Kibővített előadásjegyzet a VIK A2 Matematika tárgyhoz

Pitrik József

6. oktatási hét

Ez a oktatási segédlet az A2 előadásaim kommentekkel ellátott, szerkesztett változata, ami azzal a céllal íródott, hogy a távoktatás keretein belül elősegítse a Koronavírus járvány miatt sajnálatosan elmaradt előadások pótlását. Mivel sietve készült, ezért számos hibát, elírást tartalmazhat és a nyelvi megfogalmazások is inkább közelebb állnak a beszélt nyelvhez, mint a szokásos jegyzeteké. Kiegészítésképpen a jegyzetek végén ajánlott irodalom található, mely a további elmélyedést segítheti. Bármilyen észrevételt szívesen fogadok a pitrik@math.bme.hu címre. A subjectbe legyenek szívesek beírni, hogy „A2 jegyzet”. Mindenkinek jó egészséget, türelmet, kitartást és sikeres felkészülést kívánok! A mihamarabbi viszontlátás reményében, üdvözlettel: PJ.

1. Emlékeztető

Röviden összefoglaljuk, hogy az utolsó előadáson hol hagytuk abba. Legyen $\mathbb{K}$ egy számtest, (nálunk leginkább $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) és legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, azaz $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, melynek elemei $\mathbb{K}$ számtestből valók. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak van n darab oszlopvektora, melyek mind $\mathbb{K}^m$-beliek, illetve van m darab $\mathbb{K}^n$-beli sorvektora. Ezek után éltünk a következő definícióval.

Definíció.

- *Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ mátrix oszloprangja $r_o(\mathbf{A})$, ha $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között $r_o(\mathbf{A})$ lineárisan független található, de több nem.*
- *Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ mátrix sorrangja $r_s(\mathbf{A})$, ha $\mathbf{A}$ sorvektorai között $r_s(\mathbf{A})$ lineárisan független található, de több nem.*

A fentiekből rögtön következik, hogy $r_o(\mathbf{A}) \leq n$ és $r_s(\mathbf{A}) \leq m$, hiszen nem választhatunk ki egy vektorrendszerből több függetlent, mint ahányan vannak. Emlékezzünk arra is, hogy egy mátrix aldeterminánsán egy tetszőleges négyzetes részmátrixának determinánsát értjük. Ennek segítségével bevezettünk egy újabb rangfogalmat.

Definíció. *Az* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *mátrix determinánsrangja* $r_D(\mathbf{A})$, *ha létezik olyan* $r_D(\mathbf{A}) \times r_D(\mathbf{A})$ *méretű aldeterminánsa, ami nem* 0, *de bármely ennél nagyobb rendű aldeterminánsa* 0.

Kimondtuk, hogy a fenti fogalmak minden mátrix esetében egybeesnek, azaz igaz a következő

Tétel. *Bármely* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *mátrix esetén*

$$r_o(\mathbf{A}) = r_s(\mathbf{A}) = r_D(\mathbf{A}).$$

Ezt a közös számot a mátrix rangjának nevezzük és $r(\mathbf{A})$*-val jelöljük.*

A fenti megfontolásokból következően rögtön adódik, hogy egy mátrix rangja legfeljebb akkora lehet, mint a sorainak illetve oszlopainak száma, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, akkor $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$. Megbeszéltük, hogy a megengedett sor- illetve oszlopműveletek a rangot nem változtatják meg, azaz:

Tétel. *Az* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *mátrix* $r(\mathbf{A})$ *rangja nem változik, ha*

1. *két sorát (oszlopát) felcseréljük;*
2. *egy sorát (oszlopát) egy* $\neq 0$ *számmal megszorozzuk;*
3. *egy sorának (oszlopának) számszorosát egy másik sorhoz (oszlophoz) adjuk.*

A fenti tétel lehetőséget nyújt arra, hogy egy mátrix rangját a már jól ismert Gauss-eliminációval megállapítsuk. Csakugyan, könnyű észrevenni, hogy **a mátrix rangja nem más, mint a mátrix redukált lépcsős alakjában szereplő vezéregyesek száma**. A továbbiakban még teszünk néhány meggondolást a ranggal kapcsolatosan.

2. Mátrix rangja (folytatás)

A diadikus szorzat. Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^m$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ egy m illetve n dimenziós oszlopvektor. Ezen két vektor diadikus szorzatán (diádján) az

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}\,\mathbf{b}^T \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

mátrixot értjük, ahol ^{T} a transzponálást jelenti. Belátható, hogy minden mátrix felbontható diádok összegére. A következő tétel kimondja, hogy egy mátrix rangja egyenlő a mátrix minimális diádokra való bontásában a diádok számával, egyben módszert is ad arra, hogy ezt a felbontást megadjuk.

Tétel. *Az* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *mátrix* $r(\mathbf{A})$ *rangja megegyezik* $\mathbf{A}$ *minimális számú diádokra való felbontásában a diádok számával. Egy ilyen minimális számú diádra való felbontás megkapható a következő algoritmussal:*

- *Tfh, valamely* (i,j) *párra* $a_{ij} \neq 0$.
- *Jelölje* $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{A}$ j*-dik oszlopát, és* $\mathbf{u}_1^T$ *az* i*-edik sorát!*
- *Legyen*
$$\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} - \frac{1}{a_{ij}}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1^T\,.$$
- *Végezzük el a fentieket az új* $\mathbf{A}_1$ *mátrixszal!*

Az eljárás nyilván véges lépésben véget ér (vagyis nem lesz több $\neq 0$ *elem). Ezek után a minimális számú diádokra való felbontás könnyen leolvasható.*

Példa 1. Számoljuk ki az
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
mátrix rangját a minimális számú diádokra való bontás segítségével.

1.
$$a_{11} = 1 \neq 0, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\hookrightarrow \quad \frac{1}{a_{11}}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \frac{1}{a_{11}}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$a_{22} = -1 \neq 0, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$
$$\hookrightarrow \quad \frac{1}{a_{22}}\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{u}_2^T = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \frac{1}{a_{22}}\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{u}_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.

$$a_{33} = 3 \neq 0, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{1}{a_{33}} \mathbf{v}_3 \, \mathbf{u}_3^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \frac{1}{a_{33}} \mathbf{v}_3 \, \mathbf{u}_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

az eljárás befejeződött.

Rendezve az eddigieket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \, \mathbf{u}_1^T - \mathbf{v}_2 \, \mathbf{u}_2^T + \frac{1}{3} \mathbf{v}_3 \, \mathbf{u}_3^T = \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{u}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{v}_3 \circ \mathbf{u}_3,$$

azaz a mátrixot fel tudjuk bontani 3 diád összegére és tudjuk (elhisszük), hogy ez egy minimális ilyen felbontás. Vagyis $r(\mathbf{A}) = 3$.

Fontos megjegyezni, hogy maga a felbontás nem egyértelmű, de a minimális felbontásban szereplő diádok száma már az. Most nézzük a fenti tétel néhány egyszerű következményét!

Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. Ekkor* $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$*.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ minimálisan $r(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}$ pedig minimálisan $r(\mathbf{B})$ diád összegére bontható. Ekkor nyilvánvalóan $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ is felbontható legfeljebb $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$ diád összegére, tehát $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$. □

Tétel. *Ha* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *és* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K})$*, akkor* $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A})$*.*

Bizonyítás. Legyen $r = r(\mathbf{A})$. Ekkor $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{v}_i \, \mathbf{u}_i^T$ valamilyen $\mathbf{v}_i$ és $\mathbf{u}_i$ vektorokkal. Ekkor

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{v}_i (\mathbf{u}_i^T \, \mathbf{B})$$

az $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ szorzat egy diadikus felbontása, persze közel sem biztos, hogy minimális, ezért $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A})$. □

Vegyük észre, hogy a fenti tételben élhetünk az $\mathbf{A} \longleftrightarrow \mathbf{B}$ cserével, ezért $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B})$, vagyis összefoglalva $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$.

Összefoglalva az eddigieket egy mátrix rangjára a következő ekvivalens módokon tekinthetünk:

Tétel. *Egy* $\mathbf{A}$ *mátrix* $r(\mathbf{A})$ *rangja megadja*

1. $\mathbf{A}$ *független oszlopvektorainak maximális számát;*
2. $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai által kifeszített tér dimenzióját;*
3. $\mathbf{A}$ *független sorvektorainak maximális számát;*
4. $\mathbf{A}$ *sorvektorai által kifeszített tér dimenzióját;*
5. $\mathbf{A}$ *legnagyobb nem eltünő* ($\neq 0$) *aldeterminánsának méretét;*
6. $\mathbf{A}$ *minimális diadikus felbontásában szereplő diádok számát.*

A következőkben a fentieket alkalmazzuk a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálatához.

3. Visszatérés a lineáris egyenletrendszerekhez

Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert. Ez a rendszer felírható $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakba, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m .$$

Szokás szerint értelmezzük az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{K}).$$

Érdemes lesz az $\mathbf{A}$ együttható mátrixra úgy tekintenünk, mint oszlopvektorainak a rendszerére, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & | & a_{12} & | & \dots & | & a_{1n} \\ a_{21} & | & a_{22} & | & \dots & | & a_{2n} \\ \dots & | & \dots & | & \dots & | & \dots \\ a_{m1} & | & a_{m2} & | & \dots & | & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & | & \mathbf{a}_2 & | & \dots & | & \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_k \in \mathbb{K}^m$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix k-dik m dimenziós oszlovektorát $(k = 1, \dots, n)$. Vegyük észre, hogy a lineáris egyenletrendszerünk ezzel a jelöléssel az

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

alakba írható. Ez azt jelenti, hogy úgyis tekinthetünk egy lineáris egyenletrendszerre, mintha azt kérdeznénk, hogy a $\mathbf{b}$ vektor előáll-e, mint az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorok egy lineáris kombinációja és ha igen, akkor milyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ együtthatókkal? Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetek fordulhatnak elő!

1. **Az egyenletrendszernek nincs megoldása.**
   Ez az eset akkor áll fenn, ha a $\mathbf{b}$ vektor nem áll elő, mint az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorok lineáris kombinációja. Ez azt jelent, hogy a $\mathbf{b}$ vektor nincs benne az oszlopvektorok által kifeszített térben, azaz $\mathbf{b} \notin \mathrm{Span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\})$. Ez azt jelenti, hogy az oszlopvektorok és a $\mathbf{b}$ vektor által kifeszített $\mathrm{Span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\})$ tér dimenziója nagyobb, mint az oszlopvektorok által kifeszített $\mathrm{Span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\})$ tér dimenziója. Az előbbi viszont az előző fejezet alapján éppen az $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ kibővített mátrix rangjával, míg az utóbbi éppen az $\mathbf{A}$ együttható mátrix rangjával egyezik meg. Azt kapjuk tehát, hogy pontosan akkor nincs megoldás, ha $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) > r(\mathbf{A})$.

2. **Az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.**
   Az előző pont alapján pontosan akkor van megoldásunk, ha $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$. (Gondoljuk meg, hogy az $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) < r(\mathbf{A})$ eset miért nem állhat fenn!) A megoldás ezen feltétel mellett akkor egyértelmű, ha a $\mathbf{b}$ vektor egyértelműen írható fel, mint az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorok lineáris kombinációja. Ez csak úgy lehetséges, ha az oszlopvektorok bázis alkotnak (vagyis lineárisan függetlenek) az általuk kifeszített térben. Más szóval $r(\mathbf{A})$ (vagyis az oszlopvektorok terének dimenziója) megegyezik az oszlopvektorok számával, vagyis n-nel, ami egyben az ismeretlenek száma is. Vagyis azt kapjuk, hogy pontosan akkor létezik egyetlen megoldás, ha $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.

3. **Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.**
   Mivel van megoldásunk, ezért tudjuk, hogy $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) =: r$. Az eddigi esetek után már csak az lehetséges, hogy $r < n$, vagyis az együttható mátrix és a kibővített mátrix közös rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma. Ez azt

jelenti tehát, hogy az oszlopvektorok egy r dimenziós teret feszítenek ki, közülük valamelyik r db lineárisan független vektor ebben a térben bázist alkot, és a $\mathbf{b}$ vektor is benne van ebben a térben. Ekkor tehát a $\mathbf{b}$ vektort elő tudjuk állítani, mint az r lineárisan független vektor lineáris kombinációja és még marad $n-r$ vektorunk, melyekhez tartozó együtthatókat szabad paraméterként választhatjuk. Ebben az esetben tehát végtelen sok megoldásunk van $n-r$ szabad paraméterrel.

Bebizonyítottuk tehát a következő nagyon fontos tételt.

Tétel. ***(Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága)***
Az eddigi jelölésekkel tekintsük az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ az együttható mátrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ az inhomogenitás vektor, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ az ismeretlen vektor és $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ a kibővített mátrix. Az egyenletrendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$. Amennyiben $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = n$, ahol n az ismeretlenek száma, a megoldás egyértelmű. Ha $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = r < n$, akkor végtelen sok megoldásunk van $n-r$ szabad paraméterrel.

Példa 2. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a kibővített mátrix rangját Gauss-eliminációval!

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a második sorból kivontuk az első kétszeresét $(S_2 - 2S_1)$. Látható, hogy $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = 2 =$ „az ismeretlenek száma”, ezért az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Példa 3. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 6y + 6z &= 3. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a kibővített mátrix rangját Gauss-eliminációval!

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 3 & 6 & 6 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

ahol a második sorból kivontuk az első háromszorosát $(S_2 - 3S_1)$. Látható, hogy $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = 1$, ezért az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van $3 - 1 = 2$ szabad paraméterrel.

Példa 4. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 6y + 6z &= 2. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a kibővített mátrix rangját Gauss-eliminációval!

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 3 & 6 & 6 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix},$$

ahol a második sorból kivontuk az első háromszorosát ($S_2 - 3S_1$). Látható, hogy $r(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 2$, míg $r(\mathbf{A}) = 1$, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Példa 5. Egy közepesen jó barátunk gondolt 20 egész számra, legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Azt játszuk, hogy kérdéseket tehetek fel neki, ezen számok lineárkombinációját illetően. Például, „Mennyi $3x_7 - 12x_{14}$?” Legkevesebb hány ilyen kérdésből tudom kitalálni az összes számot?

Az világos, hogy 20 kérdés biztosan elég, hiszen egyenként rákérdezhetek a számokra. A kérdés az, hogy vajon kevesebb kérdés is elegendő-e? Tegyük fel, hogy m kérdés elég. Vegyük észre, hogy valójában az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,20}x_{20} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,20}x_{20} &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m,20}x_{20} &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságára kérdezünk rá, ahol az egyenleteink bal oldala az általunk feltett kérdéseket, a jobb oldala a kérdéseinkre adott válaszokat szimbolizálja. Ekkor tehát az együttható mátrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,20}$, így $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, 20\}$. Miután egyértelmű megoldást várunk, ezért szükséges és elegendő, hogy $r(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = 20$ legyen, ahol 20 az ismeretlenek száma. Ez mutatja, hogy $m \geq 20$, vagyis legalább 20 kérdésre van szükség, de láttuk, hogy ennyi elég is. Vegyük észre, hogy irreleváns, hogy egész számokra gondoltak, bármilyen $\mathbb{K}$-beli esetre működik a dolog.

Példa 6. Vizsgáljuk meg, hogy mi változik abban az esetben, ha kikötjük, hogy csak pozitív egész számokra gondolhat az illető? Érdekes, hogy ebben az esetben pusztán 2 kérdés elegendő! Valóban, először kérdezzünk rá a számok összegére, vagyis, hogy mennyi $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}$? Mivel a számok pozitív egészek voltak, ezért a válasz valamilyen N pozitív egész lesz. Most kérdezzünk rá az

$$x_1 + x_2(N+1) + x_3(N+1)^2 + \cdots + x_{20}(N+1)^{19}$$

értékre. Ha a válasz valamilyen Z egész szám lesz, akkor nincs más dolgunk, mint ezt a Z számot felírjuk $(N+1)$ es számrendszerbe. Az ebben a számrendszerben felírt számjegyek éppen a gondolt számok lesznek, hiszen pont erre kérdeztünk rá. Vegyük észre, hogy most a gondolt számok száma (vagyis a 20) az irreleváns, a módszer akárhány pozitív egész számmal működik: akárhány pozitív egészt ki tudunk találni 2 kérdéssel.

Speciális esetként vizsgáljuk meg a homogén lineáris egyenletrendszerek esetét, vagyis amikor $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mivel ekkor a kibővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az $\mathbf{A}$ együttható mátrixhoz hozzáveszünk egy tiszta 0-ból álló oszlopot, ezért a rang nem változik, azaz $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{0}) = r(\mathbf{A})$, vagyis mindig van megoldásunk. Ezt már tudtuk eddig is, hiszen az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldás, mindig megoldása egy homogén egyenletrendszernek. A kérdés, hogy mikor létezik nem triviális megoldás? A fenti tétel alapján, akkor létezik a homogén egyenletrendszernek nemtriviális megoldása, ha $r(\mathbf{A}) < n =$ „az ismeretlenek száma”.

Megjegyzés 7. Még speciálisabb esetként vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha homogén egyenletrendszerünk van négyzetes együttható mátrixszal, azaz abban az esetben, ha az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával. Ekkor tehát $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és $\mathbf{x}, \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$. A fentiek alapján két eset lehetséges:

1. $r(\mathbf{A}) = n$ esetén pontosan egy megoldásunk van és ez a triviális megoldás. A rang determinánson alapuló definíciója szerint, ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb méretű, nem eltűnő aldeterminánsa $n \times n$-es, azaz maga az $\mathbf{A}$ mátrix. Azt kapjuk tehát, hogy az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek pontosan akkor van csak triviális megoldása, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$. Gondoljuk meg, hogy ez összhangban áll azzal, hogy ha a mátrixunk reguláris, azaz a determinánsa nem nulla, akkor invertálható. Így az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletünket balról megszorozva $\mathbf{A}$ inverzével, azt kapjuk, hogy a megoldás $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, a triviális megoldás.

2. A fentiek alapján, az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletnek pontosan akkor van nem triviális megoldása, ha $r(\mathbf{A}) < n$, azaz $\det \mathbf{A} = 0$. Ekkor végtelen sok megoldásunk van $n - r(\mathbf{A})$ szabad paraméterrel.

Ajánlott irodalom

- Freud Róbert, Lineáris Algebra, ELTE Eötvös Kiadó
- Horváth Erzsébet, Lineáris Algebra, Műegyetemi Kiadó
- Wettl Ferenc, A lineáris algebra alkalmazásai
  http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/browsep.jsp?bookId=120
- https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/11997/2011-0098_linearis_algebra.pdf?sequence=2&isAllowed=y

- https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/137/Linearis_algebra_es_tobbvaltozos_fuggvenyek.pdf?sequence=1&isAllowed=y