1/

Az integrálszámítás néhány alkalmazása

① π irracionális.

Biz. indirekt: Tfh $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$f(x) := \frac{x^n (a-bx)^n}{n!}$$ 2n-ed fokú polinom

$$F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

- $n!\,f(x)$ egész együtthatós polinom
- $f(0)=0$, $f'(0)=0$, …, $f^{(n-1)}(0)=0$

  $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ $j \geq n$
- $$f\left(\frac{a}{b}-x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}-x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b}-x\right)\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}-x\right)^n (bx)^n}{n!} = \frac{(a-bx)^n \cdot x^n}{n!} =$$

  $$= f(x)$$

$\Rightarrow$ $f(\pi) = 0$, $f'(\pi)=0$, …, $f^{(n-1)}(0)=0$

$\pi = \frac{a}{b}$

$f^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ $j \geq n$

2/

$$\frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right] = F''(x)\sin x + F'(x)\cos x -$$

$$- F'(x)\cos x + F(x)\sin x =$$

$$= F''(x)\sin x + F(x)\sin x \;(=)$$

$$F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{n+1} f^{(2n)}(x) + \underbrace{(-1)^n f^{(2n+2)}(x)}_{=0}$$

f $2n$-ed fokú polinom

$$\Downarrow$$

$$F''(x) + F(x) = f(x)$$

$$(=)\; f(x)\sin x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x \, dx = \left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0)$$

Mivel $f^{(j)}(\pi)$ és $f^{(j)}(0)$ egészek $\forall j$-re $\Rightarrow F(\pi)+F(0)$ egész

Ha $0 < x < \pi \Rightarrow 0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ $\left(f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!}\right)$

$$\frac{\pi^n a^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

↳ $0 < \int_0^{\pi} f(x)\sin x \, dx$ de tetszőlegesen kicsivé tehető, ha $n \to \infty$

$\Rightarrow$ nem lehet vele egész értéket minden n-re :

$\pi \neq \frac{a}{b}$ ↯ !

(2) Összegek becslése

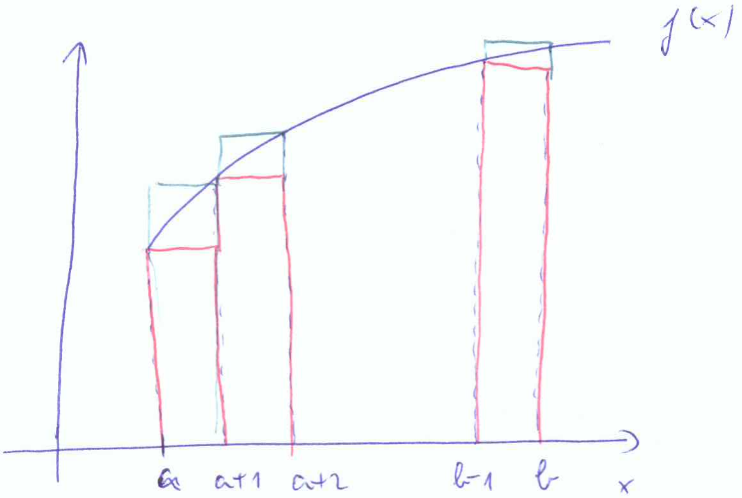
TÉTEL $a < b$ egészek, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő.

Akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx + f(a) \le \sum_{i=a}^{b} f(i) \le \int_a^b f(x)\,dx + f(b).$$

Ha f monoton csökkenő, akkor fordított irányú relációk.

Biz.



F: $a < a+1 < \dots < b-1 < b$ $[a,b]$ felosztása

$$s_F \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_F$$

$f \nearrow \Rightarrow$ $s_F = f(a)\cdot 1 + f(a+1)\cdot 1 + \dots + f(b-1)\cdot 1 = \left(\sum_{i=a}^{b} f(i)\right) - f(b)$

$$S_F = f(a+1)\cdot 1 + f(a+2)\cdot 1 + \dots + f(b)\cdot 1 = \left(\sum_{i=a}^{b} f(i)\right) - f(a)$$

behelyettesítve és rendezve

$\circ$!

4/

Példák

① $[a,b]=[0,n]$, $f(x)=x^k$

- $\underline{k=1}$ $\int_0^n f(x)dx = \int_0^n x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^n = \frac{n^2}{2}$

$f(a)=f(0)=0$, $f(b)=f(n)=n$

$\hookrightarrow$ $\frac{n^2}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} i \leq \frac{n^2}{2}+n$

- $\underline{k=2}$ $\int_0^n f(x)dx = \int_0^n x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^n = \frac{n^3}{3}$

$f(0)=0$, $f(n)=n^2$

$\hookrightarrow$ $\frac{n^3}{3} \leq \sum_{i=1}^{n} i^2 \leq \frac{n^3}{3}+n^2$

- $\underline{k=3}$ $\int_0^n f(x)dx = \int_0^n x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^n = \frac{n^4}{4}$

$f(0)=0$ $f(n)=n^3$

$\hookrightarrow$ $\frac{n^4}{4} \leq \sum_{i=1}^{n} i^3 \leq \frac{n^4}{3}+n^3$

stb.

5/

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad [0, n]$ — n

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{3/2}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \frac{2}{3}n^{3/2} + \sqrt{n}$$

(3) $[a, b] = [1, n]$ $\quad , f(x) = \frac{1}{x}$ $\searrow$

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^n = \ln n$$

$f(1) = 1 \quad , f(n) = \frac{1}{n}$

$$\ln n + 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \ln n + \frac{1}{n}$$

(4) $[a, b] = [1, n]$ $\quad , f(x) = \ln x$

$$\hookrightarrow \quad \int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1$$

$$\hookrightarrow \quad n\ln n - n + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \ln i \leq n\ln n - n + \ln n + 1$$

$$\underset{\exp}{\hookrightarrow} \quad \boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

6)

Ha a konvexitást is kihasználjuk, még pontosabb becslést kaphatunk.

TÉTEL $a < b$ egészek, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő konvex

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} \le \sum_{i=a}^{b} f(i) \le \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(a)-f(a+1)}{2}.$$

Ha f monoton növő és konkáv $\Rightarrow$ fordított irányú egyenlőtlenséggel

Példa: $[a,b]=[1,n]$, $f(x)=\ln x$ $\to$ konkáv és növő

$$\hookrightarrow \; n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} - \frac{\ln 2}{2} \le \sum_{i=1}^{n} \ln i \le n\ln n - n + 1 - \frac{\ln n}{2}$$

$\hookrightarrow^{\exp}$

$$\boxed{\frac{e}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \le n! \le e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$$