

Numerikus sorokkal kapcsolatos definíciók és tételek:

Def. A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s , ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = s \in \mathbb{R} \text{ (véges) határérték.}$$

T. Geometriai sor.

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Pl. $\sum_{k=3}^{\infty} q^k = q^3 + q^4 + q^5 + \dots = \frac{q^3}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

Pl. $a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$, ha $|q| < 1$

T. Cauchy-tétel

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon, \text{ ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

A konvergencia szükséges feltétele

T. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right) \Rightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \right)$

Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{n+1} c_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n, \quad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

T. Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart a 0-hoz (jelben $c_{n \downarrow} 0$), akkor a sor konvergens.

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

$$|H| = |s - s_n| \leq c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

D. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens.

D. *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor.

T.
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergens} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right)$$

Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia

Pozitív tagú sorok

T. (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.
(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Majoráns kritérium

T. Ha $0 < a_n \leq c_n \quad \forall n$ -re és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

Minoráns kritérium

T. Ha $0 \leq d_n \leq a_n \quad \forall n$ -re és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

Hányados kritérium

T₁.

1. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \forall n \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$

2. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1, \forall n \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$

T₁^{*}

1. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1 \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$

2. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$

Gyökkritérium

T₂

Ha $\forall n \geq N$ -re $a_n > 0$ és

$$1.) \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow \sum_N^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$2.) \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_N^{\infty} a_n \text{ div.}$$

T2.*

Ha $a_n > 0$ és $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, akkor

$$c < 1 \Rightarrow \sum_N^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

$$c > 1 \text{ vagy } c = \infty \Rightarrow \sum_N^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

2.5.5. Integrálkritérium

T.

Legyen f pozitív, monoton csökkenő függvény $[1, \infty)$ -en és $f(k) = a_k > 0$.

$$1. \text{ Ha } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}$$

$$\text{Ha } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ divergens} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergens}$$

T.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor konvergens, ha $\alpha > 1$, minden más esetben divergens.

Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén

Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

$$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Aszimptotikus egyenlőség ($a_n \sim b_n$)

a_n aszimptotikusan egyenlő b_n -nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

T. $a_n > 0, b_n > 0$

$a_n \sim b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens

Pl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Megoldás. $a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n$, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8}}{\frac{1}{3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \dots = 1.$$

Ezek szerint mivel $a_n \sim b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ (1.a)

Mo. Azt, hogy ez a sor konvergens, több módszerrel is meg lehet mutatni (definíció, majoráns kritérium, integrálkritérium, összehasonlító kritérium). A sor konvergenciájának a definíciója az, amellyel sokszor nemcsak a sor konvergenciája, hanem határértéke is meghatározható.

Esetünkben $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$, $n=1,2,\dots$

Így $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$.

Az $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+3)}$ általános tag felírható rész törtök összegeként az $\frac{1}{n \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}$ alakban. Ezt megkaphatjuk úgy is, hogy képezzük a nevező tényezői reciprokeinak a különbségét, az $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$ kifejezést: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{3}{n \cdot (n+3)}$. Ezt 3-al osztva adódik, hogy

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Ennek felhasználásával írjuk át s_n -t:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right). \end{aligned}$$

Összefoglalva: $s_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$.

Ezek szerint $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{18}$.

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ konvergens és összege $\frac{11}{18}$.

Az s_n utóbbi alakjából az is következik, hogy a sor s összegének az s_n részletösszegekkel való közelítésének a hibája

$$\begin{aligned} H &= |s - s_n| = \left| \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \leq \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}} \quad (1.b)$

Mo. Esetünkben $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n = 1, 2, \dots$

Így $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Az $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)(n+2)}$ általános tag felírható rész törték összegeként:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right). \end{aligned}$$

Megjegyzés. A rész törtékre bontás az 1a) szerinti módon röviden is elvégezhető.

Írjuk át a korábbi átalakításra támaszkodva s_n -t:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4}, \text{ így } s_n \text{ az } s = \frac{1}{4} \text{-hez konvergál.}$$

c) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}} \quad (1.c)$

Mo. Alakítsuk a nevezőt szorzattá! $9x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$. Emiatt

$$\frac{1}{9x^2 - 3x - 2} = \frac{1}{9 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right)} = \frac{1}{(3x+1)(3x-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+1} \right). \text{ Így}$$

$$a_n = \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right). \text{ Innen } a_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right), a_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right),$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right), \dots, a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right). \text{ Ezért}$$

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{3}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ezek szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$ sor konvergens és határértéke $\frac{1}{3}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ (1.d)

Mo. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Így

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &\quad - (\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ &= (-\sqrt{2} + \sqrt{n+2}) - (-\sqrt{1} + \sqrt{n+1}) = -\sqrt{2} + \sqrt{n+2} + \sqrt{1} - \sqrt{n+1} = \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{n+2 - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Tehát $s_n = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$, $n = 1, 2, \dots$

Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}$. Eszerint a

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ sor konvergens és határértéke $1 - \sqrt{2}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (1.e)

Mo. $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Bontsuk fel a_n -t rész törtök összegére, azaz határozzunk meg olyan

A, B, C, D állandókat, hogy minden n értékre fennálljon a

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{(n+1)^2} + \frac{D}{n+1} \quad \dots \text{azonosság.}$$

Képezzük a következő kifejezést: $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Eszerint $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Ennek felhasználásával:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1.$$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ sor konvergens és a határértéke 1.

$$f) \boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}} \quad (1.f)$$

$$Mo. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k (-3)^2}{2^{2k} \cdot 2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k \cdot 9}{4^k \cdot 2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{2} \frac{(-3)^k}{4^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^k.$$

Az utóbbi alak szerint a sor $q = \frac{-3}{4}$ kvóciensű, tehát $|q| = \left|\frac{-3}{4}\right| < 1$ miatt konvergens

$$\text{mértani sor, amelynek az összege } \frac{\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2}{1 - \frac{-3}{4}} = \frac{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{16}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{81}{32} = \frac{81}{56}.$$

$$g) \boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - (-2)^{k+2}}{5^k}} \quad (1.g)$$

Mo.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} - (-2)^{k+2}}{5^k} &= \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{3^{k+2}}{5^k} - \frac{(-2)^{k+2}}{5^k} \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{3^k \cdot 3^2}{5^k} - \frac{(-2)^k (-2)^2}{5^k} \right] = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left[9 \cdot \frac{3^k}{5^k} - 4 \cdot \frac{(-2)^k}{5^k} \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left[9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^k \right]. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{9 \cdot \frac{9}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{81}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{81}{10}, \text{ mert } q = \frac{3}{5} \text{ kvóciensű mértani sor.}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} -4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^k = \frac{-4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^2}{1 - \frac{-2}{5}} = \frac{-4 \cdot \frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = -\frac{16}{25} \cdot \frac{5}{7} = -\frac{16}{35}, \text{ mert}$$

$$q = \frac{-2}{5} \text{ kvóciensű konvergens mértani sor: } |q| = \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1.$$

Ezeknek a konvergens soroknak az összege is konvergens és határértéke:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^k \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left[9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \right] - \sum_{k=2}^{\infty} \left[4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^k \right] = \frac{81}{10} - \frac{16}{35}.$$

$$h) \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}} \quad (\text{def alapján}) \quad (1.h)$$

2. A Cauchy-féle konvergenciakritériummal döntsük el, hogy konvergensek-e?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ (2.a)

Mo. A Cauchy-féle konvergenciakritérium fennállásához azt kell igazolni, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists M(\varepsilon): |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$, ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$.

Esetünkben $a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ és

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| &= \\ &= \frac{n+1}{(n+1)^3 + (n+1)^2 + 1} + \frac{n+2}{(n+2)^3 + (n+2)^2 + 1} + \dots + \frac{n+k}{(n+k)^3 + (n+k)^2 + 1} < \\ &< \frac{n+1}{(n+1)^3 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{(n+2)^3 + (n+2)^2} + \dots + \frac{n+k}{(n+k)^3 + (n+k)^2} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2 + n+1} + \frac{1}{(n+2)^2 + n+2} + \dots + \frac{1}{(n+k)^2 + n+k} = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ezek szerint $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$ és k tetszőleges pozitív szám. Tehát

szerint a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ sor konvergens.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n}$ (2.b)

Mo.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n} = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} = \\ &= \frac{2}{n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} \leq \frac{2}{n\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{2}{n\sqrt{n^2}} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n(n-1)} = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 2. \\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| &= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} < \\ &< 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right) < \frac{2}{n} < \varepsilon, \\ &\text{ha } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ és } k \text{ tetszőleges pozitív szám. Ezzel teljesült a Cauchy-féle konvergencia-} \end{aligned}$$

kritérium, tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n}$ sor konvergens.

3. Alternáló sorok, Leibniz kritérium. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjunk közelítést a sorösszegre legfeljebb 0,1-es pontossággal!

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$ (3.a)

Mo. $\frac{\cos n\pi}{\lg n} = \frac{(-1)^n}{\lg n} = (-1)^n \cdot c_n$, ahol $c_n = \frac{1}{\lg n} > 0$, mivel $n \geq 2 > 1$ miatt $\lg n > \lg 1$.

Mint hogy $c_n > 0$, c_n monoton fogy és tart 0-hoz, a sor Leibniz típusú, tehát konvergens,

létezik a sorösszeg $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\lg n}$, és az $s \approx s_n$ közelítés hibája

$$H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{1}{\lg(n+1)} \leq 0,1 \Rightarrow n+1 \geq 10^{10} \Rightarrow n \geq 10^{10} - 1.$$

Ezek szerint s -t az $s_{10^{10}-1} = \sum_{n=2}^{10^{10}-1} \frac{\cos(n\pi)}{\lg(n)}$ részletösszeg legfeljebb 0,1 hibával közelíti.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (3.b)

Mo. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, így $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ nevezetes határérték miatt

példánkban $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ sor divergens.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - 1}$ (3.c)

Mo. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$, ahol $c_n = \frac{2n}{n^2 - 1}$. Az $n \geq 2$ miatt $n^2 - 1 \geq 3 > 0$, ezért c_n létezik és $c_n > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 1} = 0. \text{ Ahhoz, hogy a sor Leibniz típusú legyen, még az kell, hogy}$$

c_n fogyó legyen. Ennek igazolásához végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\leq c_n & (2n+2)(n^2-1) &\leq 2n(n^2+2n) \\ \frac{2(n+1)}{(n+1)^2-1} &\leq \frac{2n}{n^2-1} & 2n^3+2n^2-2n-2 &\leq 2n^3+4n^2 \\ & & -2n^2-2n-2 &\leq 0 \\ \frac{2n+2}{n^2+2n} &\leq \frac{2n}{n^2-1} \end{aligned}$$

Mivel az egyenlőtlenségek ekvivalensek, az utolsó fennállása miatt az első is teljesül, tehát c_n monoton fogy is. Ezért a sor Leibniz sor, azaz konvergens, és így az

$s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - 1}$ összeg létezik és az $s \approx s_n$ közelítés hibája:

$$H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{2n+2}{n^2+2n} \leq \frac{2n+n}{n^2} = \frac{3}{n} < 0,1 \Rightarrow n > 30 \Rightarrow n \geq 31.$$

Tehát a sorösszeg keresett közelítése $s_{31} = \sum_{n=2}^{31} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - 1}$.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)^n$ (3.d)

Mo. $a_n = \left(\frac{-n}{n+1} \right)^n \Rightarrow |a_n| = \left| \left(\frac{-n}{n+1} \right)^n \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)^n$ divergens, nincs s.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ (3.e)

Mo. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, ahol $c_n = \frac{1}{n(n+3)} > 0, n = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$,

illetve $c_n = \frac{1}{n(n+3)}$ monoton fogyó. Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ sor Leibniz típusú, így

konvergens, ezért az s sorösszeg-nek az s_n részletösszeggel való közelítésének hibája:

$$H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)} \leq \frac{1}{(n+1)^2} < 0,1 \Rightarrow n+1 > \sqrt{10} \Rightarrow n \geq 3.$$

Így az s-et legfeljebb 0,1 hibával közelítő részletösszeg $s_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^k}{k(k+3)}$.

Megjegyzés. A sor abszolút konvergens, így a megfelelő közelítés az alábbiak segítségével is megkapható:

$$H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k(k+3)} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{k(k+3)} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$$
 a sor konvergenciájának a

definíciója alapján az $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$ átalakítás felhasználásával.

Megjegyzés. Az előző maradéksor összege (a H hiba) felülről becsülhető a megfelelő

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x(x+3)} dx, \text{ vagy az } \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ integrállal.}$$

$$f) \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\alpha}}{n!}, \alpha \geq 0} \quad (3.f)$$

$$Mo. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{\alpha}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n, \text{ ahol } c_n = \frac{n^{\alpha}}{n!}, n=1,2,\dots$$

Ha α tetszőleges, akkor $c_n > 0$, amennyiben $n=1,2,\dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\alpha}}{n!} \text{ Leibniz típusú lesz, ha } c_n \text{ monoton fogy:}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)^{\alpha}}{(n+1)!}}{\frac{n^{\alpha}}{n!}} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ezek szerint, ha n elég nagy, akkor $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$, azaz $c_n > 0$, miatt c_n monoton fogy.

(Oldjuk meg a $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$ egyenlőtlenséget, ha $\alpha \geq 0$:

$$\text{Ha } n \text{ növekszik} \Rightarrow \frac{1}{n} \text{ fogy} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \text{ fogy} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \text{ fogy, ha } \alpha \geq 0 \Rightarrow \text{ha } n \geq 1,$$

$$\text{úgy } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\alpha} = 2^{\alpha}. \text{ Ennélfogva } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} \leq 2^{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Amennyiben $2^{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} < 1$ is teljesül, úgy fennáll, hogy $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$ és c_n monoton fogy.

$$2^{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n+1 > 2^{\alpha} \Leftrightarrow n > 2^{\alpha} - 1.)$$

$$\text{Legyen } \alpha < 1. c_n \text{ Leibniz sor} \Rightarrow s \approx s_n \text{ hibája} \leq c_{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} < 0,1.$$

Ebből $n! > 10$, illetve $n \geq 4$ adódik.

$$\text{Tehát } s_4 = \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^n n^{\alpha}}{n!} \text{ az } s \text{-t } 0,1\text{-nél kisebb hibával közelíti.}$$

Megjegyzés. Az $\alpha < 0$ eset részben hasonlóan vizsgálható.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}$ (3.g)

Mo. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1000} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, $c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1000} > 0$, $n=1,2,\dots$

Könnyen belátható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1000} = 0$.

Vizsgáljuk c_n monotonitását deriválással. Legyen $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1000}$, $x \geq 1$.

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1000} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1000) - \sqrt{x} = \frac{x+1000-2x}{2\sqrt{x}(x+1000)^2} = \frac{1000-x}{2\sqrt{x}(x+1000)^2}.$$

Tehát $f'(x) \leq 0$, ha $x \geq 1000$. Ezek szerint f monoton fogy az $[1000, \infty)$ -en, így ha $n \geq 1000$, akkor $f(n+1) \leq f(n)$, másképpen $c_{n+1} < c_n$, vagyis c_n monoton fogyó.

Így az előzőek alapján c_n pozitív, nullsorozat és monoton fogyó, ha $n = 1000, 1001, \dots$

A sor tehát Leibniz sor, így az $s \approx s_n$ közelítés hibája:

$$H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+1000} \leq 0,1.$$

Oldjuk meg a $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1001} \leq 0,1$ egyenlőtlenséget. Növeljük az egyenlőtlenség baloldalát:

$$\frac{\sqrt{2n}}{n} < 0,1. \text{ Ennek megoldása megoldása a } \frac{\sqrt{n+1}}{n+1000} \leq 0,1 \text{-nek is. } \frac{\sqrt{2n}}{n} < 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{n} > \sqrt{2} \cdot 1000, \text{ akkor } n \geq 10^6 + 1 \text{ és keresett közelítés az } s \approx s_{10^6+2} = \sum_{n=1}^{10^6+2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1000}.$$

4. Majoráns és minoráns kritérium. (A keddi gyakon mondjuk el mi az!)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ (4.a)

Mo. $a_n = \frac{1}{3n+2} > 0$, ha $n \geq 1$. Fennáll, hogy $a_n = \frac{1}{3n+2} \geq \frac{1}{3n+2n} \geq \frac{1}{5n} = b_n$, $b_n > 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \frac{1}{n} = \infty$, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Tehát a minoráns kritérium szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2} = \infty, \text{ a sor divergens.}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$ (4.b)

Mo.1. Ismeretes, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, ha $\alpha > 1$, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Tehát, ha $b_n = \frac{1}{n^2}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Esetünkben $a_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - \sqrt{n}} = 1$.

Ezek szerint a_n és b_n aszimptotikusan egyenlő, azaz $a_n \sim b_n$. Így az összehasonlító

kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyszerre konvergens, illetve divergens.

Mivel esetünkben $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a kérdéses sor konvergens.

Mo2. $a_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$. Ha n elég nagy, úgy $\frac{n^2}{2} > \sqrt{n}$. Így $n^2 - \sqrt{n} > n^2 - 2\sqrt{n} > 0$ és

$$0 < a_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}} < \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2} = b_n. \quad (2)$$

Ismeretes, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, ha $\alpha > 1$, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$, vagyis,

ha $b_n = \frac{2}{n^2}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Ebből $0 < a_n < b_n$ miatt a majoráns kritériumból

következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a sor konvergens.

(Megjegyzés. Igazolható, hogy ha $n \geq 2$, akkor n valóban elég nagy, és $\frac{n^2}{2} > \sqrt{n}$.

$$\frac{n^2}{2} > \sqrt{n} \Leftrightarrow n^4 > 4n \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow n \geq 2.)$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$ (4.c)

Mo. $a_n = \frac{2^n}{2^{2n}-3} = \frac{2^n}{4^n-3}$. Ha $n \geq 1$, akkor $4^n - 3 \geq 4 - 3 > 0$, így $a_n > 0$.

Ha n elég nagy, akkor $\frac{4^n}{2} > 3 \Leftrightarrow 4^n > 6 \Leftrightarrow n \geq 2$.

Ekkor $0 < a_n = \frac{2^n}{4^n-3} < \frac{2^n}{4^n-\frac{4^n}{2}} \leq \frac{2^n}{\frac{4^n}{2}} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergens, mert $q = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sor és $|q| = \frac{1}{2} < 1$.

Ebből a $0 < a_n < b_n$ és a majoráns kritérium miatt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$ konvergens.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$ (4.d)

Mo.1. $a_n = \frac{2^{2n}}{2^n-3} \geq \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n = b_n \geq 0$, ha $n \geq 2$. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ és

$a_n \geq b_n$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ miatt a

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, mert a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

Mo.2. $a_n = \frac{2^{2n}}{2^n-3} \geq \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n = b_n \geq 0$, ha $n \geq 2$. Fennáll, hogy $a_n \geq b_n \geq 0$ és

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = \infty$, mert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ 1-nél nagyobb abszolút értékű kvóciensű mértani sor.

Így a minoráns kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3} = \infty$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$ (4.e)

Mo. $0 \leq a_n = \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}} \leq \frac{3^n+3^n}{6^n+2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 3^n}{6^n+2^{n+1}} \leq \frac{2 \cdot 3^n}{6^n} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergens, mert $q = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sor, ahol $|q| = \frac{1}{2} < 1$.

Innen $0 \leq a_n \leq b_n$ -ből a majoráns kritérium szerint az következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}} \text{ konvergens.}$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$ (4.f)

Mo. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^2 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4} \neq 0,$

a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$ sor divergens, a sor konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}}$ (4.g)

Mo.

$$a_n = \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}} \geq \frac{7n^5 - 2n^3}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}} \geq \frac{7n^5 - 2n^5}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}} \geq \frac{5n^5}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}}, \text{ ha } n \geq 1.$$

$$\frac{5n^5}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}} \geq \frac{5n^5}{n^6 + 2n^2 - n^2} \geq \frac{5n^5}{n^6 + n^2} \geq \frac{5n^5}{n^6 + n^6} = \frac{5n^5}{2n^6} = \frac{5}{2n} = b_n.$$

Tehát $a_n \geq b_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} = \infty$.

Így a minoráns kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 2n^2 - \sqrt{n}} = \infty$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$ (4.h)

Mo. $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3} \leq \frac{7n^5 + 2n^5}{n^8 - n^2} = \frac{9n^5}{n^8 - n^2}$. Ha n elég nagy, akkor $\frac{n^8}{2} \geq n^2$, így

$$0 \leq a_n \leq \frac{9n^5}{n^8 - n^2} \leq \frac{9n^5}{n^8 - \frac{n^8}{2}} = \frac{9n^5}{\frac{n^8}{2}} = \frac{18}{n^3} = 18 \cdot \frac{1}{n^3} = b_n.$$

A hiperharmonikus sorra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, ha $\alpha > 1$. Így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$, és $\sum_{n=1}^{\infty} 18 \cdot \frac{1}{n^3} < \infty$.

A $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} 18 \cdot \frac{1}{n^3} < \infty$ feltételek teljesülése miatt a majoráns kritérium szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3} < \infty, \text{ a sor konvergens.}$$

$$i) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}} \quad (4.i)$$

$$\text{Mo. } 0 \leq a_n = \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3} \leq \frac{7n^5 + n^5}{n^7 - n} = \frac{8n^5}{n^7 - n} \cdot \frac{n^7}{2} \geq n, \text{ ha elég nagy, így}$$

$$0 \leq a_n = \frac{8n^5}{n^7 - n} \leq \frac{8n^5}{n^7 - \frac{n^7}{2}} = \frac{8n^5}{\frac{n^7}{2}} = \frac{16}{n^2} = b_n \cdot \left(\frac{n^7}{2} \geq n \Leftrightarrow n^6 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2. \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \text{ mert } \alpha = 2 \text{ indexű hiperharmonikus sor és } \alpha > 1. \text{ Így } \sum_{n=1}^{\infty} 16 \cdot \frac{1}{n^2} < \infty \text{ is áll.}$$

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 16 \cdot \frac{1}{n^2} < \infty, \text{ valamint a majoráns kritérium szerint}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3} < \infty.$$

$$j) \quad \boxed{\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}} \quad (4.j)$$

Mo.

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{(n-2)(n-3)} =$$

$$= \frac{12}{(n-2)(n-3)} \leq \frac{12}{(n-2)^2} = b_n, \text{ ha } n \geq 6.$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} b_n = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{12}{(n-2)^2} = \frac{12}{4^2} + \frac{12}{5^2} + \dots = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2}. \text{ Könnyen igazolható, hogy}$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} b_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \text{ mert az utóbbira } \alpha = 2 > 1, \text{ ezért}$$

az konvergens hiperharmonikus sor. Kihasználtuk még, hogy ha két sor csak véges sok tagban különbözik egymástól, akkor ezek egyszerre konvergenssek és divergenssek, illetve fennáll az is, hogy egy sor akkor és csak akkor konvergens, ha nem nulla konstansszoros

konvergens (lásd a $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, illetve a $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ és $\sum_{n=4}^{\infty} 12 \cdot \frac{1}{n^2}$ párok esetét).

Az előzőek alapján tudjuk, hogy $0 \leq a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} \leq \frac{12}{(n-2)^2} = b_n, n = 6, 7, \dots$ valamint

fennáll, hogy $\sum_{n=6}^{\infty} b_n = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{12}{(n-2)^2} < \infty$, így a majoráns kritérium szerint

$$a_n = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}} < \infty.$$

5. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (5.a)

Mo. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$. Ha $n \geq 2$, úgy $\ln n \geq \ln 2 > 0$ miatt $a_n > 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1 \text{ következtében a gyökkritérium szerint}$$

a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ sor konvergens.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (5.b)

Mo. $a_n = \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} > 0$, ha $n \geq 1$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ így a}$$

gyökkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ sor konvergens.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (5.c)

Mo. $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. Ha $n \geq 2 > 1$, úgy $\ln n > 0$, $\sqrt[n]{\ln n} > 0$ és $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > 0$.

Vizsgáljuk meg, teljesül-e a sor konvergenciájának szükséges feltétele, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 0 \text{ feltétel. Legyen } f(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}}, x \geq 2. \text{ Így}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\ln\left[(\ln x)^{\frac{1}{x}}\right]}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x} \ln(\ln x)}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}} = e^{\frac{-\ln(\ln x)}{x}}. \text{ Ennélfogva}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-\ln(\ln x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = 1$ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \neq 0$, így $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ divergens.

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n \quad (5.d)$$

$$\text{Mo. } a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n, a_n > 0, \text{ mivel } e > 2 \text{ miatt } e-1 > 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e-1} \right)^{n+1} \cdot n! \left(\frac{e-1}{n} \right)^n = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(e-1)^{n+1}} \cdot \frac{(e-1)^n}{n^n} = \\ &= \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(e-1)^n}{(e-1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \cdot \frac{(e-1)^n}{(e-1)^n (e-1)} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e-1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{e-1} \rightarrow \frac{e}{e-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} > 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Így tehát a hányadoskritérium alkalmazható és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n \text{ divergens.}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n \quad (5.e)$$

$$\text{Mo. } a_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n > 0, \text{ ha } n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} < 1, \text{ tehát a gyökkritérium miatt}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n < \infty, \text{ a vizsgált sor konvergens.}$$

$$f) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} \quad (5.f)$$

$$\text{Mo. } a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} \geq 0, \text{ ha } n = 2, 3, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1}} = \frac{e^{-1} \cdot 1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tehát a gyökkritérium szerint $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} < \infty$, a sor konvergens.

(Kihasználtuk az alábbi nevezetes határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, ahol $a > 0$.)

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (5.g)

Mo. $a_n = \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ így a}$$

gyökkritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ konvergens.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ (5.h)

Mo. $a_n = \frac{n!}{2^n + 1} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1} + 1}}{\frac{n!}{2^n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{2^n + 1}{2^n \cdot 2 + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \infty, \text{ mivel } \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát a hányadoskritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} = \infty$.

i) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}}$ (5.i)

Mo.1. $a_n = \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = b_n > 0$, ha $n=1,2,\dots$.

Mivel a harmonikus sor divergens, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Ebből és az $a_n \geq b_n > 0$ feltételből

a minoráns kritérium szerint következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty$.

Mo.2. $f(n) = \frac{1}{2n-1} > 0$ és f monoton fogy az $[1, \infty)$ -en.

Ezért az integrálkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ sor és $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx$ improprius integrál

egyszerre konvergens, vagy egyszerre divergens.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2}{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x-1) \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(2x-1) \right] - \frac{1}{2} \ln 1 = \infty,$$

tehát
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty.$$

j) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}}$ (5.j)

Mo.1. $a_n = \frac{2^n n!}{n^n} > 0$, ha $n=1,2,\dots$.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^n = \\ &= 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \text{ Így a hányadoskritérium szerint} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} < \infty.$$

$$k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ ahol } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases} \quad (5.k)$$

Mo. Könnyen belátható, hogy mivel $0 < \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}$, ha $n = 1, 2, \dots$. Ezért fennáll, hogy

$0 < a_n \leq \frac{1}{2^n} = b_n$, ha $n = 1, 2, \dots$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ egy $q = \frac{1}{2} < 1$ kvóciensű

konvergens mértani sor, így a majoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n \quad (5.l)$$

Mo. $a_n = \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n$, $n \geq 1$, így $\arctan(n) \geq \arctan(1) > \arctan(0) = 0$.

Tehát ha $n \geq 1$, úgy $\arctan(n) > 0$ és $a_n > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \arctan n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} < 1.$$

Így a gyökkritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n < \infty$.

5. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (5.a)

Mo. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$. Ha $n \geq 2$, úgy $\ln n \geq \ln 2 > 0$ miatt $a_n > 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1 \text{ következtében a gyökkritérium szerint}$$

a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ sor konvergens.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (5.b)

Mo. $a_n = \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} > 0$, ha $n \geq 1$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ így a}$$

gyökkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ sor konvergens.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (5.c)

Mo. $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. Ha $n \geq 2 > 1$, úgy $\ln n > 0$, $\sqrt[n]{\ln n} > 0$ és $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > 0$.

Vizsgáljuk meg, teljesül-e a sor konvergenciájának szükséges feltétele, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 0 \text{ feltétel. Legyen } f(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}}, x \geq 2. \text{ Így}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\ln\left[(\ln x)^{\frac{1}{x}}\right]}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x} \ln(\ln x)}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}} = e^{\frac{-\ln(\ln x)}{x}}. \text{ Ennélfogva}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-\ln(\ln x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[x]{\ln x}} = 1$ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \neq 0$, így $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ divergens.

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n \quad (5.d)$$

$$\text{Mo. } a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n, a_n > 0, \text{ mivel } e > 2 \text{ miatt } e-1 > 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e-1} \right)^{n+1} \cdot n! \left(\frac{e-1}{n} \right)^n = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(e-1)^{n+1}} \cdot \frac{(e-1)^n}{n^n} = \\ &= \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(e-1)^n}{(e-1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \cdot \frac{(e-1)^n}{(e-1)^n (e-1)} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e-1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{e-1} \rightarrow \frac{e}{e-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} > 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Így tehát a hányadoskritérium alkalmazható és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n \text{ divergens.}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n \quad (5.e)$$

$$\text{Mo. } a_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n > 0, \text{ ha } n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} < 1, \text{ tehát a gyökkritérium miatt}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n < \infty, \text{ a vizsgált sor konvergens.}$$

$$f) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} \quad (5.f)$$

$$\text{Mo. } a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} \geq 0, \text{ ha } n = 2, 3, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1}} = \frac{e^{-1} \cdot 1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tehát a gyökkritérium szerint $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} < \infty$, a sor konvergens.

(Kihasználtuk az alábbi nevezetes határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a$, ahol $a > 0$.)

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)^n}$ (5.g)

Mo. $a_n = \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)^n} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ így a}$$

gyökkritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)^n}$ konvergens.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ (5.h)

Mo. $a_n = \frac{n!}{2^n + 1} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1} + 1}}{\frac{n!}{2^n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{2^n + 1}{2^n \cdot 2 + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \infty, \text{ mivel } \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát a hányadoskritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} = \infty$.

i) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}}$ (5.i)

Mo.1. $a_n = \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = b_n > 0$, ha $n=1,2,\dots$.

Mivel a harmonikus sor divergens, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Ebből és az $a_n \geq b_n > 0$ feltételből

a minoráns kritérium szerint következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty$.

Mo.2. $f(n) = \frac{1}{2n-1} > 0$ és f monoton fogy az $[1, \infty)$ -en.

Ezért az integrálkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ sor és $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx$ improprius integrál

egyszerre konvergens, vagy egyszerre divergens.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2}{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x-1) \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(2x-1) \right] - \frac{1}{2} \ln 1 = \infty,$$

tehát
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty.$$

j) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}}$ (5.j)

Mo.1. $a_n = \frac{2^n n!}{n^n} > 0$, ha $n=1,2,\dots$.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^n = \\ &= 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \text{ Így a hányadoskritérium szerint} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} < \infty.$$

$$k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ ahol } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^n}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases} \quad (5.k)$$

Mo. Könnyen belátható, hogy mivel $0 < \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}$, ha $n = 1, 2, \dots$. Ezért fennáll, hogy

$0 < a_n \leq \frac{1}{2^n} = b_n$, ha $n = 1, 2, \dots$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ egy $q = \frac{1}{2} < 1$ kvóciensű

konvergens mértani sor, így a majoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n \quad (5.l)$$

Mo. $a_n = \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n$, $n \geq 1$, így $\arctan(n) \geq \arctan(1) > \arctan(0) = 0$.

Tehát ha $n \geq 1$, úgy $\arctan(n) > 0$ és $a_n > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \arctan n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} < 1.$$

Így a gyökkritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan n \right)^n < \infty$.

6. Integrálkritériummal döntsük el, hogy konvergensek-e?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ (6.a)

Mo. $f(n) = \frac{n}{e^n} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^x} > 0, x \geq 1.$

$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} \leq 0$, ha $x \geq 1$. Tehát az $[1, \infty)$ intervallumon f

pozitív és monoton csökkenő függvény. Most vizsgáljuk az $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{e^x} dx$ integrált.

$\int \frac{x}{e^x} dx = \int e^{-x} x dx = -e^{-x} x + \int e^{-x} dx = -e^{-x} x - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$. Innen

$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^x} dx = \left[-e^{-x}(x+1) \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} [-e^{-x}(x+1)] + e^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{e} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} =$

$$= \frac{2}{e} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)'}{(e^x)'} = \frac{2}{e} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{2}{e}.$$

Mivel f az $[1, \infty)$ -en pozitív és monoton csökkenő függvény és improprius integrálja konvergens (véges), ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} < \infty \text{ (konvergens).}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ (6.b)

Mo. $f(n) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}, n=1,2,\dots$. $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} \sqrt{x}}$ pozitív és monoton fogyó az

$[1, \infty)$ intervallumon, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ sor és az $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ improprius integrál

egyszerre konvergens, illetve egyszerre divergens.

$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2 \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}} dx = -2 \int e^{-\sqrt{x}} (-\sqrt{x})' dx = -2e^{-\sqrt{x}} + c$, így

$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -2e^{-\sqrt{x}} + 2e^{-1} = \frac{2}{e} < \infty.$

Eszerint $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ konvergens, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ is konvergens, összege létezik.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ (6.c) ($p \geq 1$)

Mo. $f(n) = \frac{1}{n \ln^p n}$, $n = 2, 3, \dots$

1. eset. Legyen $p > 1$. Ha $n \geq 3 > 1$, úgy $\ln n > \ln e = 1$, $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ pozitív és monoton fogy a $[3, \infty)$ intervallumon, ezért az integrálkritérium szerint a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ sor

és az $\int_3^{\infty} f(x) dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ improprius integrál egyszerre konvergens, illetve divergens.

$$\int \frac{1}{x \ln^p x} dx = \int \ln^{-p} x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^{-p} x \cdot (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{p-1}}. \text{ Így}$$

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} f(x) dx &= \int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \left[\frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{p-1}} \right]_3^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(\ln 3)^{p-1}}. \end{aligned}$$

Eszerint $\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ konvergens, így $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ és $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ is konvergens.

2. eset. Legyen $p = 1$. Az 1. esethez hasonló módon kezelhető.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^1 x} dx = \int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = [\ln(\ln(x))]_2^{\infty} = \infty. \text{ Így} \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} &= \infty, \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} = \infty. \end{aligned}$$

3. eset. Legyen $p < 1$. Az előzőeket is felhasználva járhatnánk el esetszétválasztással p különböző értéktartománya mellett.

7. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét legfeljebb 10^{-3} hibával, amennyiben konvergensek!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \right)^n$ (7.a)

Mo. $a_n = \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \right)^n$, $a_n > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{2n^2+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ tehát a gyökkritérium}$$

szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \right)^n < \infty$, a sor konvergens, így összege s létezik.

Az s -nek az s_n -nel, az n -edik részletösszeggel való közelítésének a hibája:

$$H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2k^2+1} \right)^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2k^2} \right)^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \leq \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

(Egy konvergens, q kvóciensű mértani sor összege $= \frac{a}{1-q}$, a az első tag.)

Legyen a hiba 10^{-3} -nál kisebb: $\left(\frac{1}{2} \right)^n < 10^{-3} \rightarrow 2^n > 10^3 \rightarrow n \geq 10$.

Így a sor értéke 10^{-3} -nál kisebb hibával: $s_n = s_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k^2}{2k^2+1} \right)^k$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$ (7.b)

Mo. $a_n = \frac{1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n! - n!}$.

Ha n elég nagy, akkor $\frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!}{2} \geq n!$ és ezért

$$0 < a_n = \frac{1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n! - n!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n! - \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!}{2}} = \frac{2}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!} = \frac{2}{(2n)!} \leq \frac{2}{2^{2n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{2^{2n} \cdot 2^{-1}} = \frac{4}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}}, \text{ ha } n \geq 2. \text{ Tehát } 0 < a_n \leq \frac{1}{4^{n-1}} = b_n, \text{ ha } n \geq 2.$$

$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$ konvergens mértani sor, amelynek kvóciense 1-nél kisebb abszolút értékű: $q = \frac{1}{4}$.

A majoráns kritérium szerint a pozitív tagú $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$ sor konvergens, így

értéke $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$ létezik. Az $s \approx s_n$ közelítés H hibája:

$$H = |s - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Mivel a hiba legfeljebb 10^{-3} lehet, legyen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} < 10^{-3}$, innen $4^{n+1} > \frac{1000}{3}$, $n \geq 4$.

Így a sor értékét legfeljebb 10^{-3} hibával közelíti s_4 , ahol

$$s_4 = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{(2k)! - k!} = 1/(4! - 2!) + 1/(6! - 3!) + 1/(8! - 4!) = \frac{1}{22} + \frac{1}{714} + \frac{1}{40296} \approx 0,4688.$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n + 10^n}$ (7.c)

Mo. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n + 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^n}{2^n + 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, itt $c_n = \frac{2^n}{2^n + 10^n}$.

Ha $n \geq 1$, akkor $c_n > 0$.

$c_n = \frac{2^n}{2^n + 10^n} = \frac{1}{1 + 5^n}$ monoton fogy, ha n növekszik, továbbá $c_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n + 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ Leibniz típusú, így konvergens, azaz s létezik.

Az $s \approx s_n$ közelítés hibája $H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{1}{1 + 5^{n+1}} < 10^{-3} \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow$

$$s \approx s_4 = \sum_{k=1}^4 \frac{(-2)^k}{2^k + 10^k}.$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{(2n)!}$ (7.d)

Mo. Az $s \approx s_n$ közelítés hibája: $H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k! 3^k}{(2k)!}$.

$$0 < a_k = \frac{k! 3^k}{(2k)!} = \frac{k! 3^k}{(2k)(2k-1) \cdots (k+1) \cdot k!} = \frac{3^k}{(2k)(2k-1) \cdots (k+1)} = \frac{3^k}{(k+1)(k+1) \cdots (k+1)} = \frac{3^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{3}{k+1} \right)^k \leq \left(\frac{3}{4} \right)^k, \text{ ha } k \geq 3.$$

Mivel $0 < a_k \leq \left(\frac{3}{4} \right)^k = b_k$, ha $k \geq 3$, és $\sum_{k=3}^{\infty} b_k = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k$ konvergens mértani sor, így a

majoráns kritérium szerint a $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ sor és így a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is konvergens, $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{(2n)!}$ létezik.

Tegyük fel, hogy $k \geq 3$. Ekkor $H = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k = \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} = b_n$.

$$H \leq 4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} < 10^{-3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} > 4000 \Rightarrow n \geq 28.$$

Tehát az s sorösszeg legfeljebb 10^{-3} -nyi hibával $s_{28} = \sum_{n=1}^{28} a_n = \sum_{n=1}^{28} \frac{n! 3^n}{(2n)!}$.

Megjegyzés. Az, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$ létezik, könnyen igazolható az alábbi módon is:

Mo. $a_n = \frac{n!3^n}{(2n)!}$. $a_n > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n!3^n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \\ &= \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{3^n \cdot 3}{3^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1) \cdot 3}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{3(n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \\ &= \frac{3}{2(2n+1)} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A hányadoskritérium szerint tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$ sor konvergens, $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}$ létezik.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ (7.e)

Mo.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, ahol $c_n = \frac{1}{n(n+3)}$ monoton fogy

és pozitív, ha $n = 1, 2, \dots$ és $c_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ezek alapján $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ Leibniz típusú,

tehát s összege létezik és az s -nek az s_n -nel való közelítésének a hibája legfeljebb

$$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

Ezért $H = |s - s_n| \leq c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)} < \frac{1}{(n+1)^2} < 10^{-3} \Rightarrow (n+1)^2 > 10^3 \Rightarrow n \geq 31$

Tehát $s \approx s_{31} = \sum_{k=1}^{31} \frac{(-1)^k}{k(k+3)}$.

8. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget a 10. részletösszeggel közelítjük?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$ (8.a)

Mo. $a_n = \frac{1}{n! + \sqrt{2}} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

$a_n = \frac{1}{n! + \sqrt{2}} < \frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}} = b_n$, ha $n \geq 2$.

Így $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty$, mert $q = \frac{1}{2} < 1$ kvóciensű konvergens mértani sor. Ezért a

majoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$ sor is konvergens, tehát az s összege létezik.

Az $s \approx s_n$ közelítés hibája H , ahol

$$H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k! + \sqrt{2}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ ha } n = 1, 2, \dots$$

$n=10$ -re $H \leq \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} < 2 \cdot 10^{-3}$. Tehát ekkora a sorösszegnek a 10. részletösszeggel való közelítésének a hibája.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$ (8.b)

Mo. $a_n = \frac{1}{n^2 + 3^n} \cdot a_n > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

$a_n = \frac{1}{n^2 + 3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n$, ha $n = 1, 2, \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \infty$, mivel $q = \frac{1}{3} < 1$ kvóciensű, konvergens mértani sor.

Az előzőek és a majoráns kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$ konvergens, s létezik.

Az $s \approx s_n$ közelítés hibája:

$$H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Esetünkben $n = 10$, így az s -nek s_{10} -el való közelítésével elkövetett hiba:

$$H \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{1}{118098} < 9 \cdot 10^{-6}.$$

$$c) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}} \quad (8.c)$$

Mo. $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. $a_n > 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} = \frac{n!}{(2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{1}{(2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}. \text{ Így}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{[2(n+1)][2(n+1)-1] \cdot \dots \cdot [(n+1)+1]} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1) \cdot \dots \cdot (n+2)} =$$

$$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot a_n < \frac{1}{4} a_n, \text{ ahonnan}$$

$$a_{n+1} < \frac{1}{4} a_n \Rightarrow a_{n+2} < \frac{1}{4} a_{n+1} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot a_n \Rightarrow \dots a_{n+3} < \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot a_n, \dots$$

Ezek szerint az $s_n \approx s$ közelítés hibája:

$$H = |s - s_n| = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots \leq \frac{1}{4} a_n + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a_n + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a_n + \dots = \frac{\frac{1}{4} a_n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} a_n.$$

Így az $s_{10} \approx s$ közelítés hibája $\frac{1}{3} a_{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10!}{20!} \leq 5 \cdot 10^{-13}$.

$$d) \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}} \quad (8.d)$$

Mo.1.: $a_n = \frac{3^n}{4^n + n^2 + 3} > 0$, ha $n = 1, 2, \dots, n$.

$$0 < a_n = \frac{3^n}{4^n + n^2 + 3} < \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n = b_n, \text{ ahol } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty, \text{ mert } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ egy}$$

$q = \frac{3}{4} < 1$ kvóciensű konvergens mértani sor. Tehát a majoráns kritérium szerint az

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + n^2 + 3} \text{ sorösszeg létezik.}$$

Az $s_n \approx s$ közelítés hibája:

$$H = |s - s_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k + k^2 + 3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Ezért $n = 10$ -re $H \leq 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \leq 0,17$.

Megjegyzés. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + n^2 + 3}$ konvergenciája a majoráns kritérium nélkül is kimutatható, de csak jóval több munkával, lásd lejjebb:

Ebben az esetben $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1 + \frac{n^2}{4^n} + \frac{3}{4^n}}{4 + \frac{(n+1)^2}{4^n} + \frac{3}{4^n}} = 3 \cdot \frac{1+0+0}{4+0+0} = \frac{3}{4} < 1$,

tehát a hányadoskritérium szerint $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3} < \infty$.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n} = 0$ igazolásához vizsgáljuk meg $\frac{x^2}{4^x}$ monotonitását az $[1, \infty)$ -en.

$$\left(\frac{x^2}{4^x}\right)' = \frac{2x \cdot 4^x - x^2 \cdot 4^x \cdot \ln 2}{4^{2x}} = \frac{2x - x^2 \ln 2}{4^x} = \frac{x}{4^x} \cdot (2 - x \ln 2) < 0, \text{ ha } x \geq 3. \text{ Ezért}$$

$\frac{x^2}{4^x}$ monoton fogy a $[3, \infty)$ -en, így $\frac{n^2}{4^n}$ pozitív, monoton fogy és korlátos a $[3, \infty)$ -en, tehát

létezik $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n}$. Az $\frac{n^2}{4^n}$ sorozat $\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}$ részsorozatának is ugyanaz a határértéke:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = L \cdot \frac{1}{4}.$$

Az $L = L \cdot \frac{1}{4}$ egyenlet megoldása tehát valóban az $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n} = 0$.

e) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n}} \quad (8.e)$

Mo. $a_n = \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n}, n = 1, 2, \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, ahol $c_n = \frac{n-1}{n^2 + n} \geq 0$, ha $n = 1, 2, \dots$

Sejtés: Ha $n = 1, 2, \dots$, akkor $c_n \geq c_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2 + n} \geq \frac{n}{(n+1)^2 + (n+1)} \Leftrightarrow$

$\frac{n-1}{n^2 + n} \geq \frac{n}{n^2 + 3n + 2} \Leftrightarrow (n-1)(n^2 + 3n + 2) \geq n(n^2 + n) \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \geq 0.$

Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, akkor $n^2 - n - 2 = (n+1)(n-2) \geq 0$ teljesül, amiből a korábbiak szerint az is következik, hogy $c_n \geq c_{n+1}$, ha $n = 2, 3, \dots$, azaz c_n monoton fogyó és a korábbiak szerint pozitív is.

Tehát mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ is teljesül, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ sor Leibniz

típusú és ezért az s összege létezik, valamint az $s \approx s_n$ hibája $H = |s - s_n| \leq c_{n+1}$.

Így a keresett közelítés hibája:

$$H = |s - s_{10}| \leq c_{11} = \frac{11-1}{11^2 + 11} = \frac{10}{132} \leq 0,08.$$

Megjegyzés. $c_n = \frac{n-1}{n^2 + n}$ monoton fogyása könnyen megvizsgálható deriválással.

$f(n) = \frac{n-1}{n^2 + n}, n = 1, 2, \dots \rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x}, x \geq 1. \rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x^2 + x} \right)' = \frac{x^2 + x - (x-1)(2x+1)}{(x^2 + x)^2} = \frac{x^2 + x - (2x^2 - x - 1)}{(x^2 + x)^2} = \\ &= \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2} = \frac{-(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + x)^2} = -\frac{(x-1)^2 - 2}{(x^2 + x)^2} \leq 0, \text{ ha } x \geq 3. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az f függvény monoton fogy a $[3, \infty)$ -en, aminek egyenes

következménye, hogy a $c_n = \frac{n-1}{n^2 + n}, n = 1, 2, \dots$ sorozat is monoton fogy.

9. Abszolút, illetve feltételesen konvergensek-e?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4}$ (9.a)

Mo. I. RÉSZ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$, ahol $c_n = \frac{n+4}{n^2+4} > 0$, $n=1,2,\dots$

Sejtés: c_n monoton fogyó, azaz $c_{n+1} \leq c_n$, $n=1,2,\dots$

Igazoljuk ezt ekvivalens egyenlőtlenségek bevezetésével:

$$\begin{aligned} c_{n+1} \leq c_n, n=1,2,\dots &\Leftrightarrow \frac{(n+1)+4}{(n+1)^2+4} < \frac{n+4}{n^2+4} \Leftrightarrow \frac{n+5}{n^2+2n+5} < \frac{n+4}{n^2+4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n+5)(n^2+4) < (n^2+2n+5)(n+4) \\ &\Leftrightarrow n^3+5n^2+4n+20 < n^3+6n^2+13n+20 \\ &\Leftrightarrow n^2+9n > 0. \end{aligned}$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség igaz és ekvivalens az elsővel, c_n valóban monoton fogyó.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 0.$$

Az eddigiek alapján beláttuk, hogy a sor Leibniz típusú, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4}$ konvergens,

és az $s_n \approx s$ közelítés hibája: $H = |s - s_n| \leq c_{n+1}$.

II. RÉSZ $a_n = \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4}$

$$|a_n| = \frac{n+4}{n^2+4} > 0, \text{ ahol } n=1,2,\dots$$

$$|a_n| = \frac{n+4}{n^2+4} \geq \frac{n}{n^2+4} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n > 0, \text{ ha } n=2,3,\dots$$

Ismeretes, hogy a harmonikus sor divergens, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. A minoráns kritérium

alkalmazásával a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorra az adódik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, tehát az eredeti

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+4)}{n^2+4}$ sor nem abszolút konvergens, de konvergens, vagyis definíció szerint feltételesen konvergens.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$ (9.b)

Mo. I. RÉSZ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n, \text{ ahol } c_n = \frac{1}{n \ln n^2} > 0 \quad (n \geq 2 \rightarrow n^2 \geq 4 \rightarrow \ln n^2 \geq \ln 4 > 0).$$

$$c_n = \frac{1}{n \ln n^2} \text{ monoton fogy, ha } n \geq 2 \text{ és } n \text{ növekszik.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n^2} = 0.$$

Ezek alapján a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$ sor Leibniz típusú, tehát konvergens.

II. RÉSZ

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n \ln n^2} \right| = \frac{1}{n \ln n^2} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x \ln x^2} \text{ az előzőek szerint a } [2, \infty) \text{-en pozitív}$$

és monoton fogyó, így $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^2}$ és $\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x^2} dx$ egyszerre konvergens, illetve divergens.

$$\int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx = \int \frac{1}{2x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \frac{1}{2} \ln(\ln x), \text{ így}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(\ln x) \right]_2^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(\ln x) - \frac{1}{2} \ln(\ln 2) = \infty, \text{ tehát a}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^2} \text{ sor divergens, azaz } \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2} \text{ nem abszolút konvergens.}$$

Ugyanakkor mivel $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n^2}$ konvergens is, tehát feltételesen konvergens.

$$c) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}} \quad (9.c)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8},$$

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8} \right| = \frac{1}{2n^2 - 3n + 8} \leq \frac{1}{2n^2 - 3n}. \text{ Ha } n \text{ elég nagy, akkor } \frac{2n^2}{2} \geq 3n, \text{ és}$$

$$\text{ekkor } 0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{2n^2 - 3n} \leq \frac{1}{2n^2 - \frac{2n^2}{2}} = \frac{1}{n^2}. \left(\frac{2n^2}{2} \geq 3n, \text{ ha } n \geq 3. \right)$$

Mivel $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$, ha $n \geq 3$, továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, így a majoráns kritérium szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \text{ ezért } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8} \text{ abszolút konvergens, tehát nem feltételesen}$$

konvergens, de ugyanakkor konvergens is.

$$d) \quad \boxed{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \dots} \quad (9.d)$$

Mo. Képezzük a tagok abszolút értékeiből álló sort:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} \right).$$

Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sorok konvergenciáját!

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sort. Legyen $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergens.

Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sort. Legyen $b_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $b_n > 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1, \text{ így } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ konvergens.}$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ is konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} \right)$ összegsoruk is az. Mivel az utóbbi összegsor pozitív tagú, ezért egyúttal abszolút konvergens is.

$$e) \boxed{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \dots} \quad (9.e)$$

Mo. Képezzük a tagok abszolút értékeiből álló sort:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{1}{(2n)^2} \right).$$

Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ sorok konvergenciáját!

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ sort. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots$ pozitív tagú sor majorizálható az $\alpha = 3$ indexű, tehát $\alpha > 1$ miatt konvergens hiperharmonikus sorral, vagyis a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ sorral, ezért a majoráns kritérium szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots \text{ konvergens.}$$

Ehhez hasonlóan látható be, hogy konvergens az alábbi sor is:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots. \text{ Mivel } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \text{ is konvergens, a}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} \right)$ összegsorok is konvergens. Minthogy az utóbbi összegsor pozitív tagú, ezért abszolút konvergens is.

Kiegészítés. Igazoljuk a definíció felhasználásával is, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ konvergens,

Tudjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens, azaz létezik az összege, a véges $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Vizsgáljuk $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ konvergenciáját: $s_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} s. \text{ Tehát } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \text{ konvergens.}$$