1/

Az improprius integrál

Emlékeztető: Riemann-integrál felépítése

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

2) $[a,b]$: korlátos intervallum

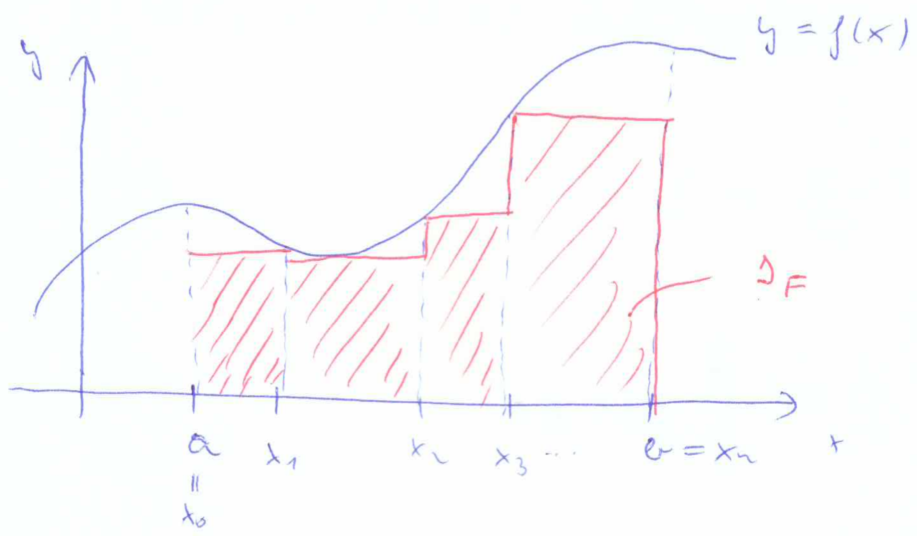
$F : \{ x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$F = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ az $[a,b]$ intervallum egy felontása

$\delta_F := \max\limits_{k \in \{1,\dots,n\}} |x_k - x_{k-1}|$ a felontás finomsága

$s_F := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$: F felontáshoz tartozó alsó közelítő összeg,

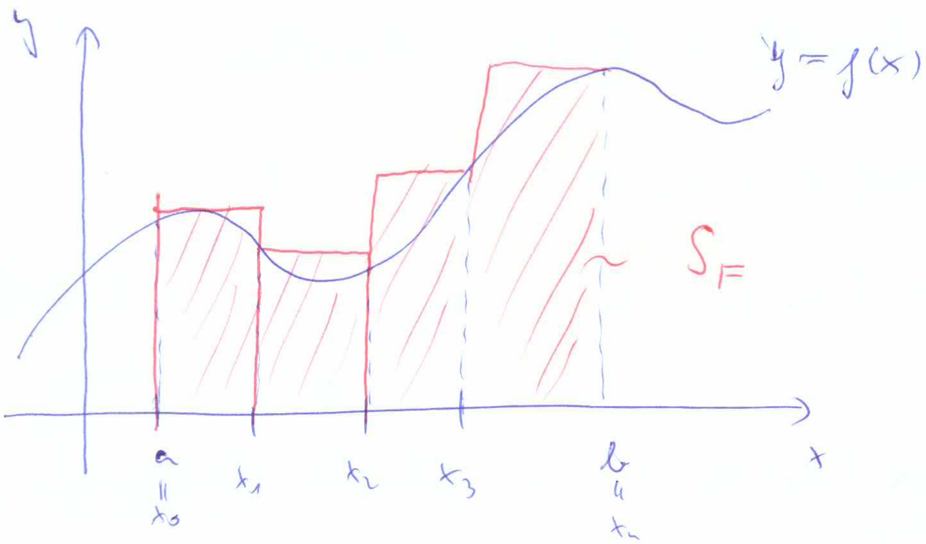
ahol $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$



2)

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$: F felosztáshoz tartozó <u>felső közelítő összeg</u>,

ahol $$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$



$$\underline{I} := \sup_F s_F$$: Darboux-féle alsó integrál

$$\overline{I} := \inf_F S_F$$: Darboux-féle felső integrál

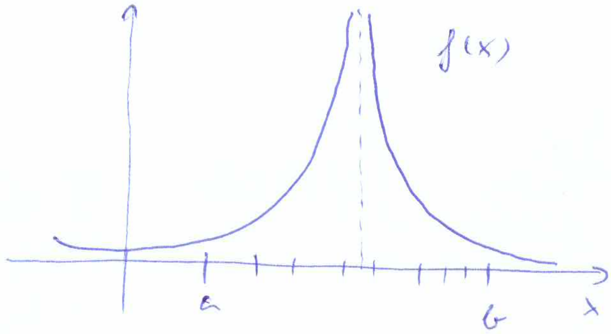
f Riemann-integrálható [a,b]-n, ha

$$\underline{I} = \overline{I} \equiv I$$

<u>jel.</u> $$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Megj: A konstrukció nem működik, ha

- f nem korlátos, hiszen ekkor $\forall$ felosztás esetén $\exists$ olyan intervallum, ahol $\sup f(x) = \infty$ vagy $\inf f(x) = -\infty$;

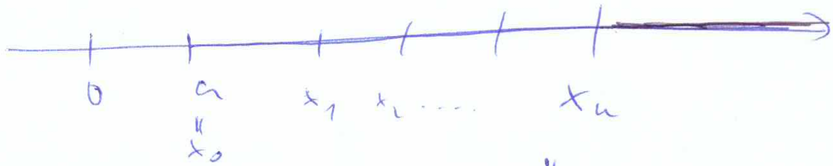


$\Downarrow$

$\underline{I}$ vagy $\overline{I}$ divergál

- $[a, b]$ nem korlátos, hiszen ekkor $\forall$ F felosztás esetén $\delta_F = \infty$

pl: $[a, \infty)$



$\Downarrow$

$\underline{I}$ v. $\overline{I}$ divergens

$\Downarrow$

Ezt a problémát szeretnénk feloldani:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(1) nem korlátos integrálási tartomány} \\ \text{(2) nem korlátos integrandus} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{IMPROPRIUS}$$

= NEM VALÓDI INTEGRÁL (szokásostól eltérő)

1. alapeset: az integrálási tartomány nem korlátos

Def: Legyen f értelmezve $[a,\infty)$-n és tfh f integrálható $[a,b]$-n $\forall\ b>a$ esetén.

Amennyiben

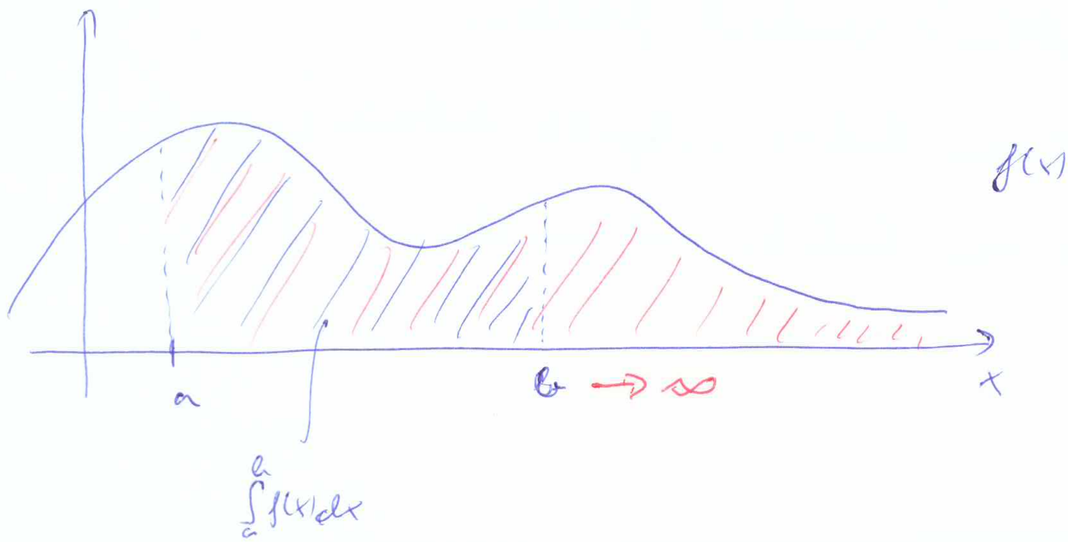
$$I := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad \exists \text{ és véges, akkor}$$

f $[a,\infty)$-n vett improprius integrálja konvergens és az értéke I.

Jel:

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \left(= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

Ha $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \ \nexists$ vagy nem véges, akkor az improprius integrál divergens.



Példák

① $$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = ?}$$

$\frac{1}{(1+x)^2}$ integrálható $\forall\ [0,b]$-n

$$\hookrightarrow \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+b}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = 1 \quad \text{konvergens}$$

② $$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = ?}$$

$\frac{1}{x}$ integrálható $\forall\ [1,b]$-n

$$\hookrightarrow \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln b - \underset{0}{\underset{\parallel}{\ln 1}}\right) = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{divergens} \quad (\infty\text{-hez divergál})$$

6/

(3) $\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dt = ?}$

$\frac{1}{1+x^2}$ integrálható $\forall$ $[0,b]$-n

$\hookrightarrow$ $\lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega \frac{1}{1+\cancel{x}^2}\,dt = \lim_{\omega\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^\omega = \lim_{\omega\to\infty} (\operatorname{arctg}\omega - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0}) =$

$= \frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow$ $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ konvergens

(4) $\boxed{\int_0^\infty \cos t\,dt = ?}$

$\cos t$ integrálható $\forall$ $[0,b]$-n

$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos t\,dt = \lim_{b\to\infty} [\sin t]_0^b = \lim_{b\to\infty} (\sin b - \underbrace{\sin 0}_{0}) =$

$= \lim_{b\to\infty} \sin b$ $\nexists$

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty \cos t\,dt$ divergens

Előfordulhat úgy is improprius integrál, hogy elsőre nem látszik:

(5) $$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = ?}$$

$[0,\pi]$ korlátos intervallum ✓

$\frac{1}{1+\sin x}$ korlátos ✓

helyettesítéses integrálás:

eml.: $$\boxed{t := tg\frac{x}{2}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad / : \cos^2 x$$

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}, \quad \sin x = \frac{tg\, x}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$$

↳

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$
- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$
- $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$

A helyettesítéskor változnak a határok!

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2} \xRightarrow[{[0,\frac{\pi}{2}]\text{-n}}]{tg \nearrow} 0 \le tg\frac{x}{2} \le \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 \le t < \infty}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \underbrace{2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2}}_{\text{improprius!}} = 2 \cdot 1 = 2$$

ld. ① példa

<u>Megj</u>: Hasonlóan értelmezzük $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ improprius integrált.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ha } \exists \text{ és véges,}$$

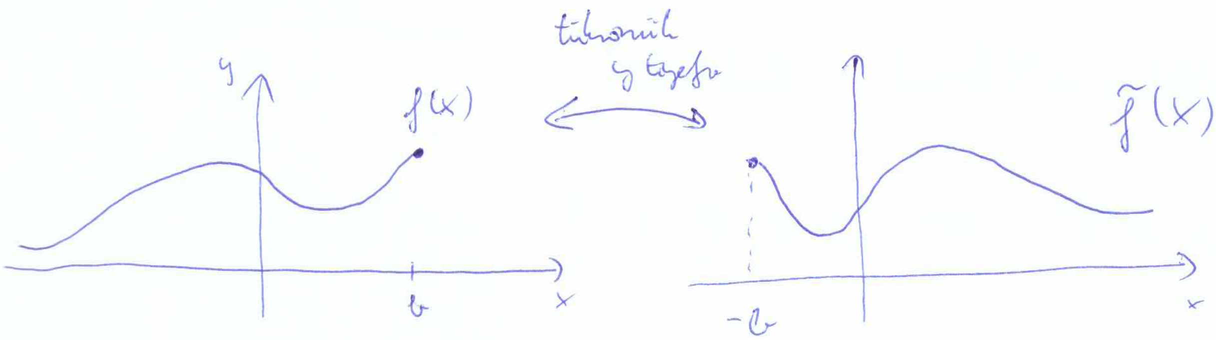
különben divergens.

<u>Vagy</u> visszavezetve az előzőre:

Tfh $b \in \mathbb{R}$, $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrálható $[x, b]$-n $\forall\, x \le b$-re.

Definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\tilde{f} : [-b, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(u) := f(-u)$$



9/

$\Rightarrow \forall\ x \le b \iff -x \ge -b$

$\hookrightarrow \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} -\int_{-x}^{-b} f(u)\,du = \int_{-b}^{-x} f(u)\,du$

$u = -t$

$dt = -du$

$x \le t \le b \iff -x \ge \underbrace{-t}_{u} \ge -b$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ konvergens $\iff \displaystyle\int_{-b}^{\infty} \tilde{f}(u)\,du$ konvergens

és $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \int_{-b}^{y} \tilde{f}(u)\,du = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{b} f(t)\,dt$

Különben $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ divergens.

<u>Pl</u>

$$\int_{-\infty}^{a} e^x\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{a} e^x\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[e^x\right]_{\omega}^{a} =$$

$$= \lim_{\omega\to-\infty} (e^a - \underset{\downarrow\atop 0}{e^\omega}) = e^a$$

másik módszer:

$$\int_{-\infty}^{a} e^x\,dx = \int_{-a}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_{-a}^{\omega} e^{-x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_{-a}^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left[-\underset{\downarrow\atop 0}{e^{-\omega}} + e^a\right] = e^a$$

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrálható $[a,b]$-n $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq b$

Azt mondjuk, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ <u>konvergens</u>, ha

$\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,dt$ és $\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ is konvergens, vagyis

$\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \int\limits_{x}^{0} f(t)\,dt$ $\exists$ és véges.

<u>Ekkor</u>
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx .$$

Ha valamelyik a fenti két improprius integrálok közül nem konvergens, akkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divergens.

<u>Példa:</u>

(1) $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?}$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{\omega}^{0} =$$

$$= \lim_{\omega\to-\infty} \Big[\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} - \underbrace{\operatorname{arctg} \omega}_{\to -\frac{\pi}{2}}\Big] = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_{0}^{\omega} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \ldots = \frac{\pi}{2} \quad \text{(volt)}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}} \quad \text{konvergens}$$

11/

<u>Def</u>

Ha $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ $\exists$ és véges, akkor f

<u>Cauchy-féle főértékintegrálját</u> kiszámíthatjuk $\mathbb{R}$-en.

<u>Megj.</u> ① Ha $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ improprius integrál konvergens, akkor

mivel $$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall\, x \geq 0,$$

ezért a Cauchy-féle főérték integrál $\exists$ és megegyezik

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$-vel.

② A megfordítás nem igaz:

<u>Pl</u> $f(t) := \sin t$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{\int_{-x}^{x} \sin t\,dt}_{=0 \text{ (mert sinus páratlan}} = 0 \quad \Rightarrow \text{Cauchy-féle főérték } \exists$$

de

$$\int_{0}^{\infty} \sin t\,dt \text{ és } \int_{-\infty}^{0} \sin t\,dt \ \nexists \quad (\text{láttuk})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx \text{ divergens}$$

2. Alapeset: az integrandus nem korlátos

<u>Def.</u> $[a, b]$ korlátos intervallum.

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ és f integrálható $[a, c]$-n $\forall$ $a \le c < b$ -re.

Amennyiben

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx =: I \quad \exists \text{ és véges, akkor}$$

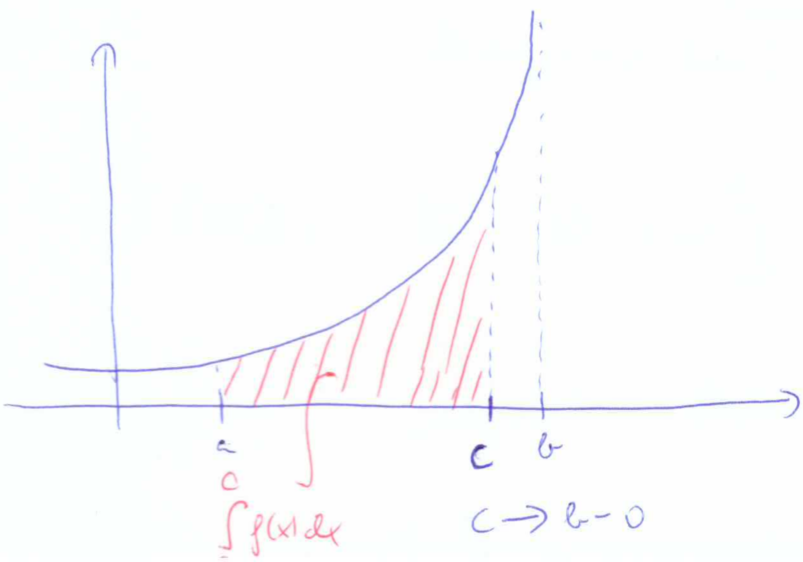
az f fv. $[a, b]$-beli <u>improprius integrálja konvergens</u> és

$$\int_a^b f(x)\,dx = I .$$

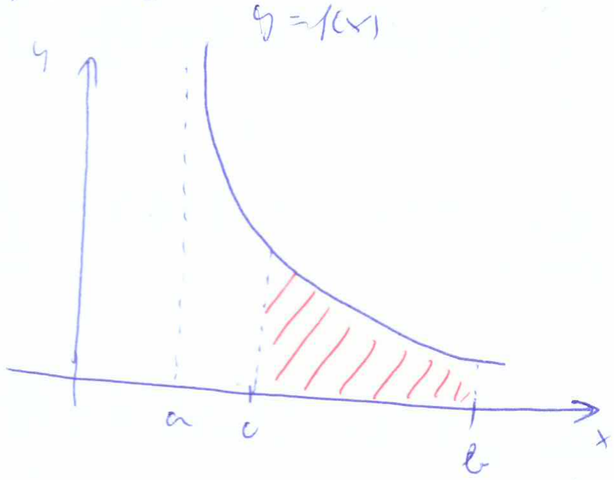
Ha $\lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx$ $\nexists$ vagy $\exists$, de nem véges, akkor

az $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál <u>divergens</u>.

Ha $\lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty$ v. $-\infty$ $\Rightarrow$ $+\infty$-hez ill. $-\infty$-hez divergál



Teljesen hasonlóan:



Ha $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ és f integrálható $[c,b]$-n $\forall$ $a < c \leq b$-re,

akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{ha } \exists \text{ és véges,}$$

különben divergens.

Megj: Nincs-e konfúzió? $\int_a^b f(x)\,dx$ jelentheti:

① f $[a,b]$-n vett Riemann-integrálját

② $\lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx$ improprius integrált

③ $\cancel{\lim\limits_{c \to a+0}}$ $\lim\limits_{c \to a+0} \int_c^b f(x)\,dx$ improprius integrált

14)

<u>tudjuk</u>

$I(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ integrálfv. folytonos $[a,b]$-n

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0} I(c) = I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0}\left[I(b)-I(c)\right] = I(b)-I(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\Downarrow$

vagyis ha f integrálható $[a,b]$-n, az improprius értelmezés visszaadja az eddigi Riemann-integrált

$\Downarrow$

az improprius integrál a Riemann-integrál <u>kiterjesztése</u>

<u>Pl</u> ① $\boxed{\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-t}}\,dt = ?}$

Az integrandus $t=1$-ben divergál

$$\hookrightarrow \lim_{c\to 1-0}\int_0^c \sqrt{\frac{1}{1-t}}\,dt = \lim_{c\to 1-0}\left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to 1-0}\left[\underbrace{-2\sqrt{1-c}}_{\downarrow\, 0}+2\right] = \underline{\underline{2}} \quad \checkmark$$

Ez az eset is megjelenhet „előre nem látható" módon:

② $$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin x}\,dx = ?}$$ „sima" Riemann-integrál

<u>helyettesítés:</u> $t := \sin x \rightsquigarrow x = \arcsin t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

határok:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \sin x = t \le \sin\frac{\pi}{2} = 1 \rightsquigarrow 0 \le t \le 1$$

és

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \underset{\text{improprius int}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \lim_{c\to 1-0} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = 2$$

(ld előző példa)

③ $$\boxed{\int_0^1 \ln x\,dx} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{0-ban divergál}\\ \text{az integrandus}}}{=} \lim_{\delta\to 0+0} \int_\delta^1 \ln x\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parc int}}}{=} \lim_{\delta\to 0+0} \left\{ \left[x\ln x\right]_\delta^1 - \int_\delta^1 1\,dx \right\} =$$

$u' = 1 \to u = x$

$v = \ln x \to v' = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{\delta\to 0+0} \Big[\underbrace{1\cdot\ln 1}_{0} - \delta\ln\delta - 1 + \underbrace{\delta}_{0}\Big] = -1 - \lim_{\delta\to 0+0} \delta\ln\delta =$$

$$= -1 - \lim_{\delta\to 0+0} \frac{\ln\delta}{\frac{1}{\delta}} \underset{\text{l'Hospital}}{\underset{\uparrow}{=}} -1 - \lim_{\delta\to 0+0} \frac{\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta^2}} \quad \leftarrow -\delta \to 0 \qquad \boxed{= -1}$$

16/

(4) $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx = ?}$ divergál az integrandus $x=1$-ben

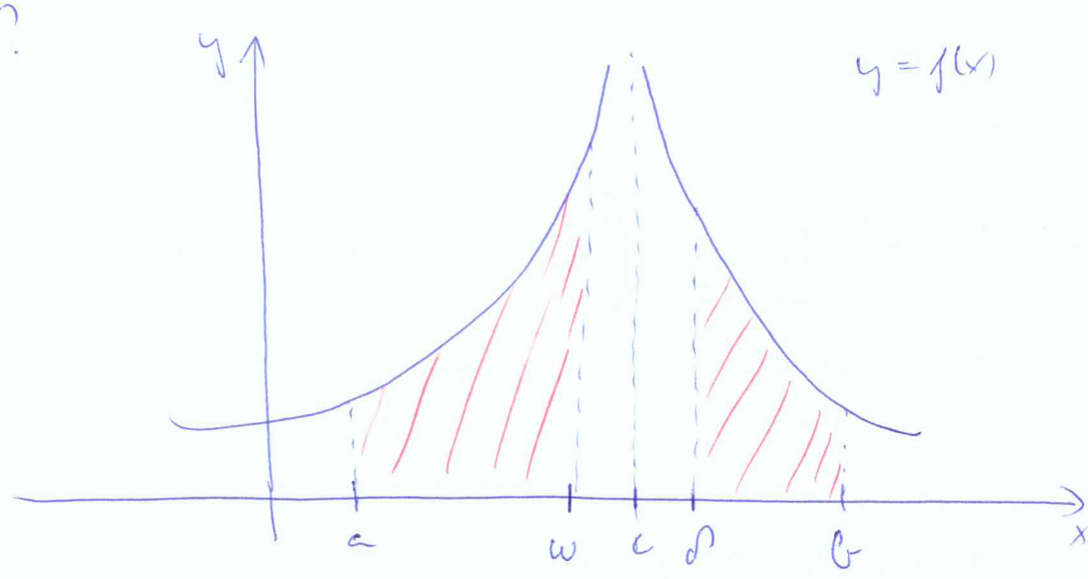
$$\lim_{\omega\to 1-0}\int_0^{\omega}\frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{\omega\to 1-0}\Big[\ln|1+x| - \ln|1-x|\Big]_0^{\omega} =$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

$$= \lim_{\omega\to 1-0}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to 1-0}\Big[\ln\underbrace{\frac{1+\omega}{1-\omega}}_{\to\infty} - \underbrace{\ln 1}_{=0}\Big] = \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad \underline{\infty\text{-ben divergál}}$$

Mi történik, ha az integrandus az intervallum belsejében divergál?



$\omega \to c-0$ $\qquad$ $\delta \to c+0$

Ha $\lim\limits_{\omega \to c-0} \int_a^\omega f(x)\,dx$ és $\lim\limits_{\delta \to c+0} \int_\delta^b f(x)\,dx$ $\exists$

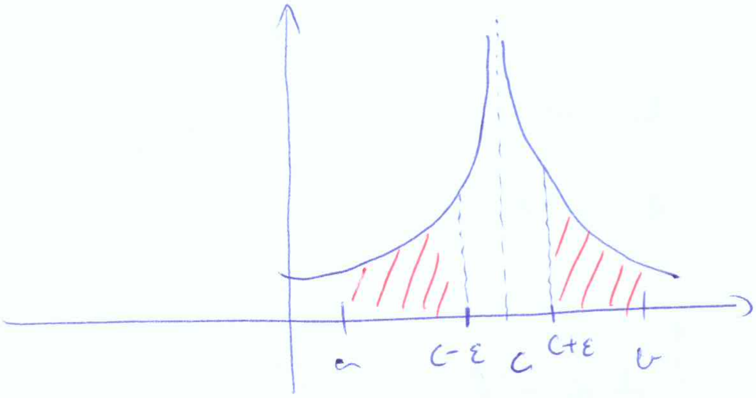
és végesek $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens

és

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to c-0} \int_a^\omega f(x)\,dx + \lim_{\delta \to c+0} \int_\delta^b f(x)\,dx}$$

Különben $\int_a^b f(x)\,dx$ divergens.

Megj: Cauchy-féle főérték integrál (CPV = Cauchy Principal Value)



$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right) \overset{\text{jel}}{\equiv} \text{CPV} \int_a^b f(x)\,dx$$

Megj: $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius int konvergens $\Longrightarrow$ Cauchy-féle főérték integrál konv

$$\not\Longleftarrow$$

Fontos példák:

(1)
$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & , \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & , \text{ha } \alpha \le 1 \end{cases}}$$

Biz.

$\alpha \neq 1$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\omega^{1-\alpha} - 1\right)$$

ui.
$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & , \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & , \text{ha } \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} (\ln\omega - \ln 1) = \infty$$

o.!

(2)
$$\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & , \text{ha } \alpha \ge 1 \end{cases}}$$

Biz.

$\alpha \neq 1$
$$\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \int_{\delta}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\delta}^{1} =$$

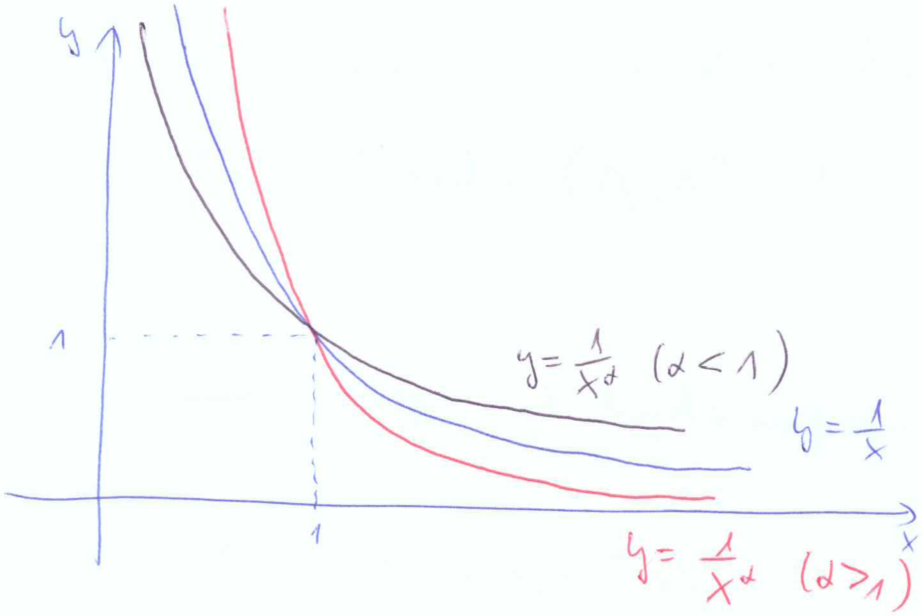
$$= \lim_{\delta\to 0+0} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \delta^{1-\alpha}\right)$$

ui.
$$\lim_{\delta\to 0+0} \delta^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & , \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & , \text{ha } \alpha > 1 \end{cases}$$

$\underline{\alpha = 1}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta \to 0+0} \left[\ln|x| \right]_\delta^1 =$$

$$= \lim_{\delta \to 0+0} \left(\underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln \delta}_{\downarrow \, -\infty} \right) = \infty$$



<u>Megj:</u> Az improprius integrálokra, amennyiben konvergensek, érvényben maradnak a Riemann-integrálra vonatkozó tételek.

<u>Pl)</u> Ha $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ és $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ improprius integrálok konvergensek, akkor $\int_\alpha^\beta c\, f(x)\,dx$ és $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))\,dx$ is konvergens és

$$\int_\alpha^\beta c\, f(x)\,dx = c \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

Hasonlóan igaz marad: parciális integrálás, helyettesítéses integrálás, stb...

Improprius integrálok konvergenciája

TÉTEL (Cauchy-kritérium improprius integrálokra)

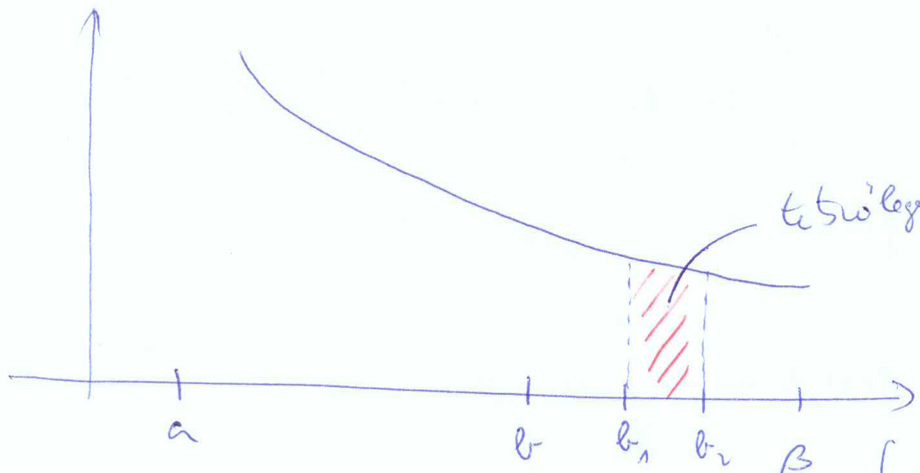
legyen f integrálható $[a, \beta)$ intervallum korlátos, zárt részintervallumain.

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ improprius integrál konvergens } \Longleftrightarrow$$

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ b \in [a, \beta)$, hogy

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad , \forall\ b < b_1 < b_2 < \beta$$

esetén.



($\beta = \infty$ is lehet

vagyis ha f elég gyorsan tart 0-hoz β-hoz tartva, akkor konvergens az integrál.