16)

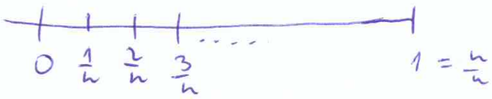
② Végtelen összegek határértéke

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=(*)$$

$I=[0,1]$ n egyenlő részre osztva:



osztópontok: $x_i=\frac{i}{n}$ $\quad i=0,\dots,n$

$x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}\quad\forall i$

$f(x):=\frac{1}{1+x}\quad\rightsquigarrow\quad f(x_i)=\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

vagyis $(*)$ az $f(x)=\frac{1}{1+x}$ függvény integrálközelítő összege $[0,1]$-en ekvidisztáns felosztás mellett

$$\Rightarrow\quad (*)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2-\ln 1=\underline{\underline{\ln 2}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2}$$

17/

b)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=?$$

$$a_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right)$$

$\Rightarrow$ $f: [0,1]\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x):=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$F_n := \left\{\frac{i}{n} : i=0,1,\dots,n\right\}$ $\qquad n=1,2\dots$

$\uparrow$

[0,1] ekvidisztáns felosztása

Mivel $f(x)$ integrálható $[0,1]$-en, ezért a_n az F_n felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg, ami tart az integrálhoz, ha $n\to\infty$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dt =$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$a_n := \frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$F_n := \left\{ \frac{i}{n} : i = 1,\ldots,n \right\} \in [0,1] \text{ felosztása}$$

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \qquad f(x)=x^\alpha$$

(a_n) F_n felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{\alpha+1}}}$$