Hasonlóan így marad: parciális integrálás, helyettesítéses integrálás, stb...

Improprius integrálok konvergenciája

TÉTEL (Cauchy-kritérium improprius integrálokra)

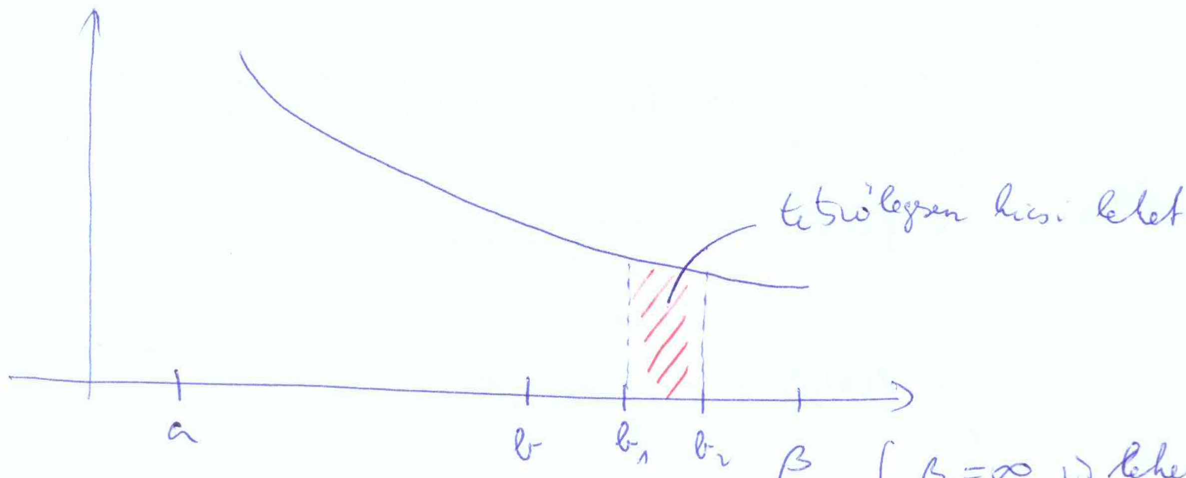
Legyen f integrálható $[a, \beta)$ intervallum korlátos, zárt részintervallumain.

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ improprius integrál konvergens } \Longleftrightarrow$$

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ b \in [a, \beta)$, hogy

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad , \forall\ b < b_1 < b_2 < \beta$$

esetén.



($\beta = \infty$ is lehet

vagyis ha f elég gyorsan tart 0-hoz β-hoz tartva, akkor konvergens az integrál.

21)

Biz:

$$\int_a^{b_2} f(x)\,dx - \int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx$$

+ fv határértékére vonatkozó Cauchy-kritérium:

($\lim_{x \to a} f(x)$ $\exists$ és véges $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ a-nak olyan U átlyukasztott környezete, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $x_1, x_2 \in U$)

Megj: Tfh f integrálható $[a, \beta)$ korlátos, zárt részintervallumain. (β lehet ∞ is). Ha $f \geq 0$ $[a,\beta)$-n, akkor

$$\omega \longmapsto \int_a^{\omega} f(x)\,dx \quad \text{monoton nő}$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \to \beta - 0} \int_a^{\omega} f(x)\,dx \quad \text{azaz, hogy } \exists \nearrow \text{véges} \text{ vagy } \searrow \infty$$

$$\Downarrow$$

$\int_a^{\beta} |f|\,dx$ mindig $\exists$, ha f integrálható $[a,\beta)$ korlátos, zárt részintervallumain

Def: Az $\int_a^{\beta} f(x)\,dx$ improprius integrál abszolút konvergens, ha f integrálható $[a,\beta)$ korlátos, zárt részintervallumain és $\int_a^{\beta} |f(x)|\,dx$ konvergens.

27/ TÉTEL

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ imp. integrál abszolút konvergens}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ imp. integrál konvergens.}$$

Biz. $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \quad \forall\ a \leq b_1 < b_2 < \beta$ -ra

+ Cauchy-féle konv. krit.

Megj. A megfordítás nem biztos, hogy igaz

pl. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergens, de nem abszolút konv.

(ld. később)

TÉTEL (Majoráns-elv)

Tfh • f és g int.ható $[a,\beta)$ korlátos, zárt részintervallumain

• $\exists\ b_0 \in [a,\beta)$, melyre $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall\ x \in (b_0,\beta)$

Ekkor, ha

$$\int_a^\beta g(x)\,dx \text{ konvergens} \Longrightarrow \int_a^\beta f(x)\,dx \text{ konvergens.}$$

23/

Biz. $\int_a^\beta g(x)\,dx$ konvergens $\overset{\text{Cauchy}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ b<\beta:$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

$$\forall\ \ b<b_1<b_2<\beta$$

$|f(x)|\le g(x)$, ha $x\in(b_0,\beta)$

$$\Rightarrow\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|\le\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|\,dx\right|\le\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

$\forall\ \ \max\{b,b_0\}<b_1<b_2<\beta$ -ra

$\Downarrow$ Cauchy

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergens. $\quad$ Q.E.D.

Példák ① $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx}$, $\boxed{\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx}$ konvergensek,

mert $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall\ x\ge1$-re

és $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergens !

24/

(2) $$\boxed{\int_0^\infty \frac{1+\sin x}{1+x^2}\,dx}$$ konvergens, mert

$$\left|\frac{1+\sin x}{1+x^2}\right| \leq \frac{2}{1+x^2} \qquad \forall\, x\in[0,\infty)$$

és $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$ konvergens.

<u>Megj</u>: <u>Minorizálás</u>

Ha $g(x) \geq |f(x)|$ $\forall\, x\in(b_0,\beta)$ és $\displaystyle\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergens

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\beta g(x)\,dx$ is divergens.

<u>Bi</u>: Ha konvergens lenne, akkor a majorizációs-elv miatt

$\displaystyle\int_a^\beta f(x)\,dx$ is konvergens volna : $\lightning$!

<u>Példa</u> (1) $$\boxed{\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx}$$ divergens, mert

$$\left|\frac{2+\cos x}{x}\right| \geq \frac{1}{x} \qquad \forall\, x\in[1,\infty)$$

és $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[\ln x\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty}(\ln\omega-\ln 1)=\infty$$

divergens !

~~2,5~~

(2) $\boxed{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx}$ divergens, mert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$$, ha $0<x<\delta_0$ valamely δ_0-ra

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x^2} > \frac{1}{2x}$$, ha $x\in(0,\delta_0)$

de $\int_0^{\delta_0}\frac{1}{2x}\,dx$ divergens $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ is divergens

○!

(3) $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx}$ konvergens

$$\int_1^\omega \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\text{parc. int}}{=} \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^\omega - \int_1^\omega \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$ $\forall\, \omega>1$-re

$u:=\frac{1}{x} \rightsquigarrow u'=-\frac{1}{x^2}$

$v'=\sin x \rightsquigarrow v=-\cos x$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\Big(\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{\cos\omega}{\omega}} + \underset{\|\, \cos 1}{\frac{\cos 1}{1}} - \underbrace{\int_1^\omega \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{konvergens, ha } \omega\to\infty}\Big)$$

○!

4.

$$\boxed{\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx} \quad \text{divergens}$$

$|\sin x| \geq \sin^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ elég megmutatni, hogy

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \quad \text{divergens}$$

$$\int_1^\omega \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\omega \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^\omega \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

$\int_1^\omega \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ konvergens (parciális integrálás, mint előbb HF)

de

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \infty$$

5.

$$\boxed{\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^2}\,dx \quad \text{konvergens, ha } \alpha > 0}$$

$e^{-x^2} < \dfrac{1}{|x|^{\alpha+2}}$, ha $|x| > x_0$ valamely $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén

(ugyanis $\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x^2} = 0 \quad \forall\, p(x)$ polinomra)

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

v l'Hospital-szabály

$\Downarrow$

$|x^\alpha e^{-x^2}| < \dfrac{1}{x^2}$, ha $|x| > x_0$

+ majoráns-elv

!

27/

⑥ Az Euler-féle Γ függvény

$$\boxed{\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt \qquad s>0}$$

- $\int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ $\rightsquigarrow$ konvergens

  $e^{-t} < \frac{1}{|t|^{s+1}}$, ha $|t| > \{t_0\}$ valamely t_0-ra

  $\hookrightarrow$ $e^{-t} t^{s-1} < \frac{1}{t^2}$

- $\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt$ közönséges integrál, ha $\underline{s \geq 1}$ $\rightsquigarrow$ konverg.

$\underline{0 < s < 1 \text{ esetén}}$: $t \in (0,1] \Rightarrow |t^{s-1} e^{-t}| \leq t^{s-1}$

de $\int_0^1 t^{s-1} dt$ konvergens

$\Rightarrow$ $\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt$ konvergens

<u>TÉTEL</u> (a Γ függvény tulajdonságai)

(i) $\Gamma(s) > 0 \quad \forall s > 0$ és $\Gamma(s) \to \infty$, ha $s \to 0+$

(ii) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad \forall s>0$

(iii) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Megj:</u> A Γ függvény a faktoriális folytonos általánosítása.

Biz

(i) $s>0$-ra

$$\Gamma(s) \geq \int_0^1 e^{-t} t^{s-1}\,dt \geq e^{-1} \underbrace{\int_0^1 t^{s-1}\,dt}_{\left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s}} = \frac{e^{-1}}{s}$$

$\Rightarrow$ $\Gamma(s)>0$, ha $s>0$ és $\lim\limits_{s\to 0+} \Gamma(s) = \infty$

(ii) Legyen $s>0$ fix.

$\forall\ \varepsilon>0$ és $x \geq \varepsilon$ esetén

$$\int_\varepsilon^x e^{-t} t^s\,dt \underset{P}{=} \left[-e^{-t} t^s\right]_\varepsilon^x + s\int_\varepsilon^x e^{-t} t^{s-1}\,dt =$$

parc. int

$u' = e^{-t} \rightsquigarrow u = -e^{-t}$

$v = t^s \qquad v' = s\,t^{s-1}$

$$= \left(-e^{-x}x^s + e^{-\varepsilon}\varepsilon^s\right) + s\int_\varepsilon^x e^{-t} t^{s-1}\,dt$$

- $\varepsilon \to 0^+$ esetén $\left.\begin{array}{l} e^{-\varepsilon} \to 1 \\ \varepsilon^s \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{-\varepsilon}\varepsilon^s \to 0$

- Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > s$

$\Rightarrow$ $\forall\ x \geq 1$-re $\quad 0 \leq e^{-x} x^s \leq e^{-x} x^n$

25/

és $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}x^{n} = 0 \implies \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}x^{s} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 e^{-t}t^s\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^s\,dt = (0-e^{-1}) + s\left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{s-1}\,dt\right)$$

és

$$\int_1^\infty e^{-t}t^s\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x e^{-t}t^s\,dt = (e^{-1}-0) + s\left(\lim_{x\to\infty}\int_1^x e^{-t}t^{s-1}\,dt\right)$$

$\Downarrow$ összeadva őket

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$$

iii) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$

$\Downarrow$ (ii)

$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$

$\vdots$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

o!

1/

Integrálkritérium

TÉTEL (Integrálkritérium)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pozitív értékű és monoton csökkenő

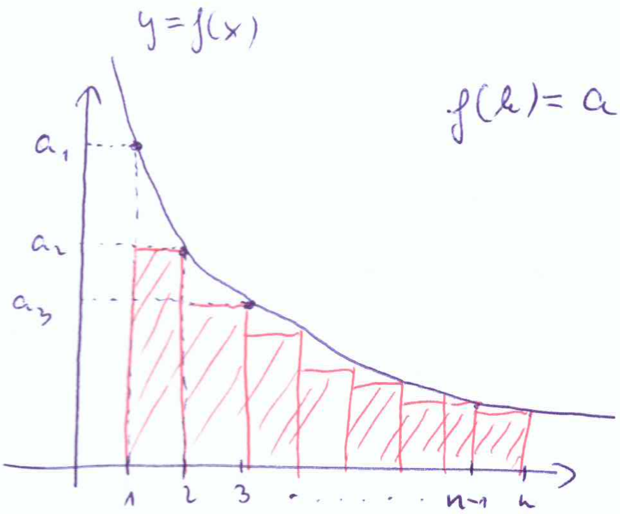
$[1,\infty)$-n, $f(k) := a_k > 0 \quad k \in \mathbb{N}$.

1, Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens

2, Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergens $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens.

Biz

1)



$f(k) = a_k$

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq \underbrace{\int_1^n f(x)\,dx}_{\substack{\text{monoton növő fv-e} \\ n\text{-nek}}} \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx$$

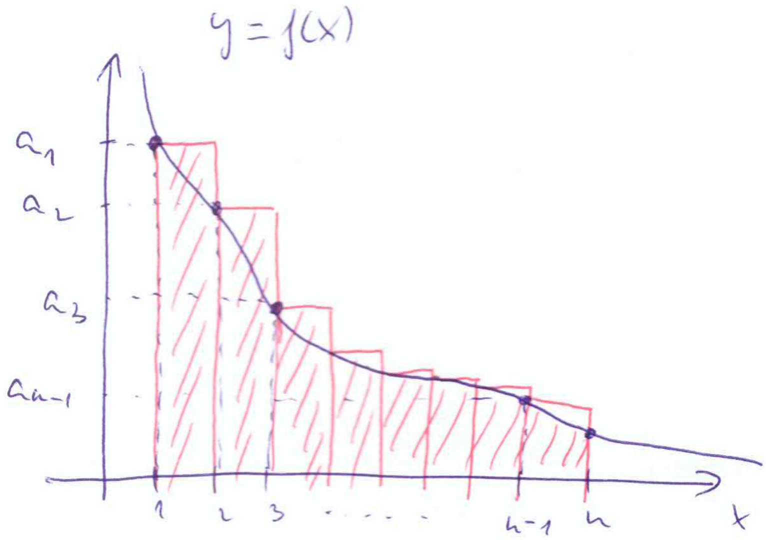
Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konv $(<\infty)$ $\Rightarrow$ $S_n = a_1 + \underbrace{a_2 + \ldots + a_n}_{\leq \int_1^\infty f(x)\,dx}$ korlátos

$+ \; S_n \nearrow \; \Rightarrow \; S_n$ konvergens

2/

azaz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens ✓

2)



$f(k) = a_k$

$$\int_1^n f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = S_{n-1}$$

Ha $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergens}$$

Megj: A bizonyításból látszik:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \le \int_1^{\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

vagy:

$$\int_1^{\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le f(1) + \int_1^{\infty} f(t)\,dt$$

↳ használhatók becslésekhez.

3/

Példa

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$$

Biz.

- $\alpha \leq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{|\alpha|} \neq 0$$

($\Rightarrow$ a konvergencia szükséges feltétele sem teljesül.)

- $\alpha > 0$

$f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \geq 1$ $\Rightarrow$ • f nemnegatív és $f \searrow$

• $f(n) = \dfrac{1}{n^\alpha} = a_n$

láttuk: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergens $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

$\Downarrow$ integrálkritérium

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$

ø !

4)

Hibabecslés pozitív tagú sorokra integrálkritériummal

TÉTEL Tfh $S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k>0$ sor konvergens és a konvergenciája megállapítható az integrálkritériummal. Ekkor az $S \approx S_n = a_1+\ldots+a_n$ közelítés hibája:

$$H = |S-S_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{becsülhető.}$$

Biz.

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_m \le \int_n^m f(x)\,dx$$

$$\hookrightarrow \quad H=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \lim_{m\to\infty}\int_n^m f(x)\,dx = \int_n^{\infty} f(x)\,dx \quad !$$

Példa

$$\boxed{S := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\sqrt{n})^2}}$$

- konvergens-e?
- $S \approx S_{1000}$ közelítés hibája?

$$f(x) := \frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{1}{1/4}\,\frac{1}{x(\ln x)^2} = 4\,\frac{1}{x(\ln x)^2} \qquad x \ge 3$$

$\hookrightarrow$
- $f(x) > 0$, ha $x \ge 3$
- $f \downarrow$ $[3,\infty)$-en
- $f(n) = \frac{1}{n(\ln\sqrt{n})^2} = a_n > 0$

5/

$\Rightarrow$ integrálkritérium alkalmazható:

$$\int_3^\infty 4\,\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = 4\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \underbrace{\frac{1}{x}(\ln x)^{-2}}_{f'f^{-2}}\,dx =$$

$$= 4\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_3^\omega = 4\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{\underbrace{\ln\omega}_{\downarrow\,\infty}}+\frac{1}{\ln 3}\right] = \frac{4}{\ln 3} < \infty$$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\sqrt{n})^2}$ konvergens.

$$0 < H = s - s_{1000} \le \int_{1000}^\infty 4\cdot\frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\,dx = 4\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{1000}^\omega =$$

$$= 4\lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln\omega}+\frac{1}{\ln 1000}\right) = \frac{4}{\ln 1000}$$