

További gyakorló példák szélsőértékekre

2021/22. 2. félév

1. Legfeljebb mekkora térfogatú téglatest fér bele az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoidba? (Feltehetjük, hogy a téglatest élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!)

2. Az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ göbnek mely pontja van a legközelebb, illetve legtávolabb a $P(3, 1, -1)$ ponthoz?
3. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis közrezárja az $x^2 + y^2 = 2y$ kört. Hogyan válasszuk meg a -t és b -t, hogy az ellipszis területe minimális legyen?
4. Az $xy^2z^2 = 1$ felület érintősíkjai közül melyik van a legközelebb az origóhoz?
5. Tengerbiológusok megállapították, hogy ha megérzik a vér jelenlétét, cápák abban az irányba kezdenek úszni, amerre a vér koncentrációja a leggyorsabban nő. A víz felszínén a $P(x, y)$ pontban legyen a vér koncentrációja

$$C(x, y) = e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}.$$

Tegyük fel, hogy a cápa az (x_0, y_0) pontban érzékeli először a vér jelenlétét. Írjunk fel egy egyenletet arra nézve, hogy milyen úton fog a cápa úszni.

6. Egy a, b oldalú téglalapot 2 az oldalakkal párhuzamos egyenessel 4 téglalappra vágunk. Vegyük a két kisebb területű téglalap területének négyzetösszegét. Mennyi ennek a minimuma, illetve maximuma?
7. Valamely y fizikai mennyiség feltételezésünk szerint egyenesen arányos egy másik x mennyiséggel, azaz $y = Ax + B$. A két mennyiség értékére n mérést végzünk, azaz rendelkezésünkre állnak az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mérési adatok. Hogyan válasszuk

meg A -t és B -t, hogy az $y = Ax + B$ egyenes a legközelebb fekszen a mért pontokhoz, amin azt értjük, hogy az

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^n (y_i - (Ax_i + B))^2$$

kifejezés minimális legyen? (Ezt hívják legkisebb négyzetek módszerének.)

8. Keressük meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ ellipszis azon pontját, melybe húzott érintő-egyenes a legtávolabb van az origótól!
9. Bizonyítsuk be, hogy, ha $x, y \leq 0$, akkor

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \geq e^{x+y-2}.$$

10. Keressük meg az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalapot! (Feltehetjük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.)