \mathbb{N}$
   (b) $\alpha \notin \mathbb{N}$.
4. Állítsuk elő az I intervallumon az f függvényeket tisztán szinuszos trigonometrikus sor alakjában!
   (a) $f(x) = \cos x, \quad I = (0, \pi)$,
   (b) $f(x) = |\sin x|, \quad I = (-\pi, 0)$,
   (c) $f(x) = 1, \quad I = (0, 5)$.
5. Állítsuk elő az I intervallumon az f függvényeket tisztán koszinuszos trigonometrikus sor alakjában!
   (a) $f(x) = \sin 2x, \quad I = (0, \pi)$,
   (b) $f(x) = x, \quad I = (-\pi, 0)$,
   (c) $f(x) = 1, \quad I = (0, 5)$.
6. Legyen g egy folytonos 2π-periodikus függvény, melynek Fourier-sora:
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$
   Tegyük fel, hogy f szintén 2π periodikus függvény, mely kielégíti az
$$f''(x) + kf(x) = g(x)$$
   differenciálegyenletet, ahol $k \neq n^2$ $(n = 1, 2, \dots)$. Keressük meg f Fourier-sorát és mutassuk meg, hogy az mindenütt konvergens.
7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre
$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2}).$$
   Bizonyítsuk be, hogy f konstans.
8. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, melyre
$$\int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 0 = f(2\pi) - f(0).$$
   Mutassuk meg, hogy
$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}\, x \le \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \, \mathrm{d}\, x.$$