# VIK A2 Matematika,
# 3. Gyakorlati anyag

2021/22. 2. félév

## Generátorrendszer, bázis

1. Határozzuk meg az alábbi vektorokból álló vektorrendszer rangját! Ha a rendszer valódi alteret generál, minimális számú vektor hozzávételével érjük el, hogy az egész teret generálják!

   (a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   (b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (c)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Benne fekszik-e a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben?

(a)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -2 \\ 4 \\ -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Az $a$ és $b$ paraméterek milyen értéke mellett lesz benne a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai által generált térben?

(a)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & b \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & b \\ -a & 0 & b & a \\ -a & a & b & 0 \\ a & 0 & -b & -a \end{bmatrix}.$$

4. Adjunk meg olyan $\mathbf{c}$ vektort, mellyel együtt az $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$ vektorrendszer lineárisan független!)

(a)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -c \\ 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# Lineáris egyenletrendszerek

1. Gauss-eliminációval oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + -2x_5 &= 6 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= -2 \\ 12x_1 + 4x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, ahol $a$ és $b$ valós paraméterek !

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ ax_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ ax_1 + x_2 + bx_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ax_2 &= 2 \\ x_1 + bx_2 &= 2 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (3a-1)x_1 + 2ax_2 + (3a+1)x_3 &= 1 \\ 2ax_1 + 2ax_2 + (3a+1)x_3 &= a \\ (a+1)x_1 + (a+1)x_2 + 2(a+1)x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

(e) (**iMSc**)

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + ay + abz &= a \\ bx + a^2y + a^2bz &= a^2b. \end{aligned}$$

(f) (**iMSc**) Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} ay + bx &= c \\ cx + az &= b \\ bz + cy &= a \end{aligned}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Bizonyítsuk be, hogy $abc \neq 0$, és adjuk meg az egyenletrendszer megoldását!