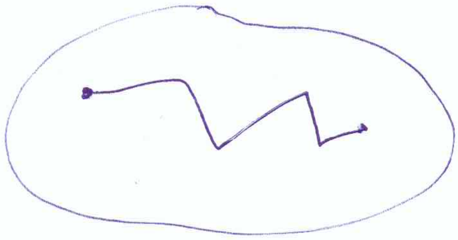
49/

<u>Eml.</u> (X,d) metrikus tér, $G \subset X$ nyílt halmaz <u>összefüggő</u>, ha nem bontható fel két nem üres diszjunkt nyílt halmaz uniójára

<u>TÉTEL</u> 1) G nyílt halmaz összefüggő $\Longleftrightarrow$ $\forall$ két pontja összeköthető G-ben haladó töröttvonallal



2) $\forall$ nyílt halmaz felbontható páronként diszjunkt összefüggő nyílt halmazok uniójára.

Hogyan általánosíthatjuk az összefüggőség fogalmát nem nyílt halmazokra?

<u>Def.</u> (X,d) metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$ <u>nem összefüggő</u>, ha

$A = B \cup C$, ahol $B \neq 0$, $C \neq 0$, $B \cap C = \emptyset$ diszjunktak

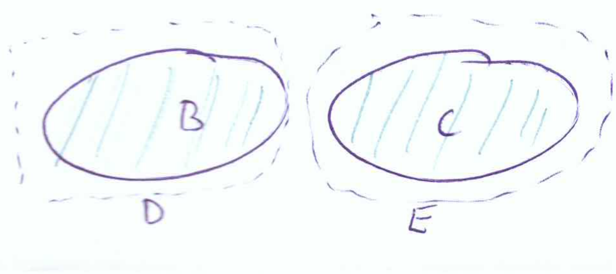
és $B = A \cap D$, $C = A \cap E$

alkalmas nyílt $D, E \subset X$ halmazokkal.

Ha A-ra fentiek nem igazak $\Longrightarrow$ A összefüggő

<u>Megj:</u> Ha A nyílt $\Longrightarrow$ feltehető, hogy B és C nyílt, így D és E-re nincs szükség (választható B-nek és C-nek) $\Longrightarrow$ visszakapjuk az eredetit.

$A = B \cup C$



<u>Def:</u> Az összefüggő nyílt halmazokat <u>tartományoknak</u> hívjuk.

<u>Áll:</u> $\mathbb{R}$-ben egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres.
(Cantor-féle metszettétel)

$\Downarrow$

<u>TÉTEL</u> (Cantor tétele)

Ha az $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ halmazok mindegyike korlátos, zárt és nem üres, akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset .$$

<u>Biz:</u> ! $\underline{x}_n \in A_n$ $\forall n$ tetsz. $\Rightarrow$ $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_1 \Rightarrow (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat

Bolzano–Weierstrass $\Longrightarrow$ $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek $\exists$ konvergens részsorozata: $(\underline{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_{n_k} = \underline{a}$$

Megmutatjuk, hogy $\underline{a} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Legyen n rögzített. Ha k elég nagy $\rightarrow$ $n_k > n$, így $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_n$

és véges sok tagtól eltekintve $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tagjai benne vannak A_n-ben

A_n zárt $\Longrightarrow$ $\underline{a} \in A_n$

Mivel n tetszőleges $\Longrightarrow$ $\underline{a} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Lefedések, kompaktság

TÉTEL (Lindelöf-tétel)

Ha nyílt halmazok egy rendszere lefed egy A halmazt, azaz Γ valamely indexhalmaz, G_γ nyílt $\forall \gamma \in \Gamma$-ra és

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma ,$$ akkor a nyílt halmazok közül

kiválaszthatunk megszámlálhatóan sokat, amely szintén lefedik A-t.

Megj A racionális gömbök halmaza megszámlálható.

Biz Legyen $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ racionális gömbök egy sorozatba rendezése.

(A Megj miatt ez megtehető!)

Legyen $\mathcal{G}$ egy nyílt halmazokból álló rendszer, mely lefedi A-t.

$\forall$ B_n gömbre, amelyik benne van valamelyik $G \in \mathcal{G}$ nyílt halmazban, válasszunk egy $G_n \in \mathcal{G}$-t melyre $B_n \subset G_n$

$$\Downarrow$$

kiválasztottuk $\mathcal{G}$ rendszer egy megszámlálható részrendszerét: $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \subset G_n$

52)

Az így kiválasztott nyílt halmazok uniója = az összes $\mathcal{G}$-beli uniója:

Tfh $x \in \underbrace{\bigcup \mathcal{G}}_{\text{összes } \mathcal{G}\text{-beli uniója}}$ $\rightsquigarrow$ valamely $G \in \mathcal{G}$-re: $x \in G$

láttuk: minden nyílt halmaz előáll racionális gömbök uniójaként

$\Downarrow$

$\exists\, B_n$ rac. gömb: $x \in B_n \subset G$

Mivel $G_n \in \mathcal{G}$ olyan volt, hogy $B_n \subset G_n$ $\rightsquigarrow$ $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

$\Rightarrow$ Ha $\mathcal{G}$ lefedi A-t akkor $A \subset \bigcup_n G_n$ (vagyis G_n-ek is lefedik A-t) ☺!

Példák

① $\{B(0,r) : r > 0\}$ kontinuum számosságú halmaz-család lefedik $\mathbb{R}^n$-t

$\Downarrow$ Lindelöf-t.

megszámlálhatóan sok is lefedi, pl:

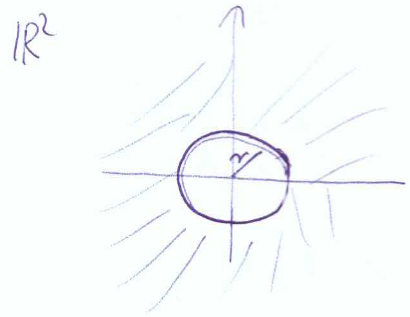
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n) = \mathbb{R}^n$$

Mivel világos, hogy véges sok $B(0,r)$ nem elég a lefedéshez.

53/

(2.)

$$G_r := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > r\}$$



$\downarrow$

ezek lefedik $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazt

$\Downarrow$ Lindelöf

megszámlálhatóan sok is lefedi, pl:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{1/n} = A$$

viszont véges sok nem fedi ~~le~~ le körülük A-t.

$\Downarrow$

Ezekben a példákban a megszámlálható nem szűkíthető le végesre, vagyis egy halmaz lefedő nyílt rendszeréből nem biztos, hogy kiválasztható <u>véges részfedés</u>.

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz <u>kompakt</u>, ha $\forall$ nyílt lefedéséből kiválasztható <u>véges</u> részfedés.

<u>TÉTEL</u> (Borel-tétel)

$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ korlátos és zárt.

54)

$\Rightarrow$: Tfh <u>A kompakt</u>.

$$A \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\underline{0},k) \rightsquigarrow \exists\ N\in\mathbb{N}, \text{ melyre}$$

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(\underline{0},k) = B(0,N)$$

↳ A korlátos ✓

<u>A zárt</u>: elég megmutatni, hogy, ha $(x_n)\subset A$ és $\underline{x}_n \to \underline{a}$, akkor $\underline{a}\in A$.

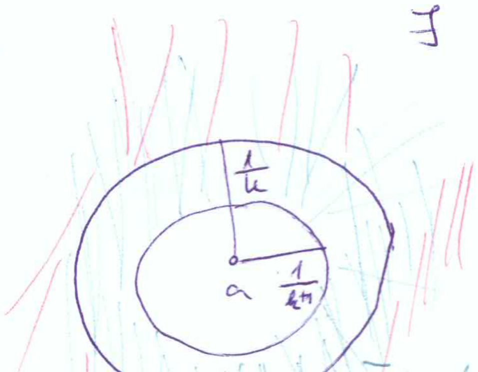
$\overline{B}(\underline{a},r)$ gömbök zártak $\forall\ r>0$-ra $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\underline{a},r)$ nyíltak

Tfh $\underline{a}\notin A$ $\rightsquigarrow$ $A \subset \mathbb{R}^n\setminus\{\underline{a}\} \underset{\substack{\uparrow\\ (2)\text{pl.}}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}(\underline{a},\tfrac{1}{k})\right)$ nyílt lefedés

$\Downarrow$ A kompakt

$$\exists\ K\in\mathbb{N}:\quad A\subset \bigcup_{k=1}^{K}\left(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}(\underline{a},\tfrac{1}{k})\right) =$$

$$= \mathbb{R}^n\setminus\overline{B}(\underline{a},\tfrac{1}{K})$$



$\overline{B}(0,\frac{1}{k+1})^c$

$\cup$

$\overline{B}(0,\frac{1}{k})^c$

de $\underline{x}_k \to \underline{a}$, így $x_k \in B(\underline{a},\frac{1}{K})\cap A$ m.m. k-ra

$\Downarrow$

↯, hiszen

$(\underline{x}_k)\subset A$

$\Rightarrow$ <u>A zárt</u> ✓

55/

$\Leftarrow$: Tfh A korlátos és zárt

Tfh A-t lefedi a nyílt halmazokból álló $\mathcal{G}$ rendszer

$\Downarrow$ Lindelöf-tétel

$\mathcal{G}$-ből kiválasztható egy megszámlálható $\{G_1, G_2, \dots\}$ részrendszer, amely szintén lefedi A-t

$$F_n := A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i = A \cap \underbrace{\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)}_{\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)^c = A_n} \quad \forall n\text{-re}$$

- F_n zártak

  ($\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ nyílt, $A_n = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ zártak $\Rightarrow F_n = A \cap A_n$ is zárt.)

- F_n korlátosak

  ($F_n \subset A$ korlátos)

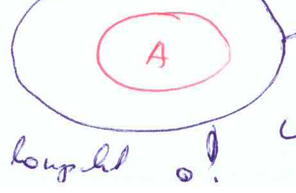
- $F_1 \supset F_2 \supset \dots\dots$

↳ Ha F_n halmazok egyike sem üres $\xRightarrow{\text{Cantor-tétel}}$ $\bigcap_n F_n = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \neq \emptyset$

↯ mert $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

$\exists$ olyan n, melyre

$F_n = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i = \emptyset$ $\Longleftarrow$



$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$: véges sok G_i is lefedi $\Rightarrow A$ kompakt ☺!

↳ $A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$

Megj: (1) Lényeges, hogy a fedő halmazok nyíltak!

pl: $$[0,1] = \{0\} \cup \Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{n}\right]}_{[\frac{1}{2},1] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{6},\frac{1}{3}] \cup \dots} \Big)$$

de ebből a zárt fedésből nem választható ki véges részfedés.

(2) sem a korlátosság, sem a zártság nem elhagyható:

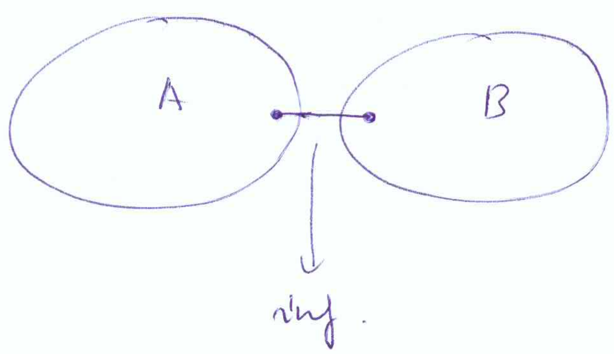
Pl | $\mathbb{R}$-ben:

- $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$
- $(-1,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

} nem választható ki véges részfedés.

Def: $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nem üresek távolsága

$$d(A,B) = \inf\{\|x-y\| : x \in A, y \in B\}$$



17/

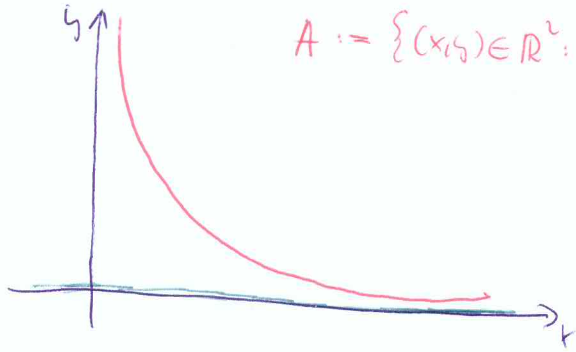
<u>TÉTEL</u> Ha A és B diszjunkt, zárt halmazok, amelyek közül legalább az egyik korlátos, akkor

(i) $\exists\ \underline{a} \in A,\ \underline{b} \in B$, hogy $d(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{a} - \underline{b}\|$

(ii) $d(A,B) > 0$.

<u>Megj</u> $d(A,B) = 0$ lehetséges, ha diszjunktak és nem korlátosak

pl:



$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x},\ x > 0\}$

$\Longrightarrow\ d(A,B) = 0$

A, B zártak

$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

<u>Biz</u> (i) Legyen $d(A,B) = d$.

$\forall n \in \mathbb{N}$-re legyen $\underline{a}_n \in A,\ \underline{b}_n \in B$ olyan, hogy

$$\|\underline{a}_n - \underline{b}_n\| < d + \frac{1}{n}$$

A és B közül legalább az egyik korlátos $\Longrightarrow$ $(\underline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\underline{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozatok

$\Downarrow$ B-W

$\exists$ konvergens részsorozatuk $\underline{a}$ ill $\underline{b}$ határértékkel

58)

A és B zártak $\Rightarrow$ $\underline{a} \in A$, $\underline{b} \in B$

$$\|\underline{a}-\underline{b}\| = \lim_{k\to\infty} \|\underline{a}_{n_k} - \underline{b}_{l_k}\| \leq d \quad \Rightarrow \|\underline{a}-\underline{b}\| = d$$

de $d(A,B)=d \Rightarrow \|\underline{a}-\underline{b}\| \geq d$

(ii) ebből már ~~gyak~~ nyilvánvaló!