VIK A2 Matematika
11-12. Gyakorlati anyag

2021/22. 2. félév

Kettős integrálok

1. Számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat a megadott T tartományon!

   (a) $\iint_T xy \,\mathrm{d}\,T$, ahol T határgörbéi: $y = 0, y = 6 - x, y = \sqrt{x}$.

   (b) $\iint_T \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,T$, ahol T a $(0,0),(1,1),(0,1)$ csúcspontú háromszög.

   (c) $\iint_T \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \,\mathrm{d}\,T$, ahol T az első síknegyedbe eső, az $y = x^2$, y=4, $x = 0$ görbék által határolt korlátos tartomány.

   (d) $\iint_T xy^2 \,\mathrm{d}\,T$, ahol $T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1 - x\}$.

   (e)
   $$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y.$$

2. Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

   (a)
   $$\int_1^2 \int_{\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} f(x,y) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y.$$

   (b)
   $$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y.$$

   (c)
   $$\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y) \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,x.$$

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

   (a)
   $$\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y,$$

   (b)
   $$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y,$$

   (c)
   $$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y.$$

4. Határozza meg az alábbi integrálokat! (polártranszformáció)

   (a)
   $$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y,$$

   (b)
   $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y,$$

   (c)
   $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, x,$$

   (d) $\iint_T xy \, \mathrm{d}\, T$, ahol T az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körök által határolt korlátos síkrész.

   (e)
   $$\iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0} \frac{x - y}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y.$$

5. Rajzolja fel az alábbi T tartományokat és számítsa ki a területüket!

   (a) T az $y^2 = x, y^2 = x/2, y = x/2, y = x/3$ görbék által határolt korlátos tartomány.

   (b) T az $xy = 1, xy = 4, y = x^2, y = x^2/2$ görbék által határolt korlátos tartomány.

   (c) (**iMSc**) T az $(x/a + y/b)^2 = x/a - y/b$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt tartomány.

Hármas integrálok

1. Számítsuk ki az alábbi hármas integrálokat a megadott tartományon!

   (a) $\iiint_V e^{x+y+z}\,\mathrm{d}\,V$, ahol
   $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le x+y, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.

   (b) $\iiint_V \frac{\mathrm{d}\,T}{(1+x+y+z)^3}$, ahol V az $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ és $z=0$ síkokkkal határolt korlátos térrész.

   (c) $\iiint_V \mathrm{d}\,V$, ahol $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z^2, x^2+y^2+z^2\le 9\}$.

   (d) (**iMSc**) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,V$, ahol V az $x^2+y^2+z^2=z$ felülettel határolt tartomány.

2. Határozza meg az alábbi V testek térfogatát!

   (a) V az $z=x^2+y^2$ paraboloid, a $z=0$ sík és az $(x-2)^2+y^2=4$ alapkörű egyenes körhenger által határolt korlátos tartomány.

   (b) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\le\sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2\ge 1, z\ge 0\}$.

   (c) V az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, az $y=\frac{bx}{a}$, az $y=0$ illetve $z=0$ felületek által határolt $x>0$ térrész.

   (d) (**iMSc**) V az $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=x$ felület által határolt tartomány.

3. (**iMSc**)
$$\iiint_v \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y\;\mathrm{d}\,z=?,$$
   ahol $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$.

4. Egy mérhető $T\subset\mathbb{R}^3$ tartományt $\rho=\rho(x,y,z)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás tömegközéppontjának koordinátái:
$$x_s=\frac{\int_T x\rho\,\mathrm{d}\,T}{M},\quad y_s=\frac{\int_T y\rho\,\mathrm{d}\,T}{M},\quad z_s=\frac{\int_T z\rho\,\mathrm{d}\,T}{M},$$
   ahol $M=\int_T \rho\,\mathrm{d}\,T$ a test tömege.

   (a) Határozzuk meg az (x,y) síkon álló és fölötte elhelyezkedő R sugarú homogén ($\equiv$ állandó sűrűségű) félgömb tömegközéppontjának koordinátáit!

   (b) Határozzuk meg a homogén csonkakúp tömegközéppontjának az alaptól mért távolságát, ha az alap- illetve fedőkörlap sugara R illetve r, a magassága pedig h.