Kibővített előadásjegyzet a VIK A2 Matematika tárgyhoz

Pitrik József

7. oktatási hét

Ez a oktatási segédlet az A2 előadásaim kommentekkel ellátott, szerkesztett változata, ami azzal a céllal íródott, hogy a távoktatás keretein belül elősegítse a Koronavírus járvány miatt sajnálatosan elmaradt előadások pótlását. Mivel sietve készült, ezért számos hibát, elírást tartalmazhat és a nyelvi megfogalmazások is inkább közelebb állnak a beszélt nyelvhez, mint a szokásos jegyzeteké. Kiegészítésképpen a jegyzetek végén ajánlott irodalom található, mely a további elmélyedést segítheti. Bármilyen észrevételt szívesen fogadok a pitrik@math.bme.hu címre. A subjectbe legyenek szívesek beírni, hogy „A2 jegyzet”. Mindenkinek jó egészséget, türelmet, kitartást és sikeres felkészülést kívánok! A mihamarabbi viszontlátás reményében, üdvözlettel: PJ.

1. Lineáris leképezések

Lineáris leképezéseknek a vektorterek művelettartó leképezéseit nevezzük. Sok egyéb módon is szokás hívni őket, pl. lineáris transzformációknak, lineáris operátoroknak, tenzoroknak vagy vektortérhomomorfizusoknak. Néha ebben a jegyzetben is ezek valamelyikeként hivatkozunk rájuk, a stílus színesítése céljából.

Definíció. *Legyen V és W két vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest felett. A $T : V \to W$ leképezés lineáris, ha bármely $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ vektor és bármely $c \in \mathbb{K}$ skalár esetén*

1. *$T(c\,\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ (T homogén)*
2. *$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ (T additív).*

A V vektorteret T indulási terének vagy értelmezési tartományának, míg W-t T érkezési terének hívjuk. A V-ből W-be képező lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{L}(V, W)$-vel jelöljük (tehát $T \in \mathcal{L}(V, W)$).

Fontos megjegyezni, hogy a fenti definícióban szereplő egyenletek két oldalán nem ugyanazok a műveletek szerepelnek: a bal oldalon a skalárral való szorzás és az összeadás V-beli műveletként, míg a jobboldalon W-beli műveletként értendő! A definíció azt akarja kifejezni, hogy T művelettartó (homomorfizmus): mindegy, hogy két vektort először összeadok V-ben és az összegüket transzformálom W-be, vagy külön-külön áttranszformálom őket, és az áttranszformáltakat adom össze W-beli vektorokként. (A skalárral való szorzásra hasonlóan.) Megmutatjuk, hogy a nullelemek nullelembe, ellentettek ellentettbe, lineáris kombinációk lineáris kombinációkba képződnek át.

Állítás. *Legyenek V, W vektorterek $\mathbb{K}$ test felett, $\mathbf{0}_V$ illetve $\mathbf{0}_W$ nullelemekkel, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Ekkor*

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$, *minden* $\mathbf{v} \in V$ *esetén.*
3. $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$, *bármely* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ *és* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *esetén.*

Bizonyítás. 1. $T(\mathbf{0}_v) = T(0 \cdot \mathbf{0}_V) = 0 \cdot T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

2. $T(-\mathbf{v}) = T((-1) \cdot \mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.

3. T additívitásának többszöri alkalmazásával könnyen ellenőrizhető. □

Lineáris leképezésekkel számtalan helyen fogunk találkozni tanulmányaink során. Nézzünk néhány példát (mindenki gondolja meg, hogy tényleg lineáris transzformációkról van szó!)

Példa 1. **Példák lineáris leképezésekre**

1. $V = W = \mathbb{R}^2$ síkvektorok terében az origó körüli tetszőleges szöggel való forgatás lineáris.
2. $V = W = \mathbb{R}^3$ térvektorok terében az origón átmenő tetszőleges tengely körüli, tetszőleges szöggel való forgatás lineáris.
3. $V = W = \mathbb{R}^3$ térvektorok terében az origón átmenő tetszőleges egyenes vagy síkra való tükrözés lineáris.
4. $V = W = \mathbb{R}^3$ térvektorok terében az origón átmenő tetszőleges egyenes vagy síkra való vetítés lineáris.

5. Legyen $V = \mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok tere, $W = \mathcal{P}_{n-1}$. T legyen a deriválás , azaz $T(p) = p'$ bármely $p \in V$ polinom esetén. T ekkor a deriválási szabályok alapján nyílván lineáris.

6. **A mintavételezés lineáris.** Képzeljünk el valamilyen „jelet”, vagyis egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ami megadja például, hogy egy adott t időben $f(t)$ a jel intenzitása (amplitudója, egyéb jellemzője, mindegy). Ez kontinuum sok információt jelent a jelre nézve, amit nem tudunk feldolgozni, ezért mintavételezéssel élünk, például méréseket végzünk a $t = 1, 2, 3, 4, 5$ időpontokban. A lehetséges függvények vektorteret alkotnak, jelölje ezt $\mathcal{F}$. Ekkor értelmeztünk egy mintavételezési leképezést (operátort):

$$S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^5, \quad S(f) = (f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)).$$

   Például $S(x^2) = (1, 4, 9, 16, 25)$, $S(\sqrt{x}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$. Gondoljuk meg, hogy S lineáris!

7. Minden $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ mátrix a $\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$ mátrixszorzás által minden $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ oszlopvektorhoz egy $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^m$ oszlopvektort rendel hozzá, mégpedig a mátrixszorzás szabályai értelmében lineárisan. Így minden ilyen mátrix felfogható egy $\mathbf{T} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezésként. Hamarosan látjuk, hogy minden lineáris leképezés megadható ilyen módon!

Könnyen belátható, hogy egy T leképezésének linearitását egy lépésben is ellenőrizhetjük. Valóban, T pontosan akkor lineáris, ha $T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2)$ fennáll minden c_1, c_2 skalár és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ vektor esetén.

Példa 2. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y, y + z)$$

leképezés lineáris-e? Nézzük meg, hogy mi lesz egy tetszőleges $c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2$ vektor képe, ahol $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned}
T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) &= T((c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2, c_1z_1 + c_2z_2)) \\
&= (c_1x_1 + c_2x_2 + 2(c_1y_1 + c_2y_2), c_1y_1 + c_2y_2 + c_1z_1 + c_2z_2) \\
&= c_1(x_1 + 2y_1, y_1 + z_1) + c_2(x_2 + 2y_2, y_2 + z_2) \\
&= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2),
\end{aligned}$$

a leképezés lineáris.

Példa 3. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, x, 2x - y)$$

leképezés lineáris-e? Nézzük meg, hogy mi lesz egy tetszőleges $c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2$ vektor képe, ahol $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ és $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned}
T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) &= T((c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2)) \\
&= (c_1x_1 + c_2x_2 + 2(c_1y_1 + c_2y_2), c_1x_1 + c_2x_2, 2(c_1x_1 + c_2x_2) - (c_1y_1 + c_2y_2)) \\
&= c_1(x_1 + 2y_1, x_1, 2x_1 - y_1) + c_2(x_2 + 2y_2, x_2, 2x_2 - y_2) \\
&= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2),
\end{aligned}$$

a leképezés lineáris.

Példa 4. Tekintsük a következő leképezést: $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_1$, $T(p) = 2p'' + 3p' + p$. Legyen $p, q \in \mathcal{P}_3$ két legfeljebb 3-adfokú polinom. Ekkor a deriválás szabályai alapján

$$\begin{aligned}
T(c_1p + c_2q) &= 2(c_1p + c_2q)'' + 3(c_1p + c_2q) + (c_1p + c_2q) \\
&= 2(c_1p'' + c_2q'') + 3(c_1p' + c_2q') + (c_1p + c_2q) \\
&= c_1(2p'' + 3p' + p) + c_2(2q'' + 3q' + q) \\
&= c_1T(p) + c_2T(q),
\end{aligned}$$

a leképezés lineáris.

Példa 5. Legyen most $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$, $T : p(x) \mapsto p'(x) + x$, minden $p \in \mathcal{P}_3$ polinomra. Ekkor például

$$T(cp)(x) = (cp(x))' + x = cp'(x) + x \neq cT(p)(x) = c(p'(x) + x),$$

vagyis a leképezés nem lineáris.

Láttuk, hogy egy lineáris leképezés a $\mathbf{0}$-t mindig $\mathbf{0}$-ba viszi. Fontos tudni, hogy más vektorokat is a $\mathbf{0}$-ba képez-e le, vagy sem.

Definíció. *Legyen $T : V \to W$ egy lineáris leképezés, azaz $T \in \mathcal{L}(V, W)$. T leképezés magterén (vagy nullterén) a*

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V : T\,\mathbf{v} = \mathbf{0}_W\}$$

alteret értjük. (Kernel=mag)

Megelőlegeztük, hogy $\mathrm{Ker}(V)$ altér V-ben, most be is látjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy a V vektortér műveletei nem vezetnek ki $\mathrm{Ker}(T)$-ből. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, c pedig egy tetszőleges konstans. Ekkor T homogenitása miatt $T(c\,\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, hiszen a feltevésünk miatt $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. A magtérből tehát a skalárral való szorzás nem vezet ki. Most nézzük a V-beli összeadást! Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, ekkor T additivitása miatt $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$, azaz $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, vagyis a magtér zárt az összeadásra nézve is.

Különösen fontos eset az, amikor a magtér triviális, vagyis csak a nullelemet tartalmazza.

Tétel. *A* $T : V \to W$ *lineáris leképezés pontosan akkor injektív (egy-egy értelmű, invertálható), ha* $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy T injektív. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Az világos, hogy $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(T)$, hiszen $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan nem nulla $\mathbf{v} \in V$, ami szintén a magtérben van, azaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. De ekkor, mivel $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{0}_V)$, ezért T egy-egyértelműsége miatt (különböző elemek képe különböző), $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$-nek fenn kell állnia, ami ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ és ellenőrizzük az injektivitást! Tegyük fel, indirekt módon, hogy létezik $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, melyekre bár $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, mégis $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$ áll fenn. Ekkor tehát $T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$, de T linearitása miatt $T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$, vagyis $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$, azaz a feltétel szerint $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}_V$, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, ami ellentmondás. □

Mivel a magtér altér, beszélhetünk a dimenziójáról.

Definíció. *A* $T : V \to W$ *lineáris leképezés magterének dimenzióját* T *nullitásának vagy* T *defektusának hívjuk és* $\mathrm{null}(T)$*-vel jelöljük. Tehát:*

$$\mathrm{null}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T).$$

A fenti tételt tehát úgyis kimondhatjuk, hogy T pontosan akkor injektív, ha a $\mathrm{null}(T) = 0$. Mivel T injektivitása azt jelenti, hogy létezik a T leképezésnek T^{-1} inverze, ez azt is jelenti, hogy ha tudjuk, hogy a T leképezés a $\mathbf{v}$ vektort a $\mathbf{w}$ vektorba viszi, azaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, akkor $\mathbf{w}$-ből rekonstruálni tudjuk az eredeti vektort: $\mathbf{v} = T^{-1}(\mathbf{w})$. Egy leképezés nullitása ilyen értelemben annak az információnak a mértéke, amely elveszik, ha a T transzformációt alkalmazom. Egy injektív leképezésnél tehát nem veszik el információ.

Most azt vizsgáljuk, hogy egy $T : V \to W$ lineáris leképezésnél minden W-beli vektor előáll-e, mint valamilyen V-beli vektor T általi képe.

Definíció. *A* $T : V \to W$ *lineáris leképezés képterének az*

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

alteret értjük. (Image=kép)

Ismét megelőlegeztük, hogy $\mathrm{Im}(T)$ altér W-ben. Fontos megjegyeznünk, hogy míg egy lineáris leképezést a kiindulási V tér minden pontjában értelmeztünk (ezen kurzus keretein belül nem beszélünk az úgynevezett nem korlátos operátorokról), általában nem igaz, hogy $\mathrm{Im}(T) = W$. Ellenőrizzük, hogy $\mathrm{Im}(T)$ valóban altér W-ben, azaz zárt a W-beli műveletekre nézve. Ha $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$, akkor létezik $\mathbf{v} \in V$, melyre $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ekkor bármely c konstansra, $T(c\,\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) = c\,\mathbf{w}$, vagyis $c\,\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Ha $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, akkor létezik $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ V-ben, melyekre $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ és $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, de ekkor $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, azaz $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, azaz $\mathrm{Im}(T)$ csakugyan altér.

Mivel a képtér altér, ezért értelmezhetjük annak dimenzióját.

Definíció. *A $T : V \to W$ lineáris leképezés képterének dimenzióját T rangjának nevezzük, azaz*

$$r(T) = \dim \mathrm{Im}(T).$$

A mátrix rangjáról már sokat beszéltünk az eddigiekben, vegyük észre, hogy egy mátrix rangja, mint lineáris leképezésé, ugyanaz, mint a rangja mátrixként. Valóban, a példák között említettük, hogy minden $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ mátrix a $\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$ mátrixszorzás által minden $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ oszlopvektorhoz egy $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^m$ oszlopvektort rendel hozzá lineárisan, azaz minden ilyen mátrix felfogható egy $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezésként.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixra úgy tekintenünk, mint oszlopvektorainak a rendszerére, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & | & a_{12} & | & \dots & | & a_{1n} \\ a_{21} & | & a_{22} & | & \dots & | & a_{2n} \\ \dots & | & \dots & | & \dots & | & \dots \\ a_{m1} & | & a_{m2} & | & \dots & | & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & | & \mathbf{a}_2 & | & \dots & | & \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_k \in \mathbb{K}^m$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix k-dik m dimenziós oszlopvektorát ($k = 1, \dots, n$), akkor az $\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$ egyenlet

$$v_1\,\mathbf{a}_1 + v_2\,\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{w}$$

alakba írható, ahol

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy csak azok a vektorok állhatnak elő képvektorként, amelyek előállnak, mint $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációja, azaz

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}).$$

Ennek a térnek a dimenziója pedig definíció szerint a mátrix rangjával egyezik meg.

A $T : V \to W$ lineáris leképezés szürjektív, ha minden W-beli vektor előáll, mint valamilyen V-beli vektor T általi képe, azaz $W = \mathrm{Im}(T)$. Ez természetesen azt is jelenti, hogy $r(T) = \dim W$, ezt néha úgy mondják, hogy T teljes rangú. A leképezés $r(T)$ rangja bizonyos értelemben azt méri, hogy mennyi információnk maradt meg a V térről, miközben a vektorait T áttranszformálja a W térbe. Miután a nullitás az információvesztést jellemezte, nem meglepő az alábbi tétel.

Tétel. ***(Dimenziótétel)***
Legyen V egy véges dimenziós, W egy tetszőleges vektortér. Ha $T : V \to W$ egy lineáris leképezés, akkor

$$\mathrm{null}(T) + r(T) = \dim V.$$

Bizonyítás. Mivel V véges dimenziós, tegyük fel, hogy $\dim V = n$. Mivel $\mathrm{Ker}(T)$ altér V-ben, ezért ő is véges dimenziós. Tegyük fel, hogy a dimenziója k, azaz $\mathrm{null}(A) = k$ (nyilván $0 \leq k \leq n$). Ezekkel tehát azt kell belátnunk, hogy $k + r(T) = n$, vagyis a képtér dimenziója $r(T) = n - k$. Vegyünk fel egy bázist $\ker(T)$-ben : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Ezt a bázist $n - k$ vektor hozzávételével ki tudjuk egészíteni V-beli bázissá. A hozzávett elemek legyenek: $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Mivel ezek mind V-ben vannak, világos, hogy $T(\mathbf{v}_{k+1}), T(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in \mathrm{Im}(T)$. Vagyis, ha meg tudjuk mutatni, hogy a $\{T(\mathbf{v}_{k+1}), T(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ vektorrendszer bázis $\mathrm{Im}(T)$-ben, akkor készen vagyunk, hiszen ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(T)$ $n - k$ dimenziós, azaz $r(T) = n - k$. Először mutassuk meg, hogy ezen vektorok generátorrendszert alkotnak $\mathrm{Im}(T)$-ben, azaz

$$\mathrm{Span}(\{T(\mathbf{v}_{k+1}), T(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}) = \mathrm{Im}(T).$$

Legyen $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$ egy tetszőleges vektor. Ekkor létezik $\mathbf{v} \in V$, melyre $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ezt a $\mathbf{v}$-t megadhatjuk V fent definiált bázisában:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n,$$

ahol az $a_1, \ldots, a_n$ számok $\mathbf{v}$ vektor koordinátái az adott bázisban. Alkalmazzuk $\mathbf{v}$-re a T lineáris leképezést:

$$T(\mathbf{v}) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + a_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_n T(\mathbf{v}_n).$$

Mivel $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathrm{Ker}(T)$, ezért $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \cdots = T(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_W$, ezért

$$T(\mathbf{v}) = a_{k+1} T(\mathbf{v}_{k+1}) + a_{k+2} T(\mathbf{v}_{k+2}) + \cdots + a_n T(\mathbf{v}_n).$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ előáll, mint a $\{T(\mathbf{v}_{k+1}), T(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ vektorok lineáris kombinációja. Most mutassuk meg, hogy $\{T(\mathbf{v}_{k+1}), T(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ nemcsak generátorrendszer, hanem lineárisan függetlenek is. Indirek módon, tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz

$$a_{k+1} T(\mathbf{v}_{k+1}) + a_{k+2} T(\mathbf{v}_{k+2}) + \cdots + a_n T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W$$

fennállhat úgyis, hogy nem mindegyik $a_{k+1}, \ldots, a_n$ együttható 0. De ekkor T linearitása miatt az is igaz, hogy

$$T(a_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2} \mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W,$$

azaz $a_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2} \mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n \mathbf{v}_n \in \mathrm{Ker}(T)$. Akkor ezt a vektort megadhatjuk $\mathrm{Ker}(T)$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ bázisában:

$$a_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2} \mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n \mathbf{v}_n = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_n \mathbf{v}_k,$$

valamilyen $a_1, \dots, a_k$ együtthatókkal. Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$-a_1\,\mathbf{v}_1 - a_2\,\mathbf{v}_2 - \cdots - a_n\,\mathbf{v}_k + a_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\,\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\,\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V\,.$$

Azonban a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektorok bázist alkotnak V-ben, azaz lineárisan függetlenek, vagyis ez csak úgy lehetséges, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ami ellentmondás. $\square$

Pihenésképpen, nézzünk néhány példát!

Példa 6. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy T lineáris. Először határozzuk meg a magteret:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, 2x + 2y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\},$$

vagyis a magteret az $\mathbb{R}^2$ sík $x + y = 0$ egyenletű egyenese alkotja. Ez 1 dimenziós, így $\mathrm{null}(T) = 1$ a nullitás. Ez egyből mutatja, hogy a leképezés nem injektív, azaz nem invertálható. Most határozzuk meg a képteret!

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \{(x + y, 2x + 2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(x + y, 2x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x + y) \cdot (1, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{t \cdot (1, 2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2t) : t \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

ahol éltünk az $x + y = t$ helyettesítéssel. Azt kaptuk tehát, hogy a leképezés a sík vektorait az $x = t, y = 2t$ paraméteres egyenletrendszerű egyenesbe képezi le. Ennek az altérnek a dimenziója szintén 1, azaz $r(T) = 1$, a leképezés nem szürjektív. Látjuk, hogy a Dimenzótétel természetesen fennáll.

Példa 7. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2x, 3x + y, x + y)$. Ellenőrizhető, hogy T lineáris. A magtér ezúttal

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x, 3x + y, x + y) = (0, 0, 0)\},$$

tehát a

$$\begin{aligned}
2x &= 0 \\
3x + y &= 0 \\
x + y &= 0
\end{aligned}$$

homogén egyenletrendszert kell megoldanunk. Könnyen látható, hogy csak triviális megoldás létezik, azaz $x = 0, y = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{null}(T) = 0$, a T leképezés injektív. Határozzuk meg a képteret!

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \{(2x, 3x + y, x + y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x \cdot (2, 3, 1) + y \cdot (0, 1, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Span}(\{(2, 3, 1), (0, 1, 1)\}),
\end{aligned}$$

azaz a képtér 2 dimenziós, $r(T) = 2$, ahogy az várható volt a Dimenziótétel alapján. A leképezés természetesen nem szürjektív.

Egy leképezést általában bijektívnek (kölcsönösen egyértelműnek) hívunk, ha injektív és szürjektív. Ha a $T : V \to W$ lineáris leképezés bijektív, akkor vektortérizomorfizmusnak (röviden izomorfizmusnak) hívjuk. Tehát a $T : V \to W$ lineáris leképezés pontosan akkor izomorfizmus, ha $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ és $\mathrm{Im}(T) = W$. Azt mondjuk, hogy V és W izomorfak, ha létezik köztük izomorfizmus. Ezt $V \simeq W$ -vel fogjuk jelölni. Belátható, hogy $\simeq$ ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Megjegyezzük, hogy egymással izomorf vektorterek algebrailag egyenértékűnek tekinthetők, teljesen ugyanolyanok, csak az elemek és a műveletek másképpen vannak jelölve. Ebből következően például a dimenziójuk azonos. Az eddigiek alapján a következő tétel nagyon egyszerűen következik. Ellenőrizendő a tudásunk, mindenki gondolja meg, hogy miért!

Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *és legyen* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *lineáris leképezés az* $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ *mátrixszorzással értelmezve. Ekkor* A *pontosan akkor izomorfizmus, ha* $\mathbf{A}$ *invertálható.*

A Dimenzótétel egy szép következménye az alábbi

Tétel. *Legyenek* V *és* W *véges dimenziós vektorterek és tegyük fel, hogy azonos dimenziósak, azaz* $\dim V = \dim W$. *A* $T : V \to W$ *lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Ha T injektív, akkor $\mathrm{null}(T) = 0$ és a Dimenziótétel értelmében $r(T) = \dim V$. Mivel $\dim V = \dim W$, ezért $r(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$ és mivel $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$, ez csak úgy lehetséges, ha $\mathrm{Im}(T) = W$, azaz T szürjektív. A megfordítás ugyanígy megy, csak a fordított irányba kell haladni. $\square$

Vizsgáljuk meg a következő problémát! Legyen $T : V \to W$ egy lineáris leképezés V és W vektorterek között. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektoroknak egy kollekciója a V térben. Ekkor a $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ vektoroknak egy kollekciója W-ben. Vajon a V térbeli kollekció tulajdonságai mennyire öröklődnek át a W-beli vektorokra? Például, igaz-e, és ha igen, mikor, hogy ha $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bázis V-ben, akkor $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ is bázis W-ben? Lépésenként erre adnak választ a következő tételek. Gyakorlásképpen próbáljuk meg bebizonyítani őket!

Tétel. *Ha* $T : V \to W$ *lineáris és* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *kifeszíti* V *teret, akkor*

$$\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$$

kifeszíti $\mathrm{Im}(T)$*-t.*

Tétel. *Ha $T : V \to W$ lineáris és injektív, valamint a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független V-ben, akkor $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ vektorrendszer lineárisan független W-ben.*

A fentieknek már egyszerű következménye a már megfogalmazott állítás, miszerint

Tétel. *Ha $T : V \to W$ izomorfizmus (azaz lineáris bijekció) és $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bázis V-ben, akkor $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ bázis W-ben, (amiből rögtön következik, hogy $\dim V = \dim W$).*

Amennyiben egy lineáris leképezés injektív, akkor tudjuk értelmezni az inverz leképezést.

Definíció. *Legyenek V és W vektorterek, $T : V \to W$ egy injektív lineáris leképezés. Ekkor a $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to V$ leképezést a következőképpen definiáljuk:*

$$T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{w},$$

és T inverzének hívjuk. Ha T szürjektív is, akkor T^{-1} az egész W téren definiálva van.

Megmutatjuk, hogy ha T^{-1} létezik, akkor ő is egy lineáris leképezés. Vegyünk két tetszőleges vektort T képteréből: $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ és legyen c_1, c_2 két skalár. Ekkor a definíció értelmében létezik $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, melyekre $T^{-1}(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}_1$ és $T^{-1}(\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_2$. Mivel T lineáris, ezért

$$T(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 .$$

Ezért

$$T^{-1}(c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = c_1 T^{-1}(\mathbf{w}_1) + c_2 T^{-1}(\mathbf{w}_2),$$

vagyis T^{-1} csakugyan lineáris.

Az eddigiek alapján a következő tétel triviális.

Tétel. *Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ egy invertálható mátrix és legyen $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris leképezés az $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ mátrixszorzással értelmezve. Ekkor $A^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}$.*

A következőkben megvizsgáljuk a lineáris leképezések és a mátrixok közötti intim viszonyt. Nevezetesen, hogy minden lineáris leképezés reprezentálható mátrixokkal.

2. Lineáris leképezések mátrixreprezentációja

Általában, ha egy $f : X \to Y$ függvényt vizsgálni akarunk, akkor az $f(x)$ értékeket minden x-re ismernünk kell. Látni fogjuk, hogy egy lineáris leképezésnél sokkal könnyebb dolgunk van, elég az értékeket csak véges helyen (nevezetesen a bázsvektorokban) ismernünk. Először nézzük a következő tételt.

Tétel. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bázissal. Legyen W egy másik vektortér és vegyünk itt tetszőleges n darab vektort, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$-t. Ekkor létezik pontosan egy $T : V \to W$ lineáris transzformáció, melyre $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.*

Bizonyítás. Két dolgot kell megmutatnunk, egyrészt, hogy létezik ilyen leképezés (egzisztencia), másrészt, hogy pontosan egy ilyen létezik (unicitás). Kezdjük ezúttal az utóbbival. Indirekt okoskodunk: Tegyük fel, hogy létezik két ilyen lineáris leképezés, azaz $T : V \to W$ és $U : V \to W$ lineárisak, melyekre teljesül, hogy $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ és $U(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. Legyen $\mathbf{v} \in V$ tetszőleges. Fejtsük ki $\mathbf{v}$-t a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bázis szerint:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n,$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalárok a $\mathbf{v}$ vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bázis szerinti koordinátái. Mivel T lineáris, ezért

$$T(\mathbf{v}) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + a_2 T(\mathbf{v}_2) + \dots + a_n T(\mathbf{v}_n),$$

és mivel $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, ezért

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_n \mathbf{w}_n .$$

Hasonló érveléssel U-ra,

$$U(\mathbf{v}) = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_n \mathbf{w}_n .$$

Mivel $\mathbf{v}$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy $T(\mathbf{v}) = U(\mathbf{v})$ minden $\mathbf{v} \in V$ vektorra, vagyis $U = T$, ami ellentmondás.

Most térjünk rá annak a bizonyítására, hogy létezik ilyen lineáris leképezés. Vegyünk ismét egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektort V-ben és fejtsük ki az adott bázis szerint az előzőhöz hasonlóan:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n .$$

Ezen a $\mathbf{v}$ vektoron T hatását definiáljuk a következőképpen:

$$T(\mathbf{v}) := a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_n \mathbf{w}_n .$$

Emlékezzünk rá, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatók egyértelműek! Mivel a bázisvektorokra

$$\mathbf{v}_j = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{v}_j + 0 \cdot \mathbf{v}_{j+1} \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n$$

teljesül minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re, ezért

$$T(\mathbf{v}_j) = 0 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{w}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{w}_j + 0 \cdot \mathbf{w}_{j+1} \cdots + 0 \cdot \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_j,$$

ahogy vártuk. T definíciójából már könnyen ellenőrizhető, hogy T lineáris. Ezt mutassuk meg otthoni gyakorlásként! □

Példa 8. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^2$-ben (ezúttal sorvektorokként gondolva a vektorokra) $\{(1,0),(0,1)\}$ bázis alkot. Legyen W egy tetszőleges vektortér és vegyünk benne két tetszőleges vektort, $\mathbf{w}_1$-t és $\mathbf{w}_2$-t. Ekkor a tétel értelmében pontosan egy $T : \mathbb{R}^2 \to W$ lineáris leképezés létezik, melyre $T(1,0) = \mathbf{w}_1$ és $T(0,1) = \mathbf{w}_2$. A bizonyítás meg is adta, hogy ez a leképezés hogyan hat egy tetszőleges (x, y) vektoron:

$$T(x, y) = x\,\mathbf{w}_1 + y\,\mathbf{w}_2\,.$$

Példa 9. Az előző példa alkalmazásával könnyen megadhatjuk a síkbeli, origó körüli θ szögű forgatást, mint lineáris leképezést. Jelölje ezt R_θ, ahol az R a rotációra utal. Ekkor tehát $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Elemi geometriával ellenőrizhető, hogy az origó körüli θ szögű forgatás az $(1,0)$ vektort a $(\cos\theta, \sin\theta)$, a $(0,1)$ vektort a $(-\sin\theta, \cos\theta)$ vektorba viszi, azaz

$$R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{és} \quad R_\theta(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

Az előző példa alapján tehát, ha egy tetszőleges (x, y) vektort forgatunk el θ szöggel az origó körül, akkor

$$R_\theta(x, y) = x \cdot (\cos\theta, \sin\theta) + y \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti n-dimenziós vektortér $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bázissal, azaz egy lineárisan független generátorrendszerrel. Ezentúl ha bázist említünk, **rendezett bázisra** fogunk gondolni, azaz nem csupán vektorok egy halmazára, hanem az $\alpha := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ rendezett vektor n-esre. Mostantól tehát mindig rendezett bázisokkal dolgozunk, még ha ezt nem is hangsúlyozzuk. Ebben az α bázisban bármely $\mathbf{v} \in V$ vektort egyértelmű módon ki tudunk fejteni, a már megszokott módon:

$$\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\,\mathbf{v}_n,$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\mathbb{K}$-beli skalárokat a $\mathbf{v}$ vektor α bázisbeli **koordinátáinak** hívjuk. Ezeket a koordinátákat érdemes egy $\mathbb{K}^n$-beli oszlopvektorba rendezni:

$$[\mathbf{v}]^\alpha := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

ahol a $[\mathbf{v}]^\alpha$ jelölés azt akarja hangsúlyozni, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáit itt az α bázisban adtuk meg. Könnyű meggondolni, hogy ezzel a

$$V \to \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]^\alpha$$

megfeleltetéssel egy izomorfizmust adtunk meg a V tér és $\mathbb{K}^n$ között. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges n-dimenziós $\mathbb{K}$ feletti vektorteret $\mathbb{K}^n$-nel tudunk azonosítani egy V-beli bázis rögzítésével, azaz minden V-beli vektornak meg tudunk feleltetni egy $\mathbb{K}^n$-beli oszlopvektort. A könnyebb megértés céljából nézzünk néhány példát!

Példa 10. Ebben a példában legyen $V = \mathbb{R}^3$ és tekintsük a $\mathbf{v} = (3, 4, 5) \in V$ vektort. Mikor megadtuk ezt a vektort, akkor titkon itt már egy bázisban dolgoztunk: a **standard**, vagy **kanonikus bázisban**, ami $\alpha := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Ezt a bázsist rögzítve a fentiek alapján a következőt írhatjuk:

$$[\mathbf{v}]^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

mivel $(3, 4, 5) = 3 \cdot (1, 0, 0) + 4 \cdot (0, 1, 0) + 5 \cdot (0, 0, 1)$. Mikor default-ból standard bázisban dolgozunk, akkor a jelölésekből szokás elhagyni a bázisra utaló α indexet és $[\mathbf{v}]^\alpha$ helyett gyakran csak $\mathbf{v}$-t írunk (ezt tettük eddig mi is).

Persze más bázisban is dolgozhatunk. Tekintsük most a $\beta := ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ bázist, amit a standard bázisból a bázisvektorok átrendezésével kaptunk: felcseréltük az első két bázisvektort. Ebben a bázisban

$$[\mathbf{v}]^\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

mivel $(3, 4, 5) = 4 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (1, 0, 0) + 5 \cdot (0, 0, 1)$.

Most vegyünk egy harmadik bázist V-ben, legyen ez $\gamma := ((3, 4, 5), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Mindenki ellenőrizze, hogy ez valóban bázis (itt elég csak a lineáris függetlenséget ellenőrizni, hiszen tudjuk, hogy V 3 dimenziós). Ebben a bázisban

$$[\mathbf{v}]^\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mivel $(3, 4, 5) = 1 \cdot (3, 4, 5) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$. Természetesen tetszőleges bázisban dolgozhatunk, a koordinátákat Gauss-eliminációval kaphatjuk meg a felírt lineáris egyenletrendszerből.

Figyeljük meg, hogy ugyanazt a $\mathbf{v}$ vektort három különböző módon reprezentáltuk oszlopvektorokkal: **a reprezentáció bázisfüggő !**

Példa 11. Legyen $V = \mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú valós polinomok tere és tekintsük a $p = 3x^2 + 4x + 6$ polinomot. A standard bázis ebben az esetben $\alpha := (1, x, x^2)$. Ebben a bázisban

$$[p]^\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

hiszen $p = 6 \cdot 1 + 4 \cdot x + 3 \cdot x^2$.

Most írjuk fel p-t a $\beta := (x^2 + x, x - 1, x^2 + 2)$ bázisban. Először ellenőrizzük, hogy csakugyan bázisról van szó, azaz az egyes vektorok lineárisan függetlenek! Ehhez vegyük a bázisvektorok egy tetszőleges lineárkombinációját és oldjuk meg az

$$a_1(x^2 + x) + a_2(x - 1) + a_3(x^2 + 2) = 0$$

egyenletet. Az egyes tagok átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$(a_1 + a_3)x^2 + (a_1 + a_2)x + (-a_2 + 2a_3) \cdot 1 = 0.$$

Mivel tudjuk, hogy az $1, x, x^2$ vektorok lineárisan függetlenek, ez csak úgy lehetséges, hogy ha az együtthatóik mind nullák, azaz az

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ -a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Hozzuk az együttható mátrixot redukált lépcsős alakra a Gauss-elimináció segítségével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a következő lépéseket tettük meg :$(S_2 - S_1)$,$(S_3 + S_2)$ és végül $(S_2 + S_3, S_1 - S_3)$. Innen leolvashatjuk, hogy az egyetlen megoldásunk a triviális $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ megoldás, azaz az $x^2 + x, x - 1, x^2 + 2$ vektorok lineárisan függetlenek és mivel tudjuk, hogy $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, ezért β valóban bázis. Most fejtsük ki a p polinomot ebben a β bázisban! A megoldandó egyenlet ekkor

$$a_1(x^2 + x) + a_2(x - 1) + a_3(x^2 + 2) = 3x^2 + 4x + 6$$

alakú. Az egyes tagok átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$(a_1 + a_3)x^2 + (a_1 + a_2)x + (-a_2 + 2a_3) \cdot 1 = 3x^2 + 4x + 6,$$

vagyis a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 3 \\ a_1 + a_2 &= 4 \\ -a_2 + 2a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát, és hozzuk redukált lépcsős alakra a Gauss-elimináció segítségével:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

ahol ugyanazokat az $(S_2 - S_1)$,$(S_3 + S_2)$, $(S_2 + S_3, S_1 - S_3)$ lépéseket kellett megtennünk, mint a lineáris függetlenség ellenőrzésekor. Innen leolvashatók p koordinátái a β bázisban: $a_1 = -1, a_2 = 5, a_3 = 4$, vagyis azt kapjuk, hogy

$$[p]^\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

A következőkben megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet egy véges dimenziós vektorterek között ható lineáris leképezést egy adott mátrixszal való szorzásként reprezentálni. (Emlékezzünk vissza, hogy korábban megmutattuk, hogy a mátrixszal való szorzás lineáris leképezésként is felfogható.)

Legyen V egy n-dimenziós, W pedig egy m-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Legyen $T : V \to W$ egy tetszőleges lineáris leképezés. Rögzítsünk V-ben egy α bázist: $\alpha := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n)$, W-ben, pedig egy β bázist: $\beta := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$. Tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektor kifejthető az α bázisban:

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n,$$

vagyis az eddigiek alapján

$$[\mathbf{v}]^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mivel $T(\mathbf{v}) \in W$, ezért a $T(\mathbf{v})$ vektort kifejthetjük a β bázisban:

$$T(\mathbf{v}) = y_1\,\mathbf{w}_1 + y_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + y_m\,\mathbf{w}_m, \tag{1}$$

vagyis

$$[T(\mathbf{v})]^\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat van $[\mathbf{v}]^\alpha$ és $[T(\mathbf{v})]^\beta$ között! Mivel T lineáris, ezért

$$T(\mathbf{v}) = T(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n) = x_1 T(\mathbf{v}_1) + x_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{v}_n), \qquad (2)$$

ami azt mutatja, hogy T hatását bármely $\mathbf{v}$ vektoron ki tudjuk számolni, ha ismerjük a bázisvektorokon kifejtett hatását. Mivel $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in W$, ezért ezeket a vektorokat is ki tudjuk fejteni β bázisban:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\,\mathbf{w}_1 + a_{21}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{w}_m \\ T(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\,\mathbf{w}_1 + a_{22}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\,\mathbf{w}_1 + a_{2n}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{w}_m\,. \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogyan indexeltük ebben az esetben az együtthatókat: az a_{ij} együttható itt megadja a $T(\mathbf{v}_j)$ vektor i-edik koordinátáját a β bázisban, vagyis

$$[T(\mathbf{v}_j)]^\beta = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Írjuk be a bázisvektorok képére kapott összefüggéseket a (2) egyenletbe!

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= x_1 T(\mathbf{v}_1) + x_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= x_1(a_{11}\,\mathbf{w}_1 + a_{21}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{w}_m) \\ &\quad + x_2(a_{12}\,\mathbf{w}_1 + a_{22}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{w}_m) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}\,\mathbf{w}_1 + a_{2n}\,\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{w}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\,\mathbf{w}_1 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\,\mathbf{w}_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\,\mathbf{w}_m\,. \end{aligned}$$

Összehasonlítva ezt az (1) egyenlettel:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Örvendezve vehetjük észre, hogy ez az egyenletrendszer a következő mátrixos formában foglalható össze:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Az itt feltűnő mátrix a T lineáris leképezés (α, β) bázispárra vonatkozó mátrixa. Vegyük észre, hogy a mátrix oszlopai éppen T bázisvektorokon felvett értékei (lásd (3)), azaz

$$[T]_\alpha^\beta := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\ [T(\mathbf{v}_1)]^\beta \ \mid \ [T(\mathbf{v}_2)]^\beta \ \mid \ \cdots \ \mid \ [T(\mathbf{v}_n)]^\beta \ \right). \tag{4}$$

A fenti jelöléssel igazoltuk a következő nagyon fontos összefüggést:

$$[T(\mathbf{v})]^\beta = [T]_\alpha^\beta [\mathbf{v}]^\alpha.$$

Megjegyezzük, hogy az indexelésben az úgynevezett **Einstein-konvenciót** követtük, ami jelentős könnyebbséget jelent különböző elméleti fizikai számításokban, azonban ennek pontos kifejtésére itt most nincs mód. Foglaljuk össze, hogy mit bizonyítottunk be:

Tétel. *Legyen V egy n-dimenziós, W pedig egy m-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett, rendre $\alpha := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_n)$, illetve $\beta := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ bázissal. Legyen $T : V \to W$ egy lineáris leképezés. Ekkor a fenti jelölésekkel fennáll a*

$$[T(\mathbf{v})]^\beta = [T]_\alpha^\beta [\mathbf{v}]^\alpha$$

összefüggés, ahol $[T]_\alpha^\beta$ a T leképezés (4) összefüggéssel megadott mátrixa az (α, β) bázispárra vonatkozólag.

Nézzünk néhány egyszerű példát!

Példa 12. Legyen

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy T lineáris transzformáció. Vegyük fel $\mathbb{R}^2$-ben az

$$\alpha = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

bázist, míg $\mathbb{R}^3$-ben a

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

bázist.

Adjuk meg T mátrixát az (α, β) bázispárra vonatkozólag. Ehhez ki kell számítanunk T hatását az egyes bázisvektorokon:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Most ezeket a képvektorokat ki kell számolnunk a β bázisban, azaz meg kell oldanunk a két alábbi egyenletrendszert:

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető (gyakorlásképpen inkább számoljuk ki), hogy $a_1 = -1, a_2 = 4, a_3 = -1$, illetve $b_1 = -3, b_2 = 2, b_3 = 2$. Vagyis most azt számoltuk ki, hogy az eddigi jelöléseinkkel:

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right]^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \left[T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]^{\beta} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A T leképezés mátrixa tehát az (α, β) bázispárra vonatkozólag:

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A számolások lényegesen egyszerűbbek, ha mindkét vektortérben a standard bázisban dolgozunk.

Példa 13. **Origó körüli síkbeli forgatás.**
Legyen $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az origó körüli θ szögű forgatás. Az indulási és az érkezési térben is ugyanazzal a standard bázissal dolgozzunk, azaz vegyük fel az

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

bázist. Miután most egyetlen rögzített bázisunk van, ezért az indexeléstől eltekinthetünk. Ezt általában is szokás megtenni, ha mindkét térben a standard bázist tekintjük. Elemi geometriai számítás mutatja, hogy mik lesznek az egyes bázisvektorok képei a θ szögű forgatás után:

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad R_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ezeket a képvektorokat oszlopvektorként egy mátrixba téve, megkapjuk a síkbeli forgatás mátrixát:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ha például arra vagyunk kiváncsiak, hogy melyik vektort kapjuk, ha a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektort $\theta = 30°$-kal elforgatjuk az origó körül, akkor csak a következő mátrixszorzást kell elvégeznünk:

$$R_{30°}\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 + 1 \\ 1/2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Példa 14. **Koordinátatengelyek körüli forgatás.**
Vegyünk fel az $\mathbb{R}^3$ térben egy Descartes-koordinátarendszert, vagyis tekintsük a szokásos $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ standard bázist. Legyen $R_\theta^z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a z tengely körüli θ szögű forgatás. Az indulási és az érkezési térben is ugyanazzal a standard bázissal dolgozzunk, azaz vegyük fel az

$$\left(\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

bázist. Miután most is egyetlen rögzített bázisunk van, ezért az indexeléstől eltekinthetünk. Miután a z tengely körül forgatunk, ezért a megforgatott vektor z koordinátája nem változik, az x és az y koordináták pedig úgy változnak, mintha az xy síkban forgatnánk.

Ezt felhasználva könnyű megmondanunk, hogy mik lesznek az egyes bázisvektorok képei a z tengely körüli θ szögű forgatás után:

$$R_\theta^z\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix},\quad R_\theta^z\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad R_\theta^z\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Ezeket a képvektorokat oszlopvektorként egy mátrixba téve, megkapjuk a z tengely körüli θ szögű forgatás mátrixát:

$$R_\theta^z=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Hasonló okoskodással kaphatjuk meg az x, illetve az y tengely körüli forgatás mátrixát:

$$R_\theta^x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \text{illetve}\quad R_\theta^y=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Az y tengely körüli forgatás esetén azért változik meg az előjel, mert a forgatásokat a tengelyirány felöl nézve tekintjük pozitívnak, és ekkor a **k** bázisvektor **i**-be kerül.

Ezúton is felhívnám a figyelmet Wettl Tanár Úr könyvében kidolgozott geometriai alkalmazásokra: (Wettl Ferenc, Lineáris algebra, 301-312. o, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/14.pdf).

Példa 15. Tekintsük a következő lineáris leképezést (ellenőrizzük, hogy tényleg az!):

$$T:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_3,\quad T(p(x))=x^2p''(x)-2p'(x)+xp(x).$$

Tekintsük mind a kiindulási, mind az érkezési térben a standard bázist, azaz $\mathcal{P}_2$-ben az $(1,x,x^2)$-t, míg $\mathcal{P}_3$-ban az $(1,x,x^2,x^3)$-t. A T leképezés standard bázispárra vonatkozó mátrixának megadásához ki kell számolnunk T bázisvektorokon felvett értékét:

$$T(1)=x,\quad T(x)=x^2-2,\quad T(x^2)=x^3+2x^2-4x.$$

Ezeket $\mathcal{P}_3$ bázisában kifejtve tehát azt kapjuk, hogy

$$[T(1)]=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad [T(x)]=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad [T(x^2)]=\begin{pmatrix}0\\-4\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Ezeket oszlopvektorként egy mátrixba helyezve megkapjuk T standard bázispárra vonatkozó mátrixát:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alkalmazásként legyen $p(x) = x^2 - 3x + 1$ és nézzük meg, hogy milyen polinomba képezi le ezt T. Írjuk fel a p polinomot $\mathcal{P}_2$ standard bázisában:

$$[p] = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hattassuk erre T mátrixát:

$$[T(p)] = [T][p] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ami a képvektor $\mathcal{P}_3$ standard bázisában. Innen egyből leolvasható, hogy

$$T(p(x)) = 6 \cdot 1 - 3 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 = x^3 - x^2 - 3x + 6,$$

ami könnyen ellenőrizhető közvetlenül is.

A következőkben még bőségesen előkerülnek példák és alkalmazások.

Ajánlott irodalom

- Freud Róbert, Lineáris Algebra, ELTE Eötvös Kiadó
- Horváth Erzsébet, Lineáris Algebra, Műegyetemi Kiadó
- Wettl Ferenc, Lineáris algebra
  http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/14.pdf
- https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/11997/2011-0098_linearis_algebra.pdf?sequence=2&isAllowed=y
- https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/137/Linearis_algebra_es_tobbvaltozos_fuggvenyek.pdf?sequence=1&isAllowed=y