1/

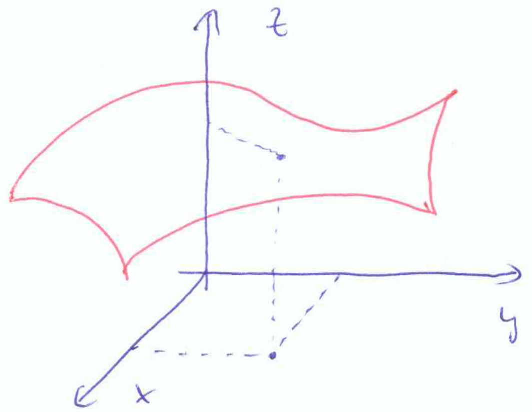
Többváltozós analízis

Általában

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ „vektor-vektor" függvények

Spec • $m=1$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvények (vektor-skalár függvények)

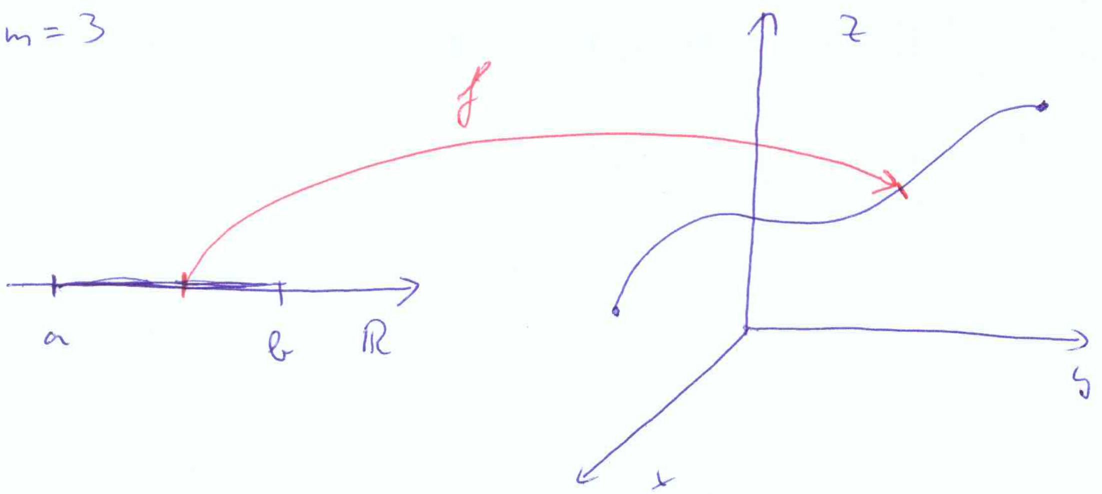
pl: $n=2$



$z = f(x,y)$ → felületek

• $n=1$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^m$

pl. $m=3$



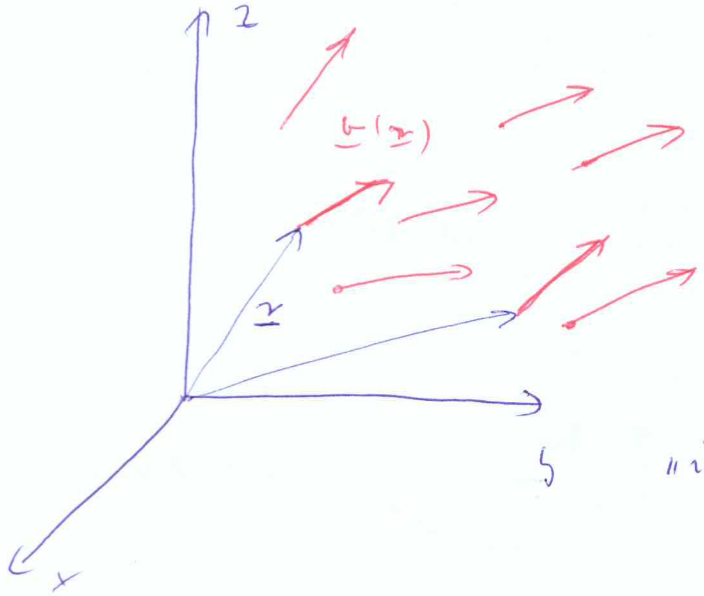
$f: \underset{[a,b]}{\overset{\cap}{t}} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^3$ térgörbék

$m=2$ → síkgörbék

2/

- $\underline{n=m=3}$ $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\underline{r}}} \mapsto \underline{v}(\underline{r}) \in \mathbb{R}^3$

vektor-vektor függvények



„iránymező"

<u>pl:</u>

- áramlási terek – sebességtér

  $\underline{v}(\underline{r})$ = az $\underline{r}$ helyen lévő részecske sebessége

- ~~erőterek~~ erőterek – mágneses tér, elektromos tér, gravitációs tér

pl. $\underline{E}(\underline{r})$ = $\underline{r}$ helyen ható elektromos térerősség

$\underline{F}(\underline{r})$ = $\underline{r}$ helyen ható erő

3/

Az $\mathbb{R}^n$ tér topológiája

Emlékeztető: $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz

$d: X \times X \to \mathbb{R}$ metrika (távolság) X-en, ha

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ szimmetrikus

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

Δ-egyenlőtlenség

$\Rightarrow$ (X,d) metrikus tér.

$X = \mathbb{R}^n$ n-dimenziós valós vektortér

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \underline{x} \in \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

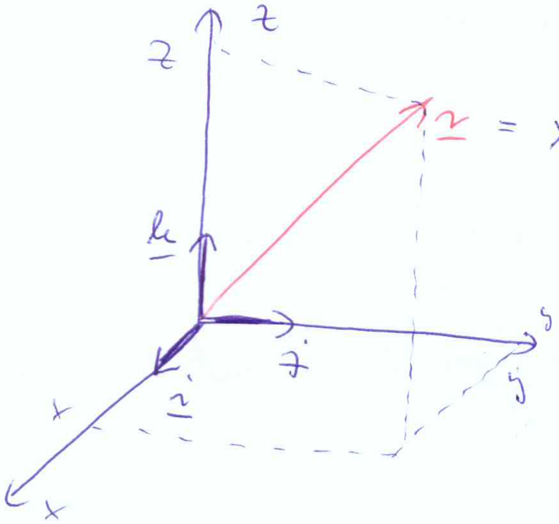
$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$\in$ valamely rögzített kanonikus bázisban dolgozunk.

$$c \cdot \underline{x} = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_1 \\ c x_2 \\ \vdots \\ c x_n \end{pmatrix}$$

4)

pl: $\mathbb{R}^3$-ben



$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$-en többféleképpen bevezethetünk metrikát:

① $$d(\underline{x},\underline{y}) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \underline{x} \neq \underline{y} \\ 0, & \text{ha } \underline{x} = \underline{y} \end{cases} \qquad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

diszkrét metrika

② $$\boxed{d_p(\underline{x},\underline{y}) = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right]^{1/p}} \qquad \infty > p \geq 1$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

p-metrika

Spec • $p = 1$ $\quad d_1(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

• $p = 2$ $\quad d_2(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ Euklideszi-metrika

5)

③ $\boxed{d_\infty(\underline{x},\underline{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i=1,\dots,n\}}$

<u>jelölés oka</u>

belátható
$$\lim_{p\to\infty} d_p(\underline{x},\underline{y}) = d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \qquad \forall\, \underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$$

<u>Megj</u>

1) $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \le d_1(\underline{x},\underline{y}) \le n\cdot d_\infty(\underline{x},\underline{y})$

2) $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \le d_2(\underline{x},\underline{y}) \le \sqrt{n}\, d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \qquad \forall\, \underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$

3) $\frac{1}{\sqrt{n}} d_1(\underline{x},\underline{y}) \le d_2(\underline{x},\underline{y}) \le d_1(\underline{x},\underline{y})$

Később visszatérünk ezek következményeire.

4) $\forall$ d metrikára fennáll, hogy

$$|d(\underline{x},\underline{z}) - d(\underline{y},\underline{z})| \le d(x,y) \qquad x,y,z\in X$$

ugyanis: Δ-egyenlőtlenségből:

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

$$\Downarrow$$

$$d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$$

$x \longleftrightarrow y$ csere

$$d(y,z) - d(x,z) = -(d(x,z) - d(y,z)) \le d(y,x) = d(x,y)$$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$$

!

6)

Def: $X \neq \emptyset$ lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ test felett
($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ nekünk)

$\|.\| : X \to \mathbb{R}$ norma, ha

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ és $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (Δ-egyenlőtlenség)

$\Rightarrow$ $(X, \|.\|)$ normált tér

$d(x,y) := \|x-y\|$ metrika ($\|.\|$ norma által indukált metrika)

Spec: $X = \mathbb{R}^n$

- $\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Rightarrow d_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \Rightarrow d_2(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- $\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \Rightarrow d_p(x, y)$
- $\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} \Rightarrow d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \ldots$

7/

Def. $X \neq 0$ vektortér $\mathbb{K}$-felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$)

$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ skaláris (belső) szorzat, ha

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$

2) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ és $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

3) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{K}, \; x, y \in X$

4) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad x, y, z \in X$

Megj. (1) 3), 4) $\Rightarrow$ $\langle \cdot , \cdot \rangle$ a második változójában lineáris

(mi mostantól ezt a konvenciót követjük)

(2)

- $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\langle y, \lambda x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$

- $\langle y+z, x \rangle = \overline{\langle x, y+z \rangle} = \overline{\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle} = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$

$\hookrightarrow$ az első változóban konjugált lineáris

(3) $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ skalárszorzatos vagy Euklideszi-tér

8/

③ Miért van miheg 1, -ben a konjugálásra?

Tfh $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ mindenhol.

$\hookrightarrow$ $\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\langle ix, ix \rangle} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konjugálás nélkül}}}{i \cdot i} \langle x, x \rangle = - \langle x, x \rangle < 0$: ↯

$x \neq 0$

⑤ Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ a konjugálásra nincsen szükség

$\Downarrow$

valós Euklideszi-terek.

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Euklideszi-tér

$\Downarrow$

$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$ $\underline{x} \in X$ normát definiál

(Euklideszi-norma)

$\Downarrow$

$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle}$ $\Rightarrow$ Euklideszi-metrika

9)

$\mathbb{R}^n$-en
$$\langle \underline{x}, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \underline{x}^T \cdot y =$$
$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

az indukált ~~metrika~~ norma:
$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \left(= \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}\right)$$

Megj Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség

$$\boxed{|\langle \underline{x}, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad x, y \in X}$$

$=$ $\Longleftrightarrow$ ha x és y lineárisan összefüggők.

Biz • Tfh $\underline{x}$ és y lineárisan összefüggők $\Longleftrightarrow$ $\underline{x} = \lambda y$ $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \cdot \langle y, y \rangle = \langle \lambda y, \lambda y \rangle \cdot \langle y, y \rangle = |\lambda|^2 \langle y, y \rangle^2 =$$
$$= |\lambda \langle y, y \rangle|^2 = |\langle y, \lambda y \rangle|^2 = |\langle y, \underline{x} \rangle|^2 = |\langle \underline{x}, y \rangle|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\underline{x}\|^2 \cdot \|y\|^2 = |\langle \underline{x}, y \rangle|^2 \quad \checkmark$$

10/

Tfh $\underline{x}$ és $\underline{y}$ lin. függetlenek, $\underline{y} \neq \underline{0}$

$\hookrightarrow$ $\underline{x} - \lambda \underline{y} \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow 0 < \langle \underline{x} - \lambda \underline{y}, \underline{x} - \lambda \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle - \bar{\lambda} \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle +$$

$$+ |\lambda|^2 \cdot \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad z \in \mathbb{C}}}{=} \langle x, x \rangle - 2 \operatorname{Re} (\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle) + |\lambda|^2 \cdot \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle$$

$$\lambda := \frac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \Longrightarrow \operatorname{Re} \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \cdot \langle x, y \rangle \right\} =$$

$$= \operatorname{Re} \Big\{ \underbrace{\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle}}_{\vee \atop 0} \Big\} = \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle}$$

$$0 < \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - 2 \frac{|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} + \underbrace{\left| \frac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \right|^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle}_{\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle}} =$$

$$= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - \frac{|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \Longrightarrow \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \cdot \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \geq |\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|^2$$

!!

11/

Köv
$$\frac{|\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle|}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|} \le 1 \quad \text{vagyis}$$

$$-1 \le \frac{\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|} \le 1 \Rightarrow$$ felfogható egy szög koszinuszaként

$\Rightarrow$ $\underline{x}, \underline{y} \in X$ vektorok által bezárt szög:

$$\cos \vartheta := \frac{\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \arccos \frac{\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|}$$

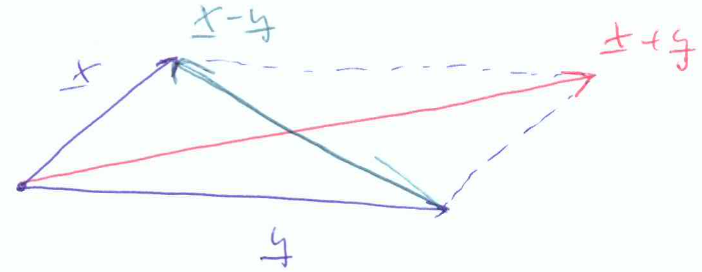
$\underline{x} \perp \underline{y}$ ortogonálisak $\Longleftrightarrow$ $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = 0$

TÉTEL (Paralelogramma-szabály)

$(X, \langle .,. \rangle)$ Euklideszi-tér, $\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle}$ indukált norma

$$\Downarrow$$

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 + \|\underline{x}-\underline{y}\|^2 = 2\left(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2\right)$$



12)

Biz.

$$\|\underline{x}+y\|^2+\|\underline{x}-y\|^2=\langle \underline{x}+y,\underline{x}+y\rangle+\langle \underline{x}-y,\underline{x}-y\rangle=$$

$$=2\langle \underline{x},\underline{x}\rangle+2\langle y,y\rangle+\langle \underline{x},y\rangle+\langle y,\underline{x}\rangle-\langle \underline{x},y\rangle-\langle y,\underline{x}\rangle=$$

$$=2\langle \underline{x},\underline{x}\rangle+2\langle y,y\rangle=2\left(\|\underline{x}\|^2+\|y\|^2\right)$$

$\circ$!

A paralelogramma-szabállyal eldönthető, hogy egy norma származhat-e skaláris szorzatból, azaz a normált tér tekinthető-e Euklideszi-térnek.

Pl.) Milyen p esetén lesz $\|\underline{x}\|_p=\sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle}$ $\quad \underline{x}\in\mathbb{R}^n$

~~egyenlőség~~

$$\underline{x}:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad y:=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

teljesülnie kell, hogy $\|\underline{x}+y\|_p^2+\|\underline{x}-y\|_p^2=2\left(\|\underline{x}\|_p^2+\|y\|_p^2\right)$

$$\|\underline{x}+y\|_p^2+\|\underline{x}-y\|_p^2\underset{P}{=}\left(1^p+1^p\right)^{\frac{2}{p}}+\left(1^p+|-1|^p\right)^{\frac{2}{p}}=2\cdot 2^{\frac{2}{p}}=2^{1+2/p}$$

$$\underline{x}+y=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{x}-y=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

13/

$$\|\underline{x}\|_p^2 + \|y\|_p^2 = (1^p)^{1/p} + (1^p)^{1/p} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2^{1+\frac{2}{p}} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{p=2}$$

$\Rightarrow$ $\|x\|_p$ normák közül csak a $p=2$ esetben származik a norma skalárszorzatból.

$\Downarrow$

$\mathbb{R}^n$-en általában az Euklideszi-normát tekintjük.

<u>Def:</u> (X, d) metrikus tér, $x_0 \in X$, $r > 0$

Az x_0 pont $r > 0$ sugarú környezete:

$$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

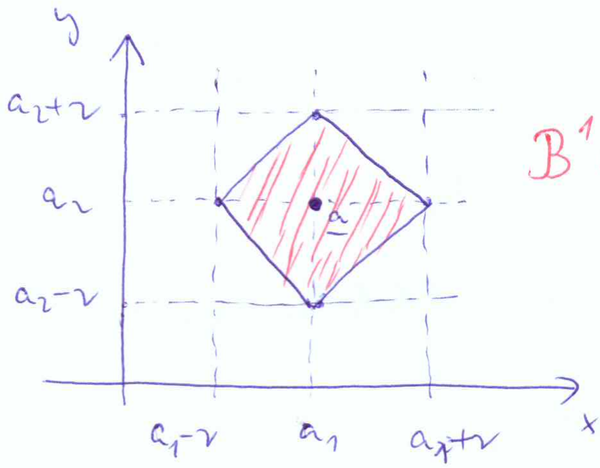
Az x_0 pont $r > 0$ sugarú átlyukasztott környezete:

$$\mathring{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

14)

<u>Példa</u> $\quad X = \mathbb{R}^2 \quad , \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

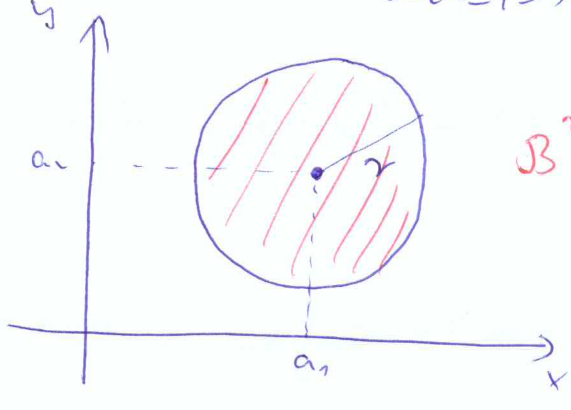
- $$B^1(\underline{a}, r) = \{ \underbrace{(x,y)^T}_{= \underline{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{|x-a_1| + |y-a_2|}_{d_1(\underline{a}, \underline{x})} < r \}$$



$B^1(\underline{a}, r)$

„rombusz-környezet"

- $$B^2(\underline{a}, r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}}_{d_2(\underline{a}, \underline{x})} < r \right\}$$

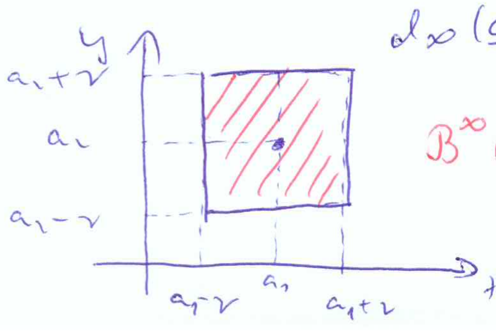


$B^2(\underline{a}, r)$

gömbkörnyezet

(körkörnyezet)

- $$B^\infty(\underline{a}, r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\max\{|x-a_1|, |y-a_2|\}}_{d_\infty(\underline{a}, \underline{x})} < \varepsilon \right\}$$



$B^\infty(\underline{a}, r)$

„négyzet környezet"

Def: (X,d) metrikus tér, $\underset{\neq \emptyset}{H} \subset X$. $x \in H$ H belső pontja, ha $\exists\, r>0$, hogy $B(x,r) \subset H$.

H belső pontjainak halmaza $=$ H belseje

jel.

$$\mathrm{int}\, H \equiv \overset{\circ}{H} = \{x \in H : x \text{ belső pontja } H\text{-nak}\}$$

$\uparrow$
interior.

$x \in X$ külső pontja H-nak, ha $\exists$ olyan környezete, amely diszjunkt H-ból, azaz $\exists\, r>0$, hogy $B(x,r) \cap H = \emptyset$.

H külső pontjainak halmaza $=$ H külseje

jel.

$$\mathrm{ext}\, H = \{x \in X : \exists\, r>0 : B(x,r) \cap H = \emptyset\}$$

$\uparrow$
exterior

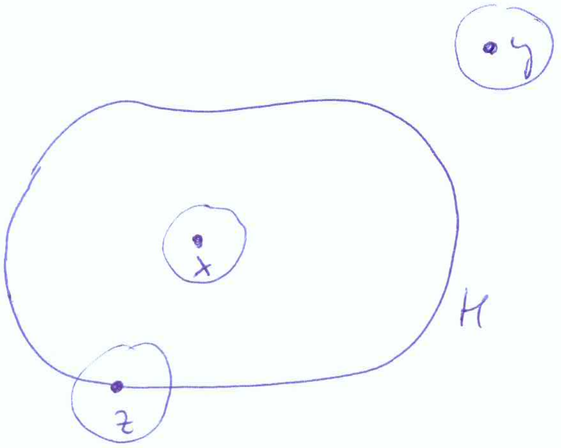
$x \in X$ határpontja H-nak, ha nem külső és nem belső pontja, azaz $\forall\, r>0$ $B(x,r) \cap H \neq \emptyset$ és $B(x,r) \setminus H = B(x,r) \cap H^c \neq \emptyset$

H határpontjainak halmaza $=$ H határa

jel.

$$\partial H = \{x \in X : \forall\, r>0,\ B(x,r) \cap H \neq \emptyset,\ B(x,r) \cap H^c \neq \emptyset\}.$$

16)



$y \in \operatorname{ext} H$

$x \in \operatorname{int} H$

$z \in \partial H$

<u>Megj</u>

- $\operatorname{ext} H = \operatorname{int} H^c$ $\qquad H \subset X$
- $\operatorname{int} H = \operatorname{ext} H^c$
- $\partial H = \partial H^c$

<u>Def</u>: (X, d) metrikus tér, $A \subset X$ halmaz <u>nyílt</u>, ha $\forall$ pontja belső pont.

↳ Hogy melyek a nyílt halmazok, függ a bevezetett metrikától.

<u>Def</u>: ~~d_1 és d_2 met~~

d és $\tilde{d}$ metrika <u>ekvivalens</u>, ha a nyílt halmazok osztálya a kétféle ~~metrikával~~ metrikában azonos. Jel: $d \sim \tilde{d}$

<u>Belátható</u>: d és $\tilde{d}$ ekvivalens $\iff \exists\, \alpha, \beta > 0$:

$$\alpha\, d(x,y) \le \tilde{d}(x,y) \le \beta\, d(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

17/

<u>Eml.</u>
- $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \le d_1(\underline{x},\underline{y}) \le n\, d_\infty(\underline{x},\underline{y})$
- $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) \le d_2(\underline{x},\underline{y}) \le \sqrt{n}\, d_\infty(\underline{x},\underline{y})$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} d_1(\underline{x},\underline{y}) \le d_2(\underline{x},\underline{y}) \le d_1(\underline{x},\underline{y})$ $\quad \forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

<u>Köv</u> $\mathbb{R}^n$-en d_1, d_2, d_p, d_∞ ekvivalensek.

↳ ugyanazok a nyílt halmazok ≡ ugyanazt a topológiát határozzák meg.

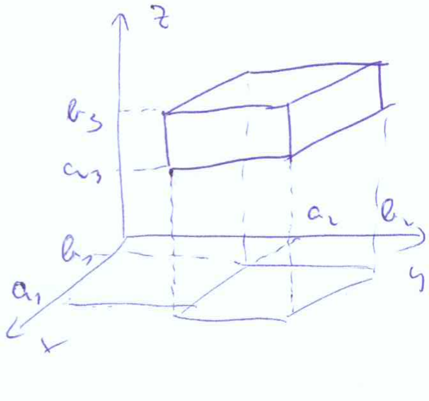
Ezentúl főleg az Euklideszi-metrikával (d_2) fogunk dolgozni, mert az bír plusz <u>geometriai tartalommal</u>.

<u>Példa</u>

① $X = \mathbb{R}^n$ $\quad R := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

n-dimenziós zárt <u>tégla</u>

pl: $\mathbb{R}^3$-ban



$\mathrm{int}\, R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$

<u>nyílt tégla</u>

Hiszen, ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{int}\, R \implies a_i < x_i < b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

↳ $\exists\, \delta > 0$ elég kicsi:

$a_i < x_i - \delta < x_i < x_i + \delta < b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

18/

$\Rightarrow \quad B(x, \delta) \subset R$, mert ha $y = (y_1, \dots, y_n) \in B(x, \delta)$

$$\Downarrow$$

$$\|y - \underline{x}\| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$|y_i - x_i| < \delta \quad \forall\, i = 1, \dots, n\text{-re}$$

$$\Downarrow$$

$$a_i < y_i < b_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

$$\Downarrow$$

$$y \in R$$

②

$\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{Q}^n := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Q} \ \forall\, i = 1, \dots, n \}$

(minden koordinátája racionális)

<u>eml.</u>: $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben ($\leadsto$ $\forall$ intervallumban $\exists$ racionális szám)

$\hookrightarrow$ $\mathbb{Q}^n$ $\forall$ téglába belemetsz, hiszen, ha R egy tetszőleges tégla és $x_i \in [a_i, b_i] \cap \mathbb{Q}$ $i = 1, \dots, n$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \cap R$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^n$ $\forall$ gömbbe is belemetsz, mert minden gömb tartalmaz téglát

$\Rightarrow \quad \boxed{\text{ext } \mathbb{Q}^n = \emptyset}$ (nincs egyetlen pontja sem, melynek $\exists$ $\mathbb{Q}^n$-től diszjunkt környezete.)

15)

- $\forall$ $B(a,r)$ gömbben van olyan pont, mely nem tartozik $\mathbb{Q}^n$-hoz, hiszen $\forall$ gömbben $\exists$ irracionális koordinátájú pont

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{int } \mathbb{Q}^n = \emptyset}$$

(egyetlen pont sincs, mely a környezetével együtt teljesen $\mathbb{Q}^n$-ben van)

<u>Köv</u> $\mathbb{Q}^n$-nek $\nexists$ egyetlen külső és egyetlen belső pontja sem

$\Downarrow$

$\forall$ pontja határpont:

$$\boxed{\partial \mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^n}$$

<u>TÉTEL</u> $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor

(i) int A és ext A nyílt halmazok

(ii) int A a legbővebb nyílt halmaz, amely része A-nak.

<u>Biz:</u> (i) definícióból nyilvánvaló (ext A = int A^c)

(ii) Ha $G \subset A$ nyílt és $x \in G$, akkor $\exists$ $r>0$:

$$B(x,r) \subset G \implies B(x,r) \subset A \implies x \in \text{int } A$$

$\implies$ int A tartalmaz minden A-beli nyílt halmazt.

de int A maga is nyílt és int $A \subset A$ $\implies$ int A a legbővebb A-beli ~~A-beli tartalmazó~~ nyílt halmaz

!

20/

TÉTEL: Véges sok nyílt halmaz metszete, illetve akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.

Biz: A, B nyílt és $x \in A \cap B \Rightarrow x \in \text{int} A$ és $x \in \text{int} B$, azért $\exists\, r, s > 0$, hogy $B(x,r) \subset A$, $B(x,s) \subset B$

Ekkor $B(x, \min(r,s)) \subset A \cap B \Rightarrow x \in \text{int}(A \cap B)$

$\hookrightarrow$ $A \cap B$ $\forall$ pontja belső pont, tehát $A \cap B$ nyílt.

+ teljes indukció $\Rightarrow$ n db nyílt halmaz metszete nyílt $n \in \mathbb{N}^+$

Legyenek G_i halmazok nyíltak, ha $i \in I$: indexhalmaz

$G := \bigcup_{i \in I} G_i$.

Ha $x \in G \Rightarrow x \in G_{i_0}$ valamely $i_0 \in I$-re

G_{i_0} nyílt $\Rightarrow x \in \text{int}\, G_{i_0}$, $\exists\, r > 0$ $B(x,r) \subset G_{i_0}$

$\Rightarrow B(x,r) \subset G \Rightarrow x \in \text{int}\, G$

$\forall x \in G$-re igaz $\Rightarrow$ G nyílt

$\circ$!

21/

Megj: Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt:

$B(\underline{x}, \frac{1}{n})$ nyílt gömbök $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(\underline{x}, \frac{1}{n}) = \{\underline{x}\}$ zárt.

Def: $B(\underline{x}, r)$ racionális gömb, ha $\underline{x}$ $\forall$ koordinátája és r racionális.

Áll: Minden nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben előáll racionális gömbök uniójaként.

Megj: Ez a nyílt halmazok struktúratételének általánosítása $\mathbb{R}^n$-re.

Biz: Legyen G nyílt, $\underline{x} \in G$

$\hookrightarrow \exists\, r > 0 : B(\underline{x}, r) \subset G$.

Láttuk: $\forall$ gömb tartalmaz olyan pontot, melynek $\forall$ koordinátája racionális.

Legyen $\underline{y} \in B(\underline{x}, \frac{r}{2})$ ilyen pont.

Ha $s \in \mathbb{Q}$, melyre $\underset{d(\underline{x}, \underline{y})}{\underset{\parallel}{\|\underline{x} - \underline{y}\|}} < s < \frac{r}{2} \Rightarrow B(\underline{y}, s)$ racionális gömb

és $\underline{x} \in B(\underline{y}, s)$, mert $d(\underline{x}, \underline{y}) < s$

22/

Mert:

$$B(y, s) \subset B(x, r) \text{, mert}$$

$z \in B(y, s)$ esetén

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \underbrace{s}_{\leq \frac{r}{2}} + \underbrace{\frac{r}{2}}_{\leq} < r$$

$\Rightarrow$ G $\forall$ pontja eleme egy G-ben fekvő racionális gömbnek

$\Downarrow$

G = az általa tartalmazott racionális gömbök uniója

o!