Kalkulus 2,
8. Feladatsor

2020/21. 2. félév

Kettős- és hármas integrálok

1. Számítsuk ki az alábbi kettős és hármas integrálokat a megadott tartományon!
   (a) $\iint_T \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,T$, ahol T a $(0,0),(1,1),(0,1)$ csúcspontú háromszög.
   (b) $\iint_T xy^2\,\mathrm{d}\,T$, ahol $T=\{(x,y): x^2+y^2\le 1, y\ge 1-x\}$.
   (c) $\iiint_V e^{x+y+z}\,\mathrm{d}\,V$, ahol
   $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\le z\le x+y, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.
   (d) $\iiint_V \frac{\mathrm{d}\,T}{(1+x+y+z)^3}$, ahol V az $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ és $z=0$ síkokkal határolt korlátos térrész.

2. Cserélje meg az integrálás sorrendjét!
   (a)
   $$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$
   (b)
   $$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x.$$
   (Azt a sorrendet válasszuk, melyben az integrálás normáltartományon történik!)

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

(a)

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y} \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x,$$

(b)

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y.$$

Integráltranszformációk

1. Határozza meg az alábbi integrálokat!

   (a) Határozza meg az $x^2 = ay$, az $x^2 = by$, az $x^3 = cy^2$ illetve az $x^3 = dy^2$ görbék által határolt korlátos síktartomány területét, ahol $0 < a < b$ és $0 < c < d$.

   (b) Legyen T az $5x + 3y = 4$, $5x + 3y = 9$, $y = 2x$, $y = 5x$ egyenesek által közrezárt korlátos tartomány. Számoljuk ki az $\int_T x \,\mathrm{d}\, T$ integrált!

   (c) Határozza meg az $\iint_T (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\, T$ integrál értékét, ahol T az $x^2 - y^2 = 1$, az $x^2 - y^2 = 9$, az $y = 1/2x$ és az $y = 2/x$ görbék által határolt első síknegyedbe eső korlátos tartomány!

   (d)

   $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y,$$

   (e)

   $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x,$$

   (f) $\iint_T xy \,\mathrm{d}\, T$, ahol T az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körök által határolt korlátos síkrész.

   (g) $\iint_T (x^3 - 3xy^2) \,\mathrm{d}\, T$, ahol

   $$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 9, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

   (h) $\iiint_V \mathrm{d}\, V$, ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

   (i) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,\mathrm{d}\, V$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 = z$ felülettel határolt tartomány.

(j)

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^1 z\sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, x.$$

(k) Milyen arányban osztja ketté az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2+y^2 = 8$ kör területét?

Alkalmazások, vegyes feladatok

1. Határozza meg az alábbi V testek térfogatát!

   (a) V az $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ alapkörű egyenes körhenger által határolt korlátos tartomány.

   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$.

   (c) V az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, az $y = \frac{bx}{a}$, az $y = 0$ illetve $z = 0$ felületek által határolt $x > 0$ térrész.

   (d) V az $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = x$ felület által határolt tartomány.

2.

$$\iiint_v \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, z = ?,$$

ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

3. Egy mérhető $T \subset \mathbb{R}^3$ tartományt $\rho = \rho(x, y, z)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás tömegközéppontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_T x\rho\, \mathrm{d}\, T}{M}, \quad y_s = \frac{\int_T y\rho\, \mathrm{d}\, T}{M}, \quad z_s = \frac{\int_T z\rho\, \mathrm{d}\, T}{M},$$

ahol $M = \int_T \rho\, \mathrm{d}\, T$ a test tömege.

   (a) Határozzuk meg az (x, y) síkon álló és fölötte elhelyezkedő R sugarú homogén ($\equiv$ állandó sűrűségű) félgömb tömegközéppontjának koordinátáit!

   (b) Határozzuk meg a homogén csonkakúp tömegközéppontjának az alaptól mért távolságát, ha az alap- illetve fedőkörlap sugara R illetve r, a magassága pedig h.