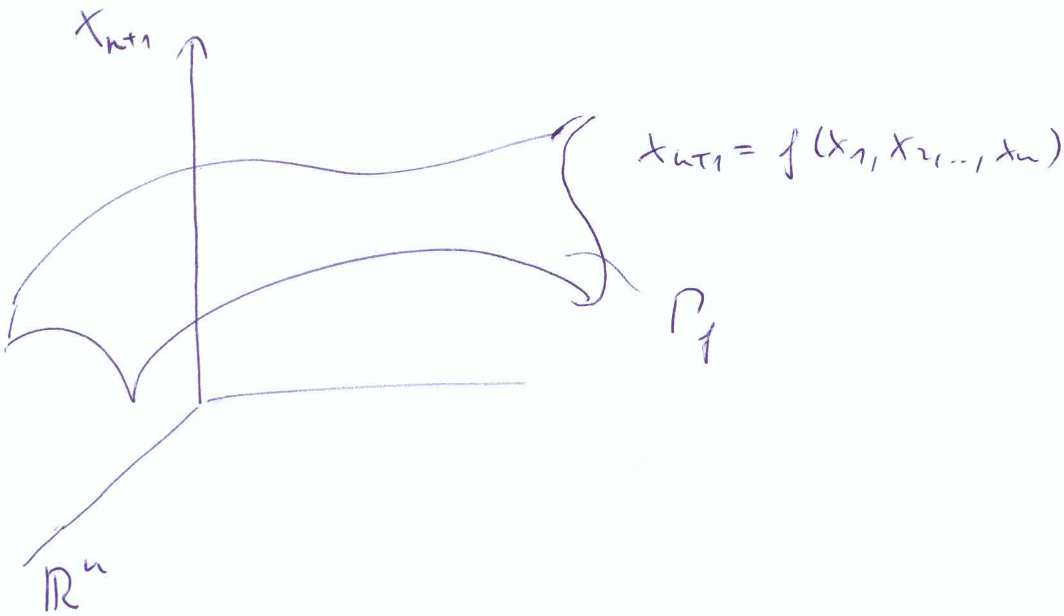
Többváltozós függvények szemléltetése

Def. $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

függvényt n-változós függvénynek hívjuk.

Az f függvény gráfja (grafikonja):

$$\Gamma_f := \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f,$$
$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$



Def. $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, az

$$\{\underline{x} \in D_f : f(\underline{x}) = c\}$$ halmazt az f

függvény $c \in \mathbb{R}$ számhoz tartozó szinthalmazának hívjuk.
(nívóhalmazának)

Spec
- $n = 2 \to$ nívó (szint) görbék
- $n = 3 \to$ nívó (szint) felületek

60/

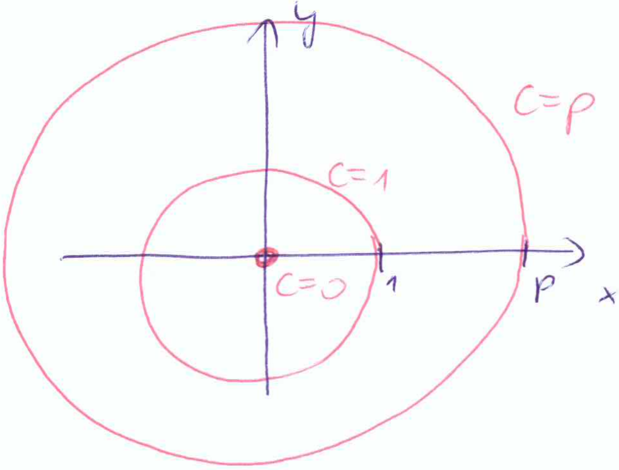
$\boxed{\text{(1) Pl}}$

$\cancel{z = a^2 x^2 +}$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad D_f = \mathbb{R}^2$$

- $\underline{c=0}$ $\quad \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff (x,y) = (0,0)$
- $\underline{c=1}$ $\quad \sqrt{x^2+y^2} = 1 \iff x^2+y^2 = 1$ egységkör
- $\underline{c=p>0}$ $\quad \sqrt{x^2+y^2} = p \iff x^2+y^2 = p^2$ p sugarú origó középpontú kör

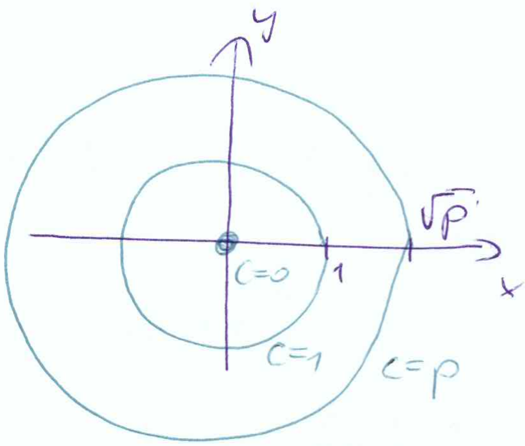
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ szintvonalai



szintvonalak = origó középpontú körök

(2) $f(x,y) = x^2+y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$

- $\underline{c=0}$ $\quad x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$
- $\underline{c=1}$ $\quad x^2+y^2 = 1 \implies$ egységkör
- $\underline{c=p>0}$ $\quad x^2+y^2 = p \implies \sqrt{p}$ sugarú origó középpontú kör



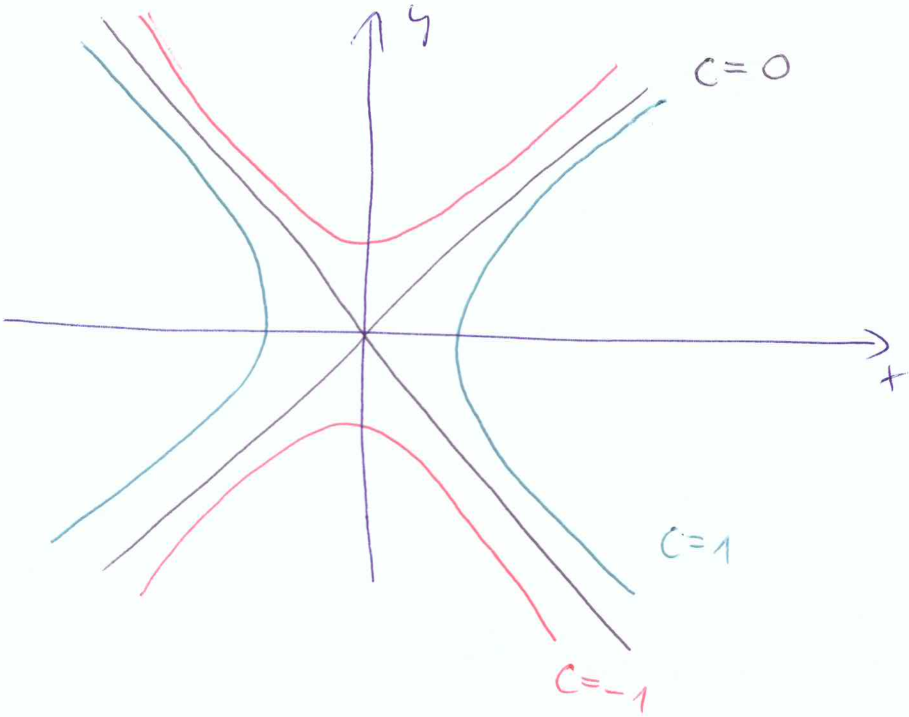
szintvonalak = körök

61/

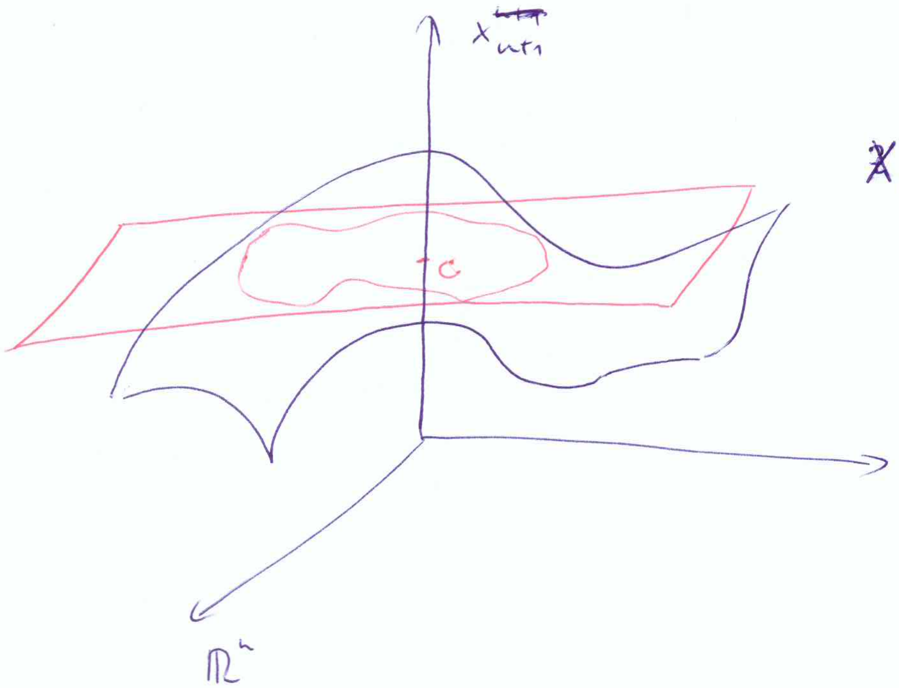
Pl 3

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2$$

- $c = 1$ $\quad x^2 - y^2 = 1 \rightsquigarrow$ hiperbola
- $c = 0$ $\quad x^2 - y^2 = 0 \rightsquigarrow y = \pm x$ egyenesek
- $c = -1$ $\quad x^2 - y^2 = -1 \rightsquigarrow y^2 - x^2 = 1$ hiperbola



Ált.



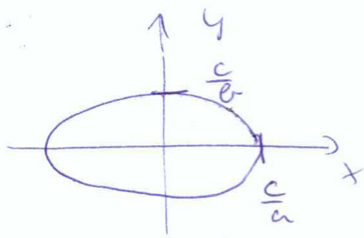
$$x_{n+1} = f(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$n=2$ esetén, vagyis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós esetben a szemléltetést megkönnyíti, ha egyéb síkmetszeteket is vizsgálunk.

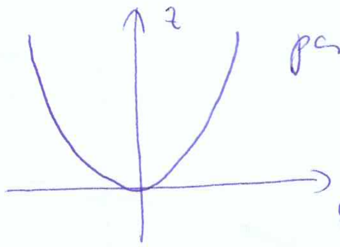
Példák

① $\boxed{z = a^2x^2 + b^2y^2}$ $\quad$ ($f(x,y) = a^2x^2 + b^2y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$)

- szintvonalak $\equiv$ $z = c$ alakú síkmetszetek
  - $z = 0 \Rightarrow P(0,0)$ origó
  - $z = c^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a^2}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{c^2}{b^2}\right)} = 1$ ellipszek

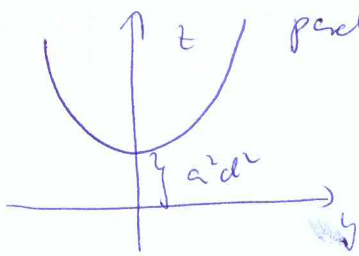


- (y,z) síkkal párhuzamos metszetek:
  - $x = 0 \Rightarrow z = b^2y^2$



parabola

  - $x = d \Rightarrow z = (a^2d^2) + b^2y^2$



parabola

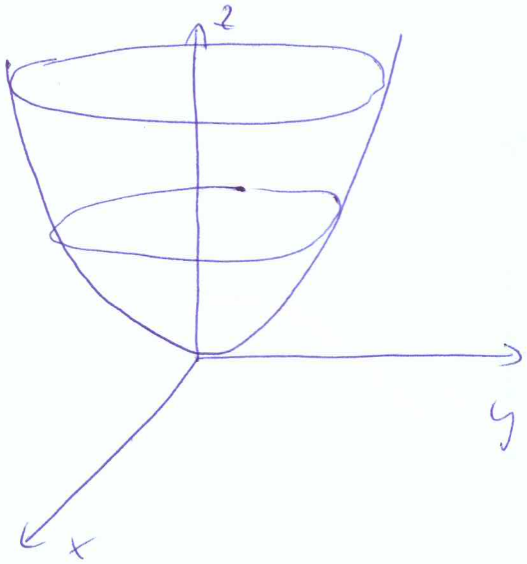
63)

- (x,z) síkkal vett metszetek:

  - $y=0 \Rightarrow z=a^2x^2$ parabola
  - $y=d \Rightarrow z=a^2x^2+b^2d^2$ parabola

$$\Downarrow$$

összetéve: $z=a^2x^2+b^2y^2$ elliptikus paraboloid



spec: $a^2=b^2 \rightsquigarrow$ forgási paraboloid (szintvonalak: körök)

(2) $\boxed{z=a^2x^2-b^2y^2}$

(x,y) síkkal ∥ metszetek:
- $z=0 \Rightarrow y=\pm\frac{a}{b}x$ egyenespár
- $z=c \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{c}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{c}{b^2}}=1$ hiperbola (aszimptoták: $y=\pm\frac{a}{b}x$)

(y,z) síkkal ∥ metszet:
- $x=0 \Rightarrow z=-b^2y^2$ parabola
- $x=d \Rightarrow z=(a^2d^2)-b^2y^2$ eltolt parabola

6b/

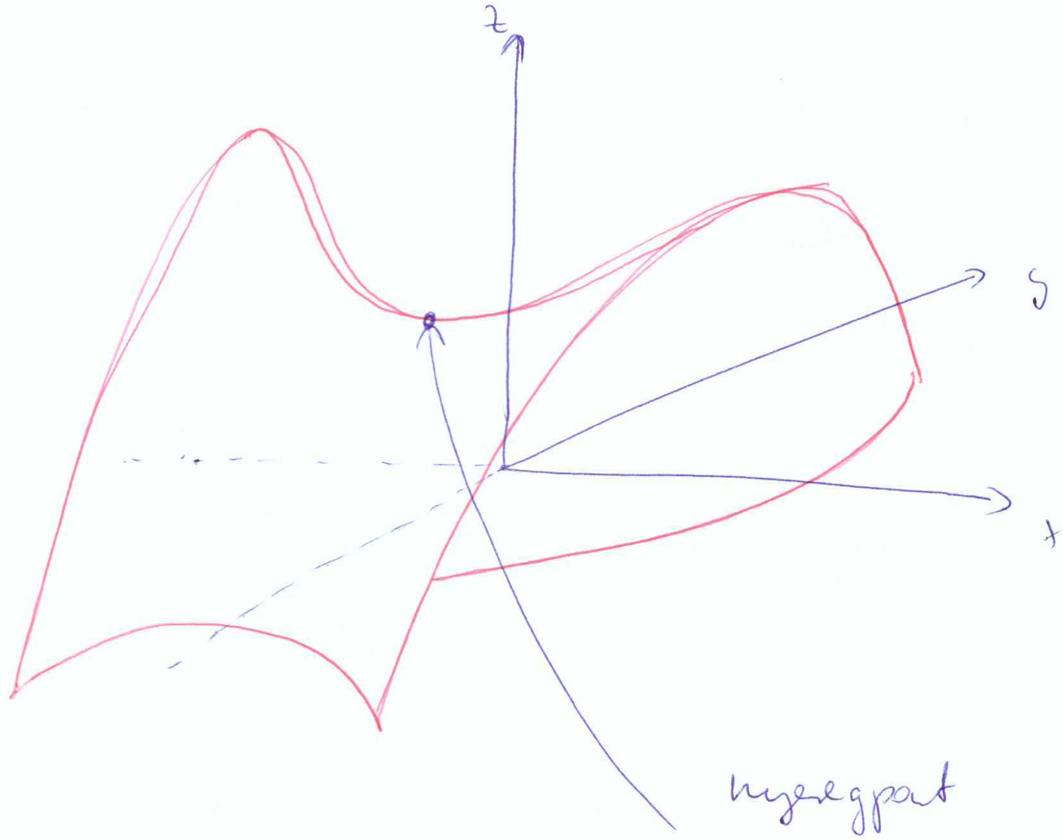
$(\cancel{x},z)$ síkkal $\parallel$ metszete

$$\begin{cases} \bullet\ y=0 \Rightarrow z=a^2x^2 \text{ parabola} \\ \bullet\ y=d \Rightarrow z=a^2x^2-(b^2d^2) \text{ parabola} \end{cases}$$

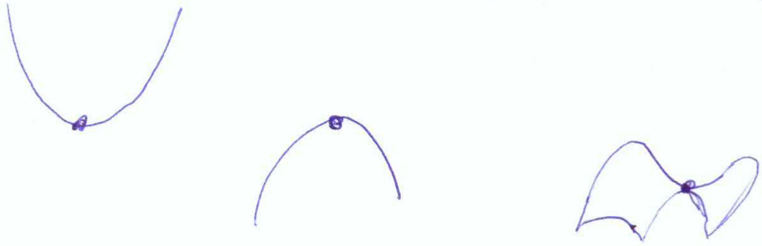
$$\Downarrow$$

$z = a^2x^2 - b^2y^2$ <u>hiperbolikus paraboloid</u>

(nyeregfelület)



a felületnek nem minimuma és nem maximuma, de $\forall$ z tengellyel $\parallel$ síkkal vett metszetnek minimuma vagy maximuma van



65)

(3) $\boxed{z = ax + by^2 + c}$ $a \neq 0,\ b \neq 0$

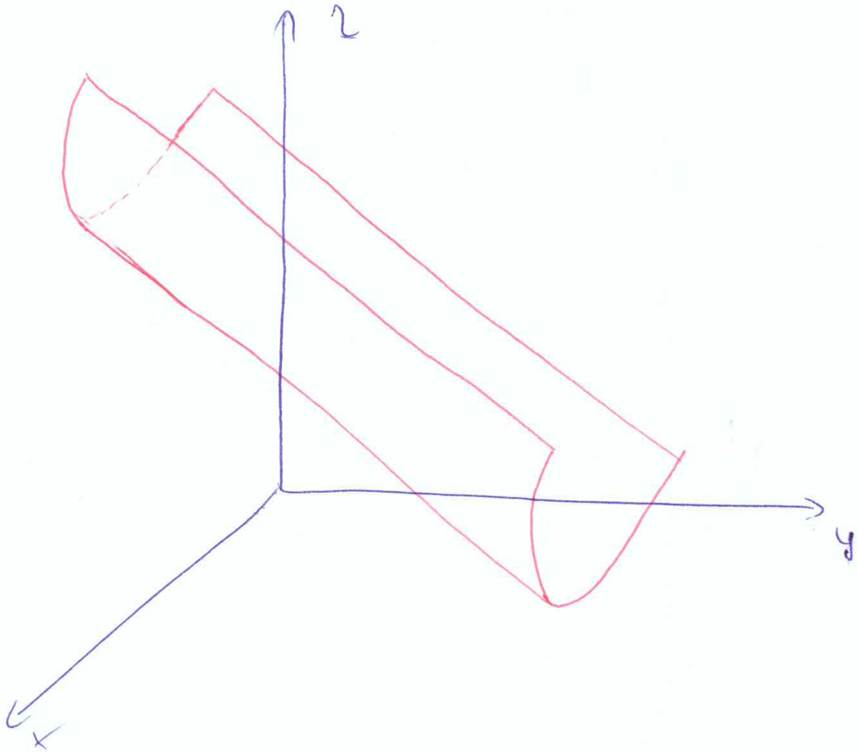
- $z = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{b}{a}y^2 - \frac{c}{a}$ parabola
- $z = d \rightsquigarrow \cancel{x} = -\frac{b}{a}y^2 - \frac{c}{a} + \frac{d}{a}$ parabola

- $x = 0 \rightsquigarrow z = by^2 + c$ parabola
- $x = d \rightsquigarrow z = by^2 + c + ad$ parabola

- $y = 0 \Rightarrow z = ax + c$ egyenes
- $y = d \Rightarrow z = ax + c + bd^2$ egyenes

$\Downarrow$

<u>parabolikus henger</u>



66/ (4)

$$\boxed{z = \pm\sqrt{ax^2+b^2y^2}}$$

- $z=0 \Rightarrow P(0,0)$ origó
- $z=c \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a^2}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{c^2}{b^2}\right)} = 1$ ellipszis

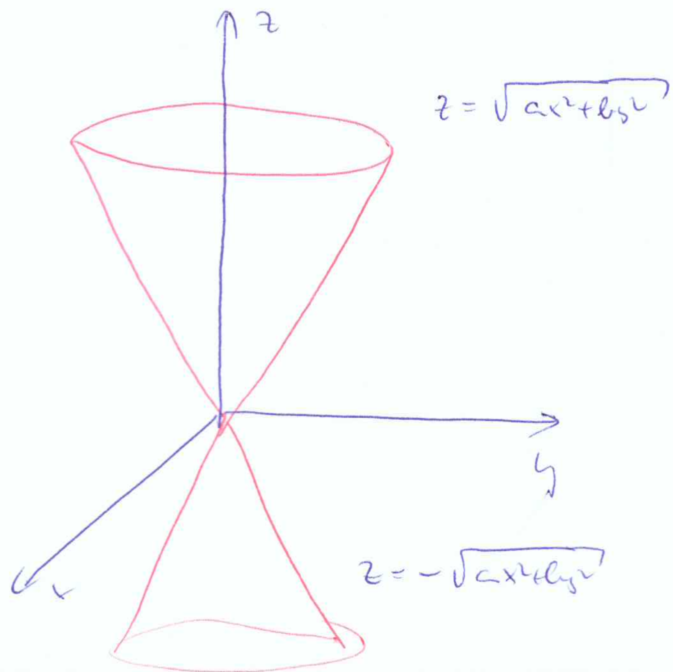
($a^2=b^2 \rightsquigarrow$ kör)

- $x=0 \Rightarrow z=\pm by$ egyenespár
- $x=d \Rightarrow \dfrac{z^2}{a^2d^2} - \dfrac{y^2}{\frac{a^2d^2}{b^2}} = 1$ hiperbola

- $y=0 \Rightarrow z=\pm ax$ egyenespár
- $y=d \Rightarrow \dfrac{z^2}{b^2d^2} - \dfrac{x^2}{\frac{b^2d^2}{a^2}} = 1$ hiperbol

$\Downarrow$

<u>elliptikus kúp</u>

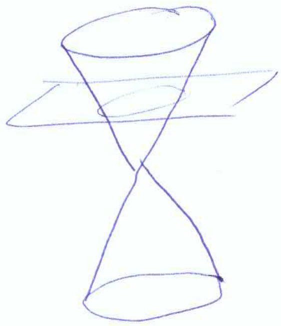


<u>spec</u> $a^2=b^2$

$\Downarrow$

<u>forgáskúp</u>

Megj:



kúpszeletek: pont, kör, ellipszis

→ parabola, hiperbola

egyenespár

↳ egységes elmélet: Monge-elmélet – kúpszeletek elmélete

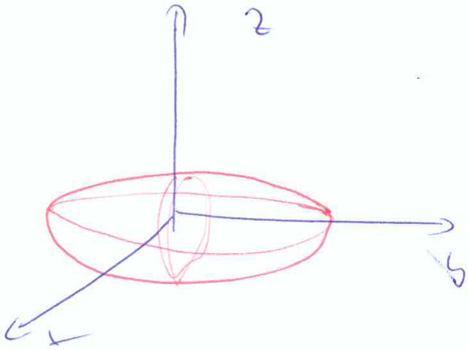
(5) implicit módon megadott felületek → $z = f(x,y)$ helyett

$$\boxed{F(x,y,z(x,y))=0}$$

pl: a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ → ellipszoid

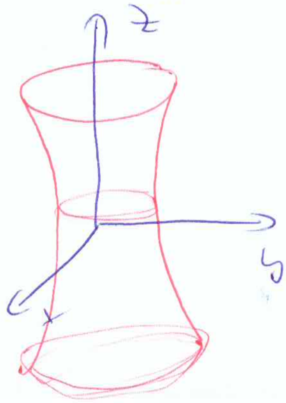
↑

∀ koord síkkal való metszete ellipszis



spec. $a^2=b^2=c^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=R^2$ origó kp-ú R sugarú gömb.

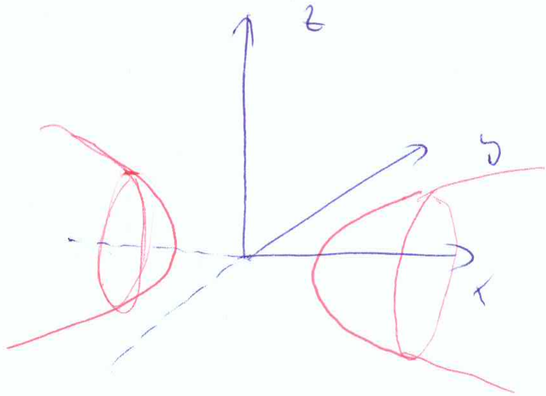
b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ → egyköpenyű hiperboloid – hűtőtorony



$a^2=b^2$ → forgási

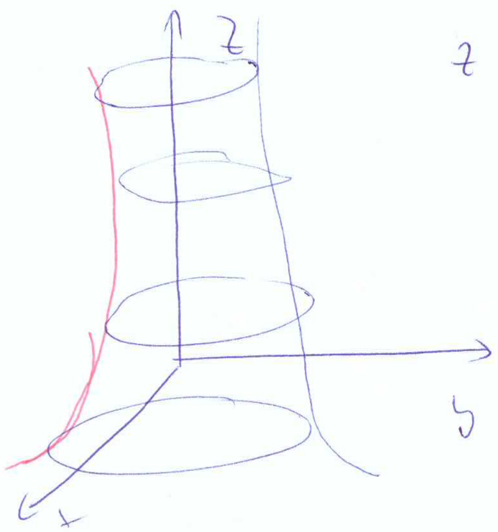
68/

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ⇝ kétköpenyű hiperboloid



Megj. forgástestek – pl z tengely körüli forgatásra szimmetrikusak

(x,z) síkban felírt $z = f(x)$-et megforgatjuk a z tengely körül

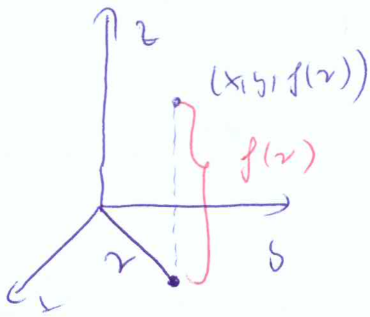


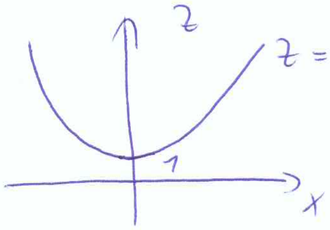
z tengelytől vett távolság:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

⇓

$z = f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2})$



pl: 

$z = x^2+1$ parabola megforgatása

↳

$z = (\sqrt{x^2+y^2})^2 + 1 = x^2+y^2+1$

forgási paraboloid

65/

Többváltozós függvények határértéke

Def. $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, n változós függvény $\underline{a}$-beli határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha

1) $\underline{a}$ torlódási pontja D_f-nek

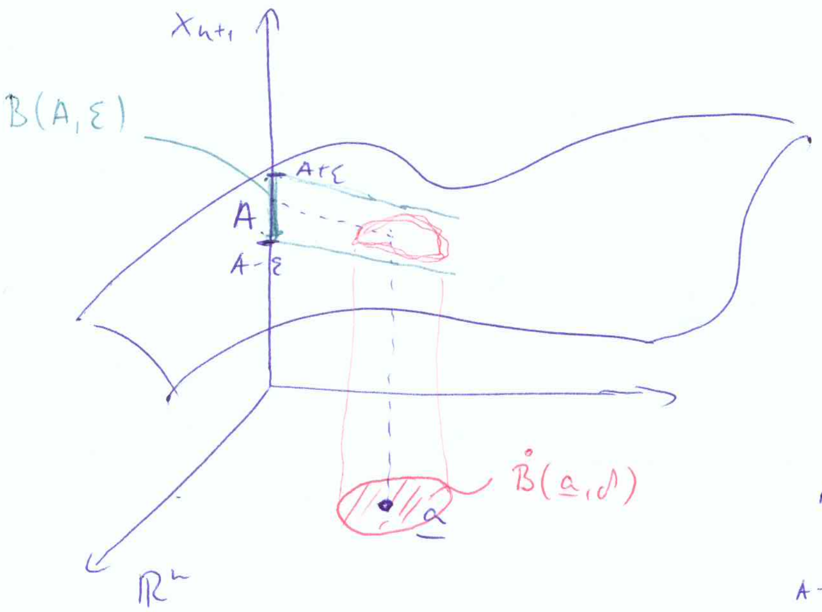
2) $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha

$$\underbrace{\underline{x} \in D_f \text{ és } 0 < d(\underline{x}, \underline{a}) = \| \underline{x} - \underline{a} \| < \delta}_{\underline{x} \in \mathring{B}(\underline{a}, \delta) \cap D_f},$$

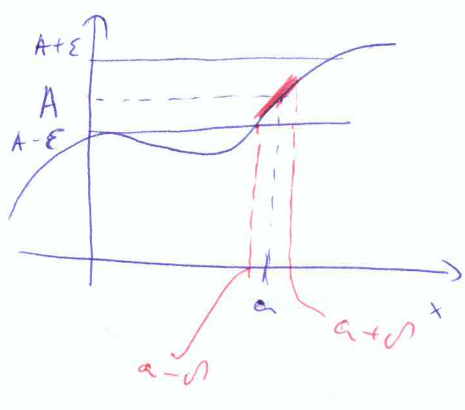
akkor

$$|f(\underline{x}) - A| < \varepsilon \quad (\text{vagyis } f(\underline{x}) \in B(A, \varepsilon)).$$

jel. $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = A$.



eml. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



TÉTEL (Átviteli elv)

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = A \iff \forall \, (\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D_f \setminus \{\underline{a}\}$$

sorozatra, melyre $\underline{x}_n \to \underline{a}$

$$\Rightarrow \quad f(\underline{x}_n) \to A$$

Biz. teljesen ugyanúgy bizonyítható, mint 1 változós esetben. !

Következmény: Az 1 változóban bizonyított tételek érvényben maradnak.

Pl ① Ha $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ és $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = A$, $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} g(\underline{x}) = B$, akkor

- $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \left(f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \right) = A + B$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \left(c \cdot f(\underline{x}) \right) = c \cdot A \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \left(f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) \right) = A \cdot B$
- Ha $B \neq 0$, akkor $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \dfrac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \dfrac{A}{B}$

!

71)

② Rendőrelv

$f, g, h : D \to \mathbb{R}$ és $\forall\, \underline{x} \in D \setminus \{\underline{a}\}$-ra
($D \subset \mathbb{R}^n$)

$$f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \leq h(\underline{x}) \quad \text{és}$$

$\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(x) = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} h(x) = A$, akkor $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x}) = A$!

Példák

①
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{, mert}$$

ha $0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, akkor

$$|f(x,y)-A| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{2xy}\right| = \frac{1}{2}|y| < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

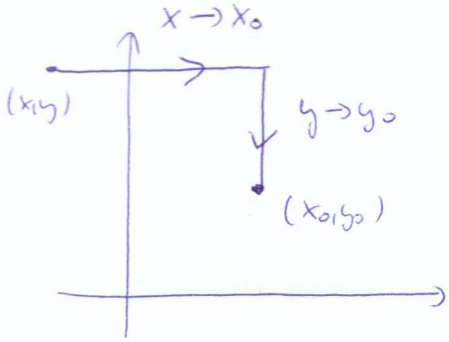
($|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$)

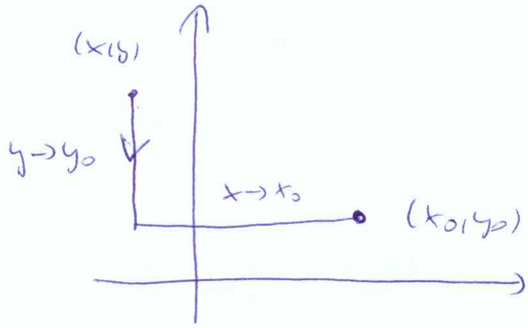
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 > 0 \Rightarrow |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

vagyis $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\delta = 2\varepsilon$ jó választás.

② Iterált határértékek

Pl. $n=2$





$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \qquad\qquad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

TÉTEL Ha $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ $\exists$, akkor

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Biz. házi.

Általában arra tudjuk használni, hogy belássuk, hogy egy határérték $\nexists$.

Pl. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ határértéke $(0,0)$-ban?

$$\lim_{y\to 0}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}}_{\frac{-y}{y}=-1} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$\neq \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y} \ \nexists$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}}_{\frac{x}{x}=1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

73/

Pl $f(x,y)=\frac{y}{x+y}\sin\frac{1+xy}{y}$ hatérértéke $(0,0)$-ban?

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{y}{x+y}\sin\frac{1+xy}{y}}_{\frac{y}{y}\sin\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}\quad\nexists$$

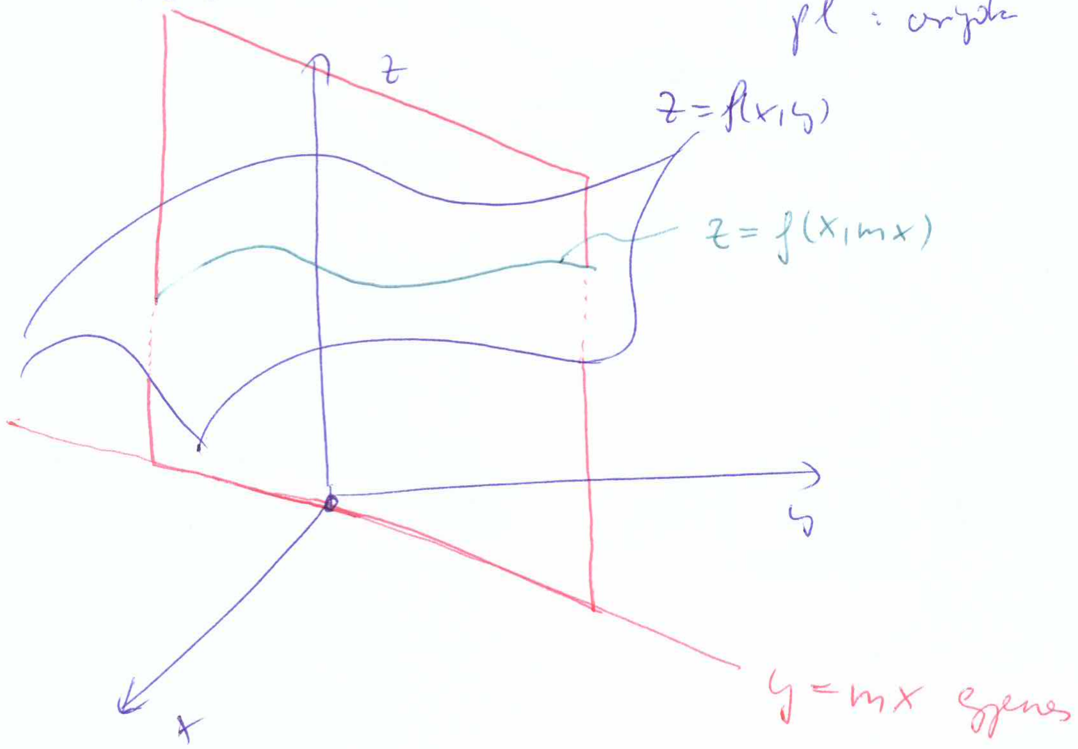
$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y}{x+y}\sin\frac{1+xy}{y}}_{0}=0$$

$\Downarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ \nexists$

③ Módszer: a kérdéses pontban a ~~koordináta tengel~~ z tengellyel párhuzamos síkokkal metsszük a felületet, ha $\exists$ a határérték $\forall$ metszetnél, csak akkor lehet határértékünk

pl: origó



74/

Pl 11

$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ határértéke $(0,0)$-ban?

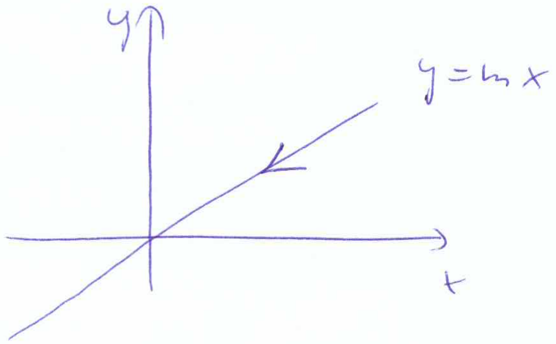
- iterált limesek:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

↳ ha $\exists$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték, az csak a 0 lehet.

- $y=mx$ egyenesek mentén tartva 0-hoz:

$x\to 0$ + $y=mx$ $\Rightarrow$ $(x,y)\to(0,0)$



$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

$\Uparrow$

függ m-től, vagyis attól, hogy milyen meredekségű egyenes mentén tartunk $(0,0)$-ba

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Longleftarrow$

75/

Pl 2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}$ határérték $(0,0)$-ban?

$y=mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to0} f(x,mx)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(mx)^2}{3x^4+4(mx)^4}=\lim_{x\to0}\frac{m^2x^4}{3x^4+4m^4x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{m^2}{3+4m^4}=\frac{m^2}{3+4m^4}$$

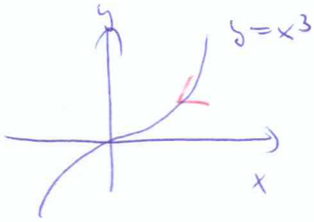
$\to$ függ m-től, azaz az origóhoz való tartás módjától

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Pl 3) Ha minden egyenes mentén ugyanaz a határérték, az még nem elégséges!

$f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ határérték $(0,0)$-ban?

- $y=mx$ $\quad \lim_{x\to0} f(x,mx)=\lim_{x\to0}\dfrac{x^3mx}{x^6+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{mx^2}{x^4+m^2}=0$ $\quad \forall m$-re
- de ha $y=x^3$ mentén tartunk a $(0,0)$-hoz:

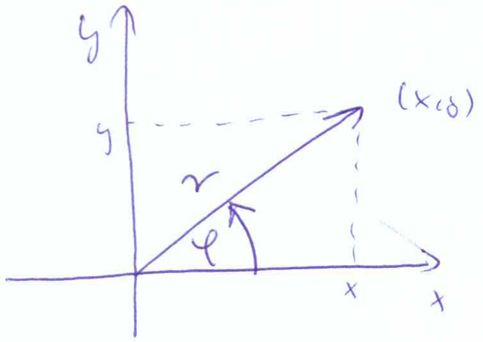


$$\lim_{x\to0} f(x,x^3)\overset{\lim_{x\to0}}{=}\frac{x^6}{x^6+x^6}=\frac{1}{2}\neq0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ \nexists$$

Egy hasznos módszer 2 változós függvények határértékénél:

polárkoordinátákra levezetése



(x,y) Descartes-koordináták

$\Updownarrow$

(r,φ) polárkoordináták

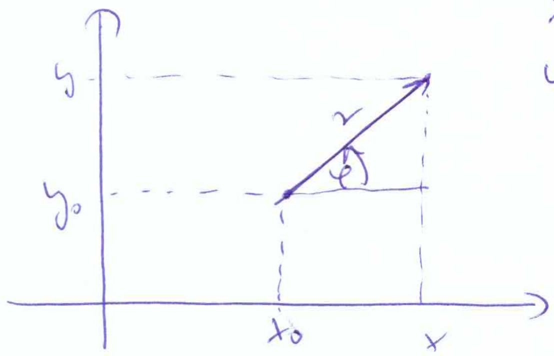
sugár — polárszög

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{(x,y)\to(0,0) \iff r\to 0}$$

Általánosítva



$$x = x_0 + r\cos\varphi$$

$$y = y_0 + r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(x,y)\to(x_0,y_0) \iff r\to 0}$$

TÉTEL $D\subset\mathbb{R}^2$, ha $f: D\to\mathbb{R}$ fvnek $\underline{x_0}\in D'$ pontban $\exists$ a határértéke és az A, akkor

$$\lim_{r\to 0} f(x_0+r\cos\varphi,\, y_0+r\sin\varphi) = A$$

77/

Példák

(1) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$ határértéke $(0,0)$-ban?

(már láttuk)

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$$\lim_{r\to0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\lim_{r\to0}\frac{2r\cos\varphi\, r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2}=\lim_{r\to0} 2r\underbrace{\cos\varphi\sin^2\varphi}_{\text{korlátos}}=0$$

↳ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

(2) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ határértéke $(0,0)$-ban?

$$\lim_{r\to0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\lim_{r\to0}\sin\frac{1}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\lim_{r\to0}\sin\frac{1}{r^2}\quad\nexists$$

↳ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\quad\nexists$

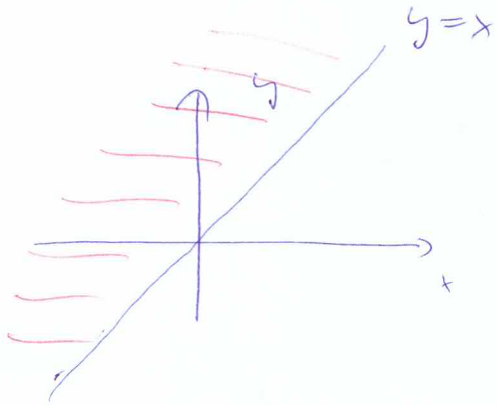
78/

Def: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ $\pm\infty$-hez divergál $\underline{a}$-ban (±)∞, ha

1) $\underline{a} \in D'$

2) $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists \delta > 0$, hogy $\forall \underline{x} \in D$, $0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ esetén $f(\underline{x}) > K$ $\quad (f(x) < K)$

jel. $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = +\infty \ (-\infty)$



Pl. $D := \{(x, y) : y > x\}$ félsík

$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{1}{y - x} = \infty$, mert

ha $K > 0$ $\Rightarrow$ $0 < \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \underbrace{\frac{1}{K}}_{\delta}$ esetén

$|x|, |y| < \frac{1}{K} \Rightarrow |y - x| < \frac{2}{K}$

Másrészt, ha $(x, y) \in D$, akkor $x < y \leadsto 0 < y - x < \frac{2}{K}$

$\hookrightarrow \frac{1}{y - x} > \frac{K}{2}$

Hasonlóan: $\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \{(x,y) : y < x\}}} \frac{1}{y - x} = -\infty$, de $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{y - x} \ \nexists$!