1. MINTA ZÁRTHELYI

Kalkulus 1.
MATEMATIKA BSc

Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név:

Neptun kód: | | | | | | |

1.	2.	3.	4.	5.	6*.	$\sum$

1. (**4+4 pont**)
   (a) Legyen A, B és C tetszőleges halmazok. Mutassa meg, hogy
   $$(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$$
   (b) Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. Mutassa meg, hogy minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f általi ősképe, azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in D\}$ halmaz megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével, azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : y \in D\}$ halmazzal.

2. (**10 pont**)
   Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy korlátos valós számsorozat, továbbá legyen
   $$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$
   Mutassuk meg, hogy $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos, valamint
   $$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. (**8+4 pont**)
   (a) Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy H torlódási pontjainak halmaza zárt.
   (b) Határozza meg az $A = (-3, -1] \cup \{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\} \cup [5, 6] \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak, külső pontjainak, határpontjainak, torlódási pontjainak illetve izolált pontjainak a halmazát!

4. (**5+5 pont**)

(a) Tekintsük az

$$a_n = \frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2}$$

sorozatot! Mi a sorozat határértéke, amennyiben létezik? Adjon meg egy N küszöbindexet, amitől kezdve a sorozat tagjai a határértéket 10^{-3}-nál jobban megközelítik!

(b)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n) = ?$$

5. (**5+5 pont**)
Határozza meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékét, ahol

(a)

$$a_n = \left(\frac{-3n+1}{4n+4}\right)^{4n-2} (\sqrt{3n^4 + 2n - 1} - \sqrt{3n^4 + n^2 - n}),$$

(b)

$$a_n = \sqrt[3n^2]{n^2 + 2n + 4}.$$

6. (**5+5 pont - BÓNUSZ**) Határozza meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékét, ahol

(a)

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2},$$

(b)

$$a_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)^n.$$