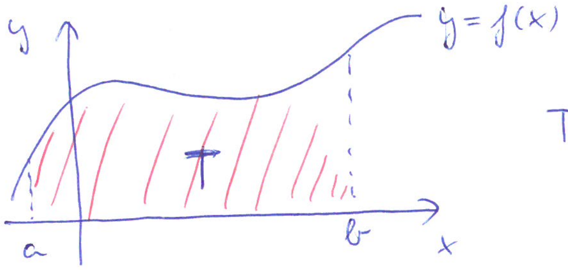
1/

A határozott integrál

Cél: függvény gráfja alatti terület kiszámítása



$T = ?$

Def Az $[a,b]$ intervallum *felosztása* olyan $F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ véges pontsorozat, melyre

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Az F felosztás *finomsága*: $\max\limits_{i \in \{1,2,\dots,n\}} (x_i - x_{i-1})$

Def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos, $F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ $[a,b]$ felosztása

$$\left.\begin{array}{ll} m := \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x), & m_i := \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\[2ex] M := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x), & M_i := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{jól definiáltak} \\ + \text{ végesek} \end{array}$$

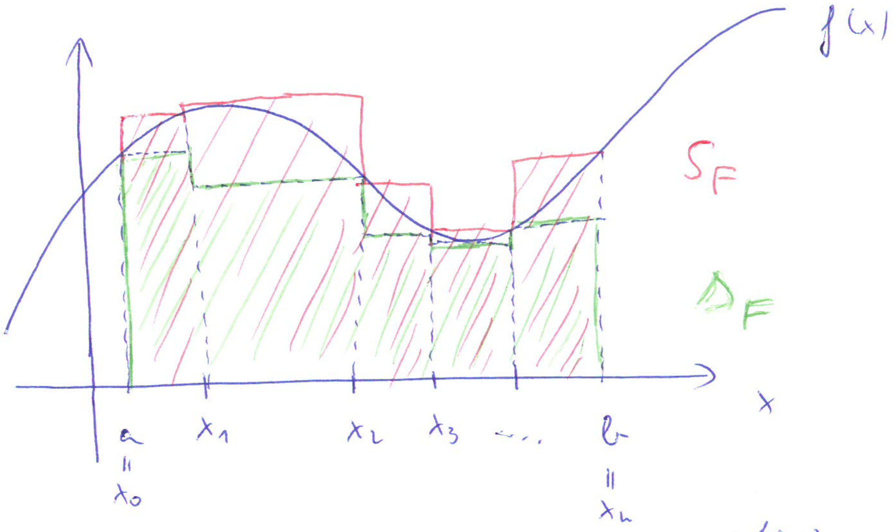
$s_F := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg

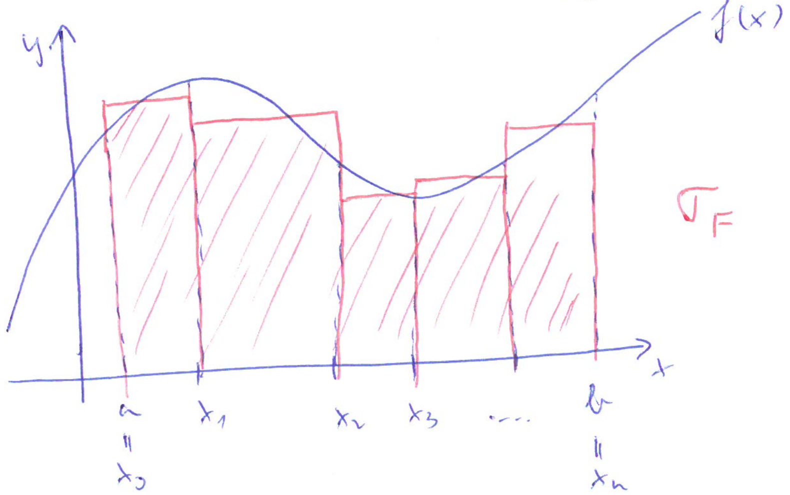
$S_F := \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ Darboux-féle felső integrálközelítő összeg

$\sigma_F := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ Riemann-féle integrálközelítő összeg

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tetszőleges

2/





TÉTEL $\forall$ F felosztásra:

$$m(b-a) \le s_F \le \sigma_F \le S_F \le M(b-a)$$

Biz: $m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M \quad \forall\, i$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{m(b-a)}} = \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{s_F}} \le$$

teleszkóp összeg

$$\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{\sigma_F}} \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{S_F}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$$

teleszkóp

!

3/

Def: F_1, F_2 $[a,b]$ felosztásai. Ha F_1 $\forall$ osztópontja F_2-nek is osztópontja, akkor F_2 az F_1 felosztás finomítása.

TÉTEL: Ha F_2 az F_1 finomítása, akkor $s_{F_1} \le s_{F_2}$ és
$S_{F_2} \le S_{F_1}$.

Biz: $F_1 := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $[a,b]$ felosztása.

Vegyünk hozzá egy extra x^* osztópontot: $x_{k-1} < x^* < x_k$

↳ $s = m_1(x_1-x_0)+\ldots+m_{k-2}(x_{k-1}-x_{k-2}) + m_{k,1}(x^*-x_{k-1}) + m_{k,2}(x_k-x^*) +$

~~$+m_k$~~

$+m_{k+1}(x_{k+1}-x_k)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})$, ahol

$m_{k,1} = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x^*)} f(x)$ $\qquad$ $m_{k,2} = \inf\limits_{x\in[x^*,x_k]} f(x)$

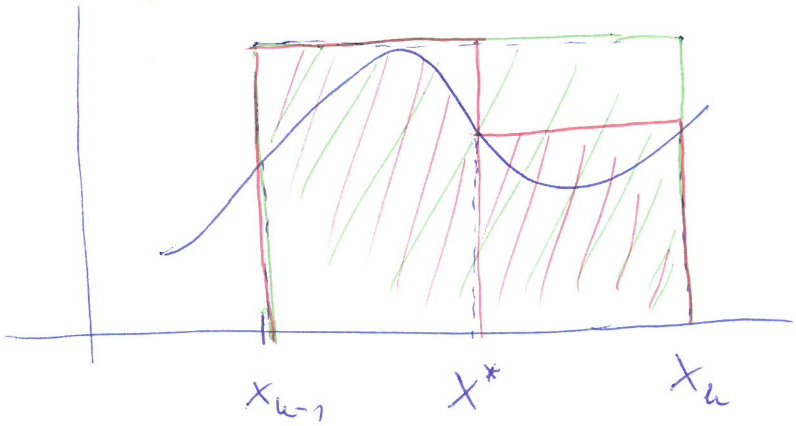
itt $m_k \le m_{k,1}$ és $m_k \le m_{k,2}$

$\Rightarrow$ $m_k(x_k-x_{k-1}) = m_k(x_k-x^*)+m_k(x^*-x_{k-1}) \le m_{k,2}(x_k-x^*)+ m_{k,1}(x^*-x_{k-1})$

↳ $s_{F_1} \le s$ + F_2 megkapható F_1-ből extra pontok hozzáadásával

4/ hasonlóan

S_F-re



!

TÉTEL: $[a,b]$ $\forall$ F_1, F_2 felosztására

$$s_{F_1} \le S_{F_2}$$

Biz Legyen F_3 F_1 és F_2 egyesítése $\Rightarrow$ F_3 F_1 és F_2-nek is a finomítása

előzőekből
$\hookrightarrow$ $s_{F_1} \le s_{F_3} \le S_{F_3} \le S_{F_2}$

!

f korlátos $\Rightarrow$ $\{s_F : F\ [a,b]$ felosztása$\}$
$\{S_F : F\ [a,b]$ felosztása$\}$ korlátos halmazok

$\Downarrow$

Def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv.

$\underline{I} := \sup\{s_F : F\ [a,b]$ felosztása$\}$ Darboux-féle alsó integrál

$\overline{I} := \inf\{S_F : F\ [a,b]$ felosztása$\}$ Darboux-féle felső integrál

$$\Downarrow$$

$$m(b-a) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq M(b-a)$$

<u>Def:</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv <u>Riemann-integrálható</u> $[a,b]$-n, ha

$$\underline{I} = \overline{I}.$$

Ekkor

$$\underline{I} = \overline{I} =: \int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f$$

$\hookrightarrow$ jel: $f \in \mathcal{R}[a,b]$: $[a,b]$-n Riemann-intható fv-ek

<u>Megj:</u> Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nem korlátos $[a,b]$-n vagy

$$\underline{I} < \overline{I} \implies f \text{ nem R-intható } [a,b]\text{-n.}$$

<u>Pél</u>

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Dirichlet-fv}$$

- f korlátos ✓
- $[0,1]$ $\forall F$ felosztásra $s_F = 0$ és $S_F = 1$

$$\Downarrow$$

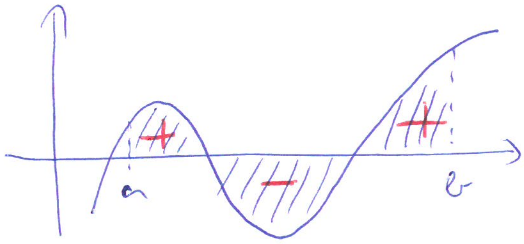
$$\underline{I} = 0 < \overline{I} = 1 \implies f \text{ nem integrálható } [0,1]\text{-n}$$

<u>Def:</u> Tfh $f \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

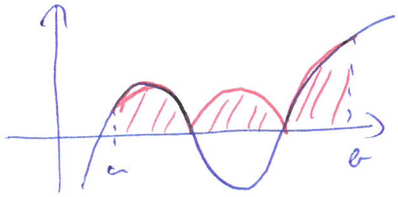
6/

Megj: $\int_a^b f(x)\,dx$ geometriai jelentése = előjeles terület



$\Rightarrow$ Ha az $[a,b]$ intervallumon a függvény és az x tengely közötti valódi terület érdekel:

$$T = \int_a^b |f(x)|\,dx$$



TÉTEL $f, g \in R[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) λf, $f+g$, $f-g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f \,, \quad \int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

2) $[\alpha,\beta] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[\alpha,\beta]$

3) $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

4) $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

5) $|f| \in R[a,b]$ és $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

6) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Biz: Def alapján triviális .!

7/

TÉTEL (Newton–Leibniz formula)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható $[a,b]$-n

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ f primitív fv-e $[a,b]$-n $\left(F'(x)=f(x)\quad \forall x\in[a,b]\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \overset{\text{jel}}{=} \left[F(x)\right]_a^b}$$

Biz.

$B:=(a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b)$ $[a,b]$ felosztása

$\forall k\in\{1,2,\ldots,n\}$-re Lagrange-féle középértéktétel

F-re és $[x_{k-1},x_k]$-ra:

$\exists\ \xi_k\in(x_{k-1},x_k)$, melyre

$$\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = F'(\xi_k) = f(\xi_k)$$

$\hookrightarrow\quad F(x_k)-F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

$$F(b)-F(a) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{teleszkóp}}}{=} [F(x_1)-\underbrace{F(x_0)}_{F(a)}]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots+[\overbrace{F(x_n)}^{F(b)}-F(x_{n-1})] =$$

$$= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) =: \sigma_B$$

(B felosztáshoz tartozó Riemann-közelítő összeg)

8/

<u>Láttuk:</u>

$$s_B \le \sigma_B = F(b) - F(a) \le S_B \qquad \forall B \text{ felosztásra}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{I} \le F(b) - F(a) \le \overline{I}$$

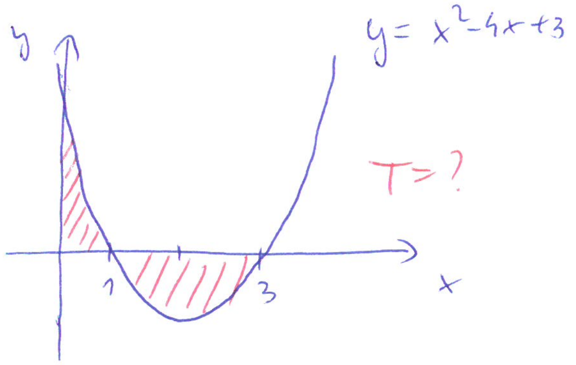
f integrálható $\Rightarrow \underline{I} = \overline{I} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\circ$!

<u>Megj.</u> $\forall$ primitív függvénye működik:

$$\left[F(x) + c\right]_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

<u>Példa:</u> Mennyi az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény görbéje és a tengelyek által közrezárt síkrész területe?



$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$$T = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(\left(\frac{27}{3} - 18 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 + 3\right)\right) = \frac{8}{3}$$

9/

Integrálható függvények

TÉTEL: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz

$\exists\, F$ felosztás, melyre $\underbrace{S_F - s_F}_{\text{oszcillációs összeg}} < \varepsilon$, akkor

f integrálható $[a,b]$-n.

Biz. Tfh $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, F$, hogy $S_F - s_F < \varepsilon$

$$\hookrightarrow \quad \overline{I} \le S_F < s_F + \varepsilon \le \underline{I} + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-ra}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{I} = \underline{I} \qquad \text{!}$$

TÉTEL: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $[a,b]$-n $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$

Biz. Tfh $f \nearrow [a,b]$-n

zárt intervallumon monoton növő fv korlátos $\Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$

$\forall\, x \in (a,b)$

$\forall\, [\alpha,\beta] \subset [a,b]$-re $\quad f(\alpha) := \min\limits_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$

$f(\beta) := \max\limits_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$

10/

Osszuk fel $[a,b]$-t n egyenlő részre!

$\hookrightarrow s_n = f(x_0)(x_1-x_0) + f(x_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$

$= [f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]\,\frac{b-a}{n}$

$S_n = f(x_1)(x_1-x_0) + f(x_2)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n-x_{n-1})$

$= [f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]\,\frac{b-a}{n}$

$\forall\ \varepsilon>0$-ra:

$S_n - s_n = [f(x_n)-f(x_0)]\,\frac{b-a}{n} = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n} < \varepsilon$

$\uparrow$ elég nagy n-re

$\Downarrow$ Tétel

f integrálható

$f\downarrow$-ra ugyanígy.

!

$\boxed{\underline{\text{TÉTEL}}\quad f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ folytonos } [a,b]\text{-n} \Rightarrow f \text{ integrálható } [a,b]\text{-n}}$

__Biz:__ f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow$ f korlátos $[a,b]$-n

$\Downarrow$ Heine-tétel

f egyenletesen folytonos $[a,b]$-n

11)

egyenletes folytonosság $\Rightarrow$ $\forall$ $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ -hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy

$\forall\, x, y \in [a, b]$, $|x-y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Legyen F δ-nál finomabb felosztás: $F = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\max (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

f folytonos $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ f felveszi $[x_{i-1}, x_i]$-n a minimumát valamely ξ_i helyen

— || — a maximumát valamely η_i helyen

azaz: $m_i = f(\xi_i)$, $M_i = f(\eta_i)$

$\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\Rightarrow$ $|\xi_i - \eta_i| < \delta$

$\Downarrow$

$$S_F - s_F = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\eta_i) - f(\xi_i) \right) (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\eta_i) - f(\xi_i)| (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{\text{teleszkóp}} = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

$\Downarrow$ Tétel

f integrálható!

12/ ~~Megj A folytonosság~~

Def. $f \in R[a,b]$

$$I(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

az f függvény integrálfüggvénye.

TÉTEL (Az integrálfüggvény tulajdonságai)

$f \in R[a,b]$. Ekkor az $I(x)$ integrálfüggvényre:

(i) $I(x)$ mindenütt folytonos, sőt Lipschitz-tulajdonságú $[a,b]$-ben

(ii) Ha $x_0 \in [a,b]$-ben f folytonos, akkor $I(x)$ diff.ható x_0-ban

és $I'(x_0) = f(x_0)$

(iii) Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor I diff.ható $[a,b]$-ben

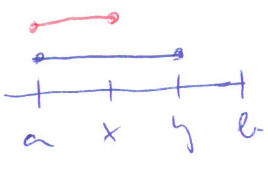
és $I' = f$.

Biz.

(i) Legyen $|f(x)| \leq K \quad \forall\, x \in [a,b]$ (hiszen f korlátos)

$a \leq x < y \leq b$ esetén

$$I(y) - I(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$



13)

Mivel $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b K\,dx = K\int_a^b dx = K(b-a)$

$\Downarrow$

$$|I(y)-I(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le K|y-x|$$

↳ Lipschitz ✓

(ii) $$I(x)-I(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

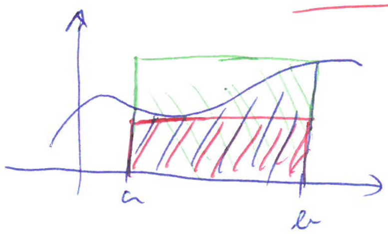
↳ $$\frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

f folytonos x_0-ban $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0)-\varepsilon < f(t) < f(x_0)+\varepsilon \quad \text{, ha } |t-x_0| < \delta$$

Megj (integrálszámítás középértéktétele:

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$



$\Downarrow$

• ha $x_0 < x < x_0+\delta$

↳ $$\cancel{(f_0-\varepsilon)}\ (f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0) \le \int_{x_0}^x f(t)\,dt \le (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$$

$x-x_0>0$

14/ $\Rightarrow$

$$f(x_0)-\varepsilon \leq \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)+\varepsilon$$

∘ ha $x_0-\delta < x < x_0$

$$\hookrightarrow \left(f(x_0)-\varepsilon\right)(x_0-x) \leq \int_x^{x_0} f(t)\,dt \leq \left(f(x_0)+\varepsilon\right)(x_0-x)$$

$x-x_0<0$

$\hookrightarrow$

$$f(x_0)-\varepsilon \leq \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)+\varepsilon$$

$\Rightarrow$ mindkét esetben:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} = I'(x_0) = f(x_0)$$

(iii) (ii)-ből következik

Köv Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor itt $\exists$ primitív függvénye:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \rightsquigarrow \quad F'(x) = f(x)$$

15/ Már használtuk egy spec esetét:

TÉTEL (Az integrálszámítás középértéktétele)

$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b)$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Biz: $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$ ($\exists$ Weierstrass miatt)

$\hookrightarrow$ $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\Downarrow$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

f folytonos $\Rightarrow$ felvesz bármely értéket m és M között

$$\Downarrow$$

$\exists\ \xi \in [a,b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

!

16)

Példák

(1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x} = ?$$

$\frac{0}{0}$ típus $\rightsquigarrow$ l'Hospital

$$F(x) := \int_0^x \cos t^2 \, dt \quad \rightsquigarrow \quad F'(x) = \cos x^2$$

$\cos t^2$ mindenütt folytonos

$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x} \underset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{1} = \cos 0^2 = \underline{\underline{1}}$$

(2) $$H(x) := \int_{x^2}^{x^3} \sin t^2 \, dt \quad \Rightarrow \quad H'(x) = ?$$

$$F(x) := \int_0^x \sin t^2 \, dt \quad \rightsquigarrow \quad F'(x) = \sin x^2$$

$\sin t^2$ folytonos

$$G(x) := \int_0^{x^3} \sin t^2 \, dt = F(x^3) \rightsquigarrow G'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 =$$
$$= \sin (x^3)^2 \cdot 3x^2 =$$
$$= 3x^2 \sin x^6$$

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin t^2 \, dt = \int_0^{x^3} \sin t^2 \, dt - \int_0^{x^2} \sin t^2 \, dt =$$
$$= F(x^3) - F(x^2) \rightsquigarrow H'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 - F'(x^2) \cdot 2x = \underline{\underline{3x^2 \sin x^6 - 2x \sin x^4}}$$

17/

(3)

$$f(x) := \int_0^x \frac{t^2+t-2}{t^2+1}\,dt$$

∃-e f-nek $[0,\sqrt{3}]$-ban lokális szélsőértéke?

$\frac{t^2+t-2}{t^2+1}$ folytonos $\mathbb{R}$-en

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+1} \rightsquigarrow f'(x)=0 \iff x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\Downarrow$$

$x_1=-2$ vagy $x_2=1$

$\Uparrow$

$[0,\sqrt{3}]$

$x_2=1$ -ben lehet szélsőérték

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x-2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+x^2+2x+1-2x^3-2x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(1) = \frac{-1+6+1}{4} = \frac{6}{4} > 0 \implies$$

$x=1$-ben lok MIN

(4) Határozza meg azt a minimális fokszámú p polinomot, melynek 2-ben minimuma, 6-ban maximuma van és! $P(2)=0$, $P(6)=32$.

2-ben és 6-ban zérushely

$$\boxed{P(2)=0} \qquad P'(x) = a(x-2)(x-6) \qquad a \in \mathbb{R} \text{ konstans}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x) := \int_2^x P'(t)\,dt = a\int_2^x (t^2-8t+12)\,dt =$$

$$= a\left[\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 12t\right]_2^x = a\left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x - \frac{32}{3}\right)$$

$$P(6)=32 \implies a=-3 \implies \underline{P(x) = -x^3+12x^2-36x+32}$$

(5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t)\,dt}{x^2} \underset{\substack{\frac{0}{0} \rightsquigarrow \text{l'Hospital} \\ + \ln(1+t) \text{ folytonos}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} \underset{\frac{0}{0} \rightsquigarrow \text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Alkalmazások

I. Numerikus sorok összege – sorozatok határértéke

① $a_n := n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right)$$

$\uparrow$

$\frac{\text{számláló}/n^2}{\text{nevező}/n^2}$

$f:[0,1]\to\mathbb{R} \qquad f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}$

F_n: $[0,1]$ ekvidisztáns felosztása:

$$F_n = \left\{\frac{i}{n} : i=0,1,2,\dots,n\right\} \qquad n=1,2,\dots$$

$\Rightarrow$ $a_n = S(f,F_n)$: f F_n-hez tartozó Riemann-közelítő összege

- F_n egyre finomodó felosztás
- f Riemann-integrálható, $f \downarrow$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S(f,F_n) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}+1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

20/

(2) $$a_n := \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$\lim a_n = ?$

$f(x) := \sin x$, $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$F_n := \left\{ \frac{k\pi}{n} : k = 1, \dots, n-1 \right\}$ $n = 1, 2, \dots$

$\uparrow$

$[0,\pi]$ felosztása ekvidisztáns módon

- f Riemann-int.ható
- $a_n = S(f, F_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = \underline{\underline{2}}$$

(3) $$a_n = \frac{1^{\alpha} + 2^{\alpha} + \dots + n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim a_n = ?$$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$

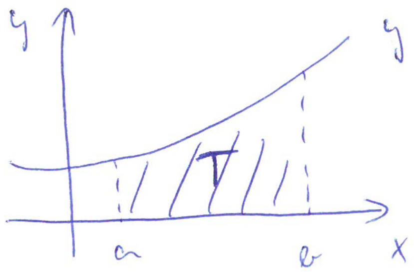
- $F_n = \left\{ \frac{k}{n} : k = 1, \dots, n \right\}$ $[0,1]$ felosztása
- $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^{\alpha} \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{\alpha+1}}}$$

21)

II. Területszámítás

① $y = f(x)$

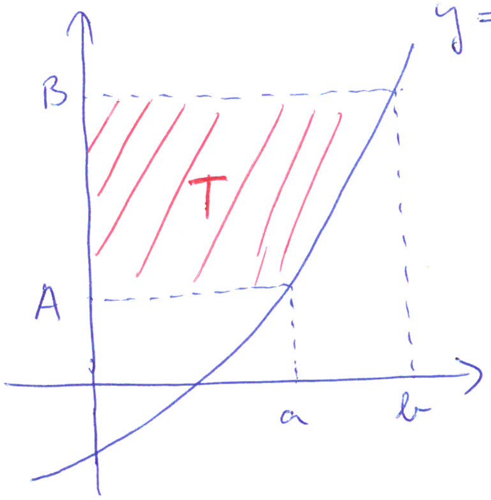


ha $f(x) \geq 0$ $[a, b]$-n

$+ f$ R-itható

$$\Rightarrow \quad T = \int_a^b f(x)\,dx$$

② $y = f(x)$ invertálható



$f(a) = A \quad \rightsquigarrow \quad a = f^{-1}(A)$

$f(b) = B \quad\quad\quad b = f^{-1}(B)$

$$y = y(x) \equiv f(x) \xrightarrow[f \text{ invertálható}]{} x = x(y) = f^{-1}(y)$$

ha $A \leq f(x) \leq B \implies f^{-1}(A) \leq x \leq f^{-1}(B)$

ha $f \uparrow$ mig $\quad (a \leq x \leq b)$

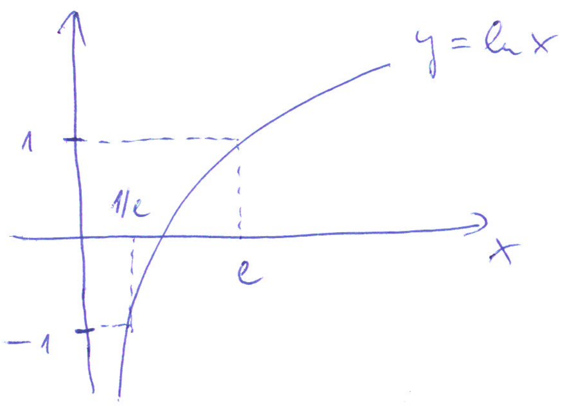
$$\Rightarrow \boxed{T = \int_A^B x(y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_a^b x \cdot f'(x)\,dx}$$

$y := f(x)$ helyettesítés

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \rightsquigarrow dy = f'(x)\,dx$$

22/

Példa 1,



$y = \ln x \rightsquigarrow x = e^y$

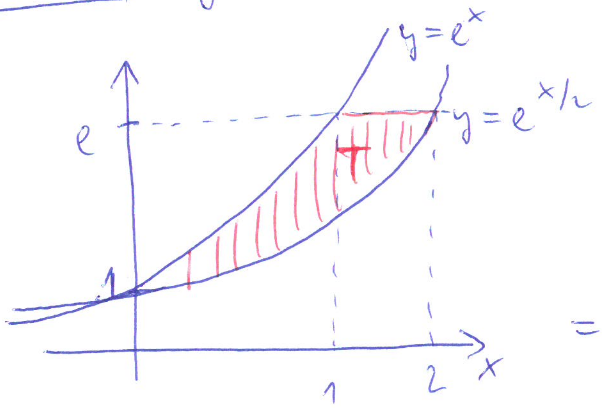
↗ mig

∘ $T = \int_{-1}^{1} e^y \, dy = \left[e^y \right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{e - \frac{1}{e}}}$

2.mo

∘ $T = \int_{1/e}^{e} x (\ln x)' \, dx = \int_{1/e}^{e} x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \int_{1/e}^{e} dx = \left[x \right]_{1/e}^{e} = \underline{\underline{e - \frac{1}{e}}}$

Példa 2, görbék közti terület $T = ?$



$T = \int_0^2 x (e^{x/2})' \, dx - \int_0^1 x (e^x)' \, dx =$ ↑ parciális int

$= \left[x e^{x/2} \right]_0^2 - \int_0^2 e^{x/2} \, dx -$

$- \left[x e^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx =$

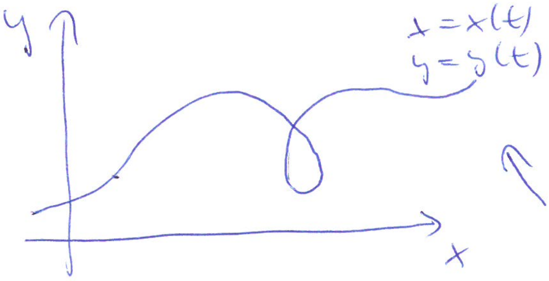
$= 2e - 0 - \underbrace{\left[2 e^{x/2} \right]_0^2}_{2e-2} - (e - 0) + \underbrace{\left[e^x \right]_0^1}_{e-1} = 2e - 2e + 2 - e + e - 1 = \underline{\underline{1}}$

(4) görbe alatti terület paraméteres megadás esetén

t: idő $\rightsquigarrow$ síkbeli részecske mozgása : $x = x(t)$

$y = y(t)$

$\alpha \le t \le \beta$



nem biztos, hogy függvény!

$\Downarrow$

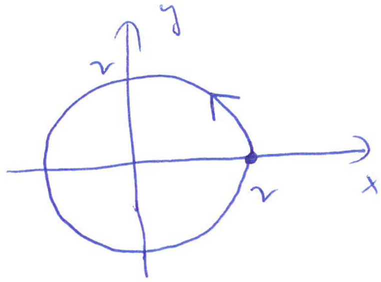
síkgörbe

pl: a) $x = r\cos t$

$y = r\sin t$

$0 \le t \le 2\pi$

$r > 0$



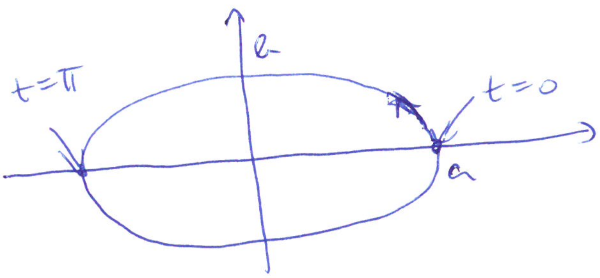
$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t$
$= r^2$

b) $x(t) = a\cos t$ $\quad a, b > 0$

$y(t) = b\sin t$

$0 \le t \le 2\pi$

↳ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$ ellipszis

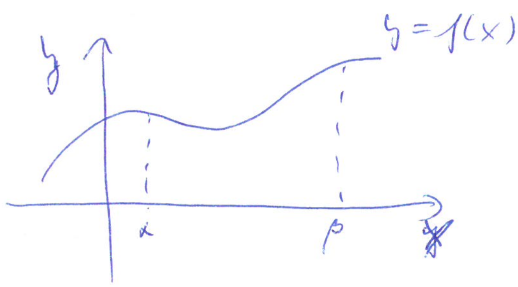


c) $\forall$ függvény megadható így:

$y = f(x) \rightsquigarrow x(t) := t$

$y(t) := f(t)$

$\alpha \le t \le \beta$



24/

Tfh
$x = x(t)$
$y = y(t)$
$\alpha \le t \le \beta$

$a := x(\alpha)$
$b := x(\beta)$
$\Rightarrow a \le x \le b$

$$\boxed{T = \int_a^b y(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_\alpha^\beta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt}$$

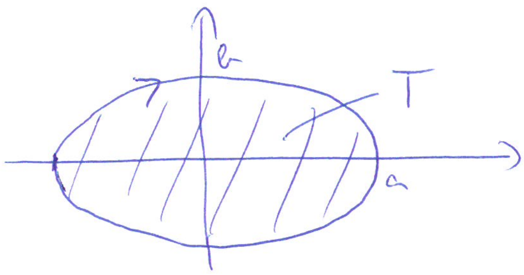
ha $x = x(t) \nearrow$ szig

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \rightsquigarrow dx = \dot{x}(t)\,dt$

$t = t(x) \rightsquigarrow y(x) = y(x(t)) = y(t)$

pl: ellipszis területe

$x(t) = a\cos t$
$y(t) = b\sin t$
$0 \le t \le 2\pi$



$\dot{x}(t) = -a\sin t$

$$\frac{T}{2} = \int_\pi^0 y(t)\,\dot{x}(t)\,dt = \int_\pi^0 b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = -ab\int_\pi^0 \sin^2 t\,dt$$

$$= ab\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{ab}{2}(\pi - 0 - 0 + 0) = \frac{ab\pi}{2}$$

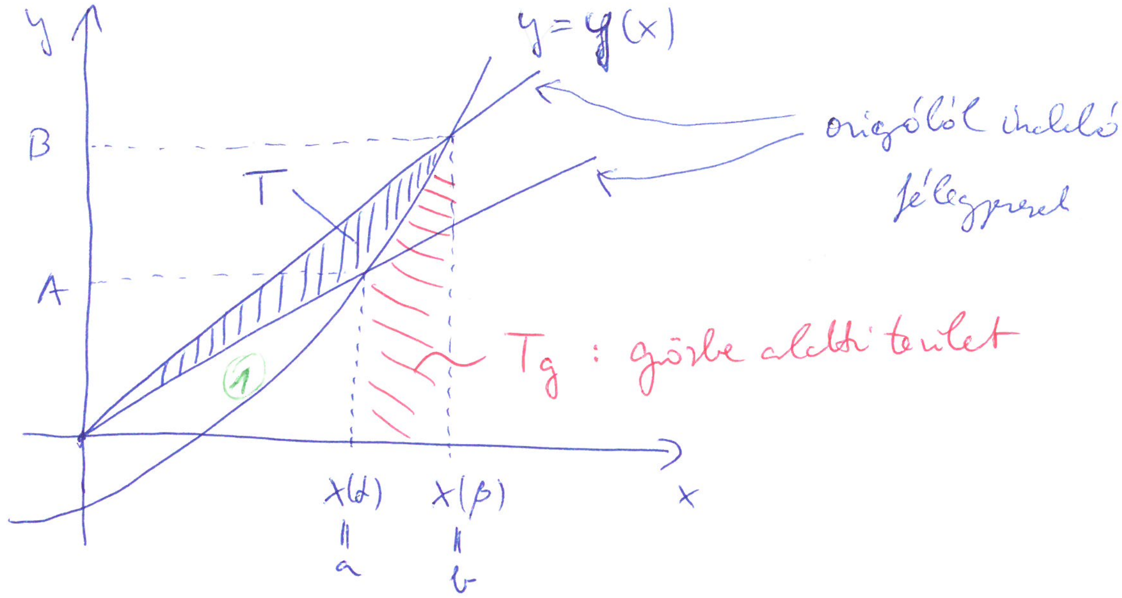
$\Downarrow$

$$\boxed{T = ab\pi}$$

spec: $a = b = r$
$\hookrightarrow T_{kör} = r^2\pi$

(5) Szektorterület

g görbe:
$x = x(t)$
$y = y(t)$
$\alpha \le t \le \beta$



$\Downarrow$

$a \le x(t) \le b$

$$T_g = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parciális int}}}{=} \left[y(t)x(t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \dot{y}(t)\,x(t)\,dt =$$

$$= y(\beta)x(\beta) - y(\alpha)x(\alpha) - \int_\alpha^\beta \dot{y}(t)\,x(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ x(\alpha)=a \quad y(\alpha)=A \\ x(\beta)=b \quad y(\beta)=B}}{=} bB - aA - \int_\alpha^\beta \dot{y}(t)\,x(t)\,dt$$

álhálból:

$$T + T_g + \underbrace{\frac{a \cdot A}{2}}_{(1)\ \triangle} = \underbrace{\frac{b\,B}{2}}_{\text{nagy } \triangle \text{ területe}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{bB}{2} - \frac{aA}{2} - T_g \quad = \boxed{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\dot{y}(t)\,x(t) - \dot{x}(t)\,y(t)\right)dt}$$

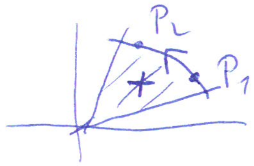
T_g-re 2 kifejezésünk van:

$$\left.\begin{aligned} T_g &= \int_\alpha^\beta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt \\ T_g &= bB - aA - \int_\alpha^\beta \dot{y}(t)\,x(t)\,dt \end{aligned}\right\} \quad T_g = \frac{bB - aA}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(y(t)\,\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\,x(t)\right)dt$$

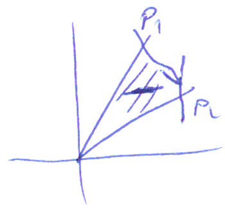
$\Longrightarrow$ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ $\qquad$ $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ $\qquad$ görbi szektorterület:

$$T = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\right) dt$$

megj: előjeles terület: $T > 0$, ha $P_1 \to P_2$ pozitív irányítású



$T < 0$, ha $P_1 \to P_2$ negatív irányítású

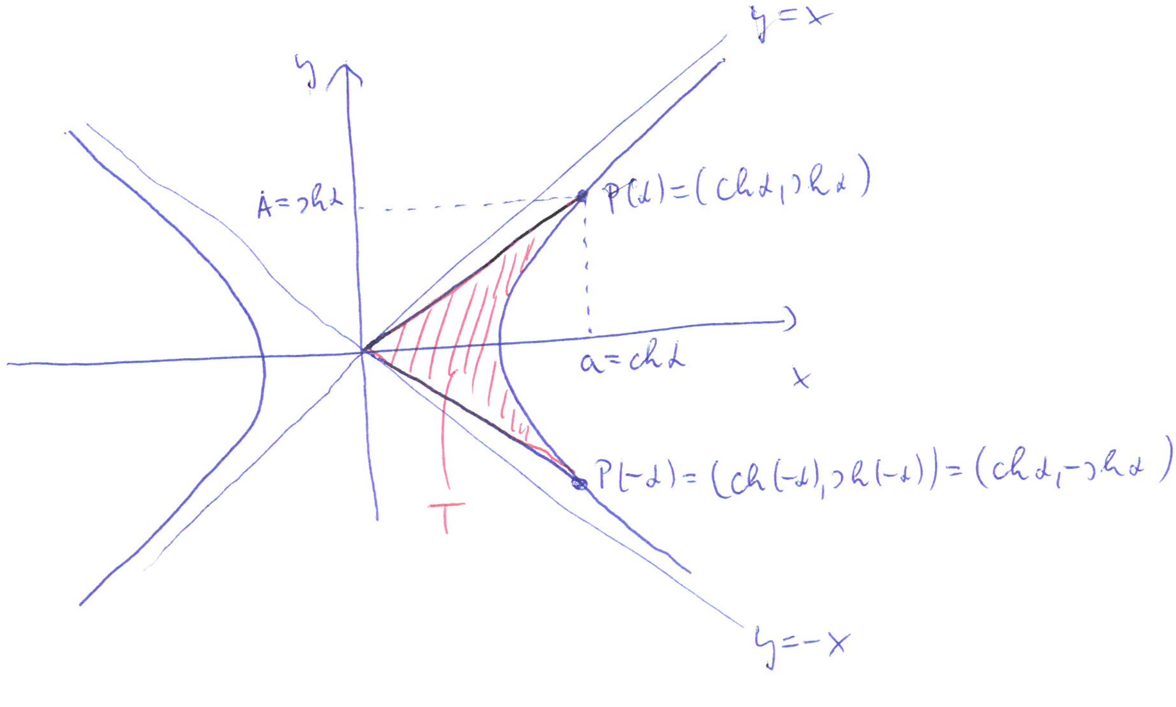


Példa

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} t \\ y &= \operatorname{sh} t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

↳ egyenlő oldalú hiperbola

$-\alpha \le t \le \alpha$ szektorának területe?



$$x(t) = \operatorname{ch} t \rightsquigarrow \dot{x}(t) = \operatorname{sh} t$$

$$y(t) = \operatorname{sh} t \rightsquigarrow \dot{y}(t) = \operatorname{ch} t$$

$$\hookrightarrow \quad x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} 1\, dt = \frac{1}{2}\big[t\big]_{-\alpha}^{\alpha} = \underline{\underline{\alpha}}$$

de $\quad a = \operatorname{ch}\alpha \rightarrow \alpha = \operatorname{arch} a$

$\quad A = \operatorname{sh}\alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arsh} A$

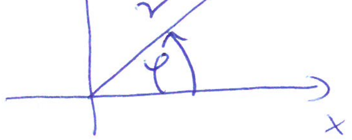
$$\Rightarrow \quad T = \alpha = \operatorname{arch} a = \operatorname{arsh} A$$

$$\Downarrow$$

ez az elnevezés oka: area = terület

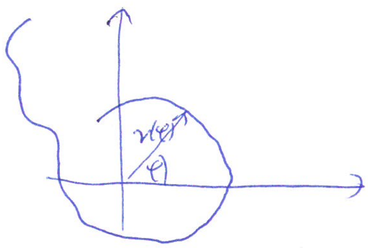
⑥ területszámítás polárkoordinátás megadás esetén

polárkoordináták (r, φ)



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



görbe polárkoordinátás megadása: $\quad r = r(\varphi)$

$$\Downarrow$$

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

28)

φ változó $\to$ paraméteres megadás

$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(\varphi) = \frac{dx}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$

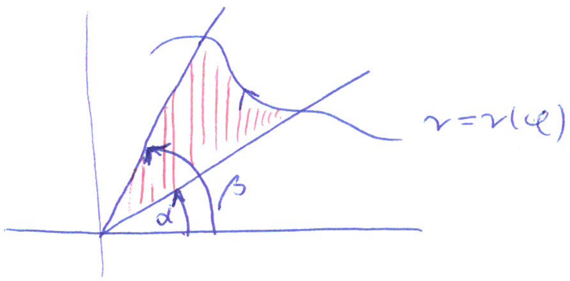
$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \quad \quad \dot{y}(\varphi) = \frac{dy}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$

$\Downarrow$

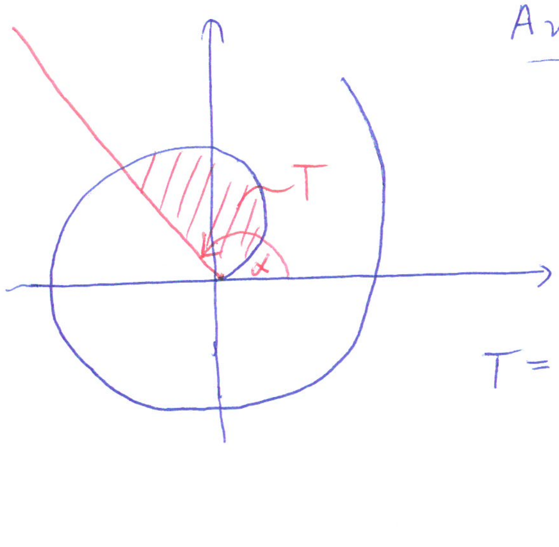
$$x\dot{y} - \dot{x}y = r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi) - r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$= r\dot{r}(\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) + r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \underline{\underline{r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi}$$



Példa $\quad r = c\varphi \quad c > 0$



Arkhimédeszi-spirális

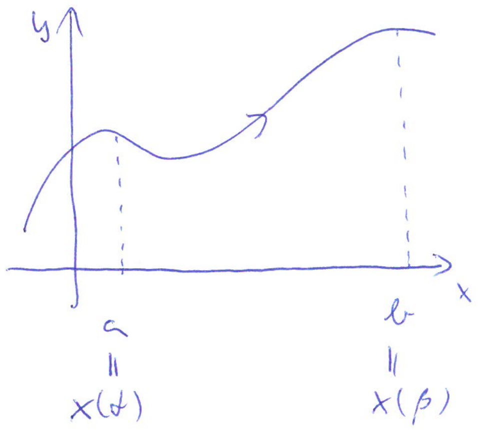
$(0,\alpha)$ közé eső szektorterület?

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\alpha c^2\varphi^2\,d\varphi = \frac{c^2}{2}\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^\alpha =$$

$$= \underline{\underline{\frac{c^2\alpha^3}{6}}}$$

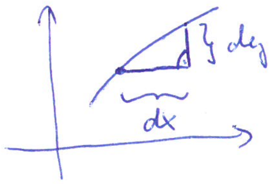
III. Ívhossz

1) paraméteres görbe ívhossza

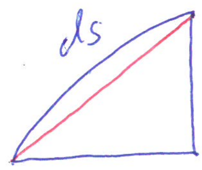


$x = x(t)$
$y = y(t)$

$\alpha \le t \le \beta$



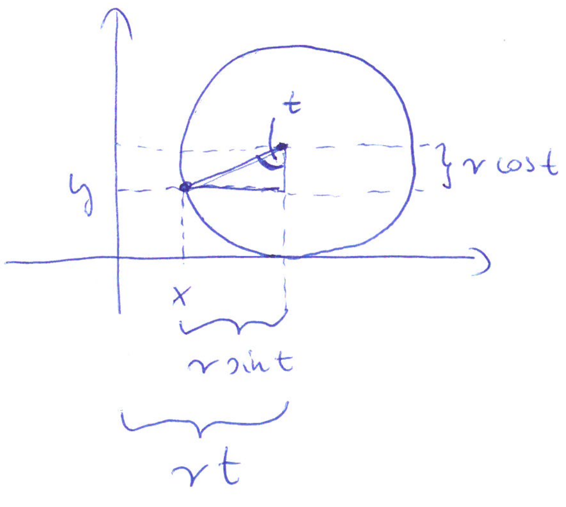
$dx = \dot{x}(t)\,dt$
$dy = \dot{y}(t)\,dt$



$$ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt}$$

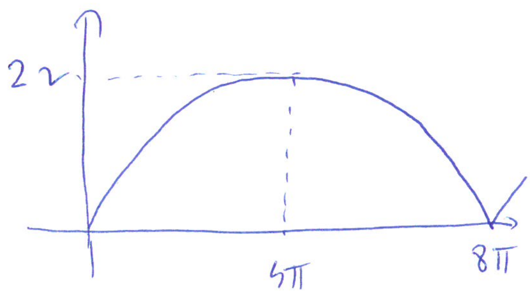
Példa ciklois = csúszás nélkül gördülő kör egy pontjának pályája



$x = rt - r\sin t = r(t - \sin t)$
$y = r - r\cos t = r(1 - \cos t)$

$0 \le t \le 2\pi$

$\Downarrow$



30/ Mekkora utat fut be egy körbe pördülés alatt a henget egy pontja? $\rightsquigarrow$ <u>ívhossz</u>

$$x(t) = r(t - \sin t) \quad \rightsquigarrow \quad \dot{x}(t) = r(1 - \cos t)$$
$$y(t) = r(1 - \cos t) \qquad\qquad \dot{y}(t) = r \sin t$$

$$\hookrightarrow \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t = r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= 2r^2(1-\cos t) = 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2r \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \frac{t}{2}}_{\geq 0} \, dt =$$

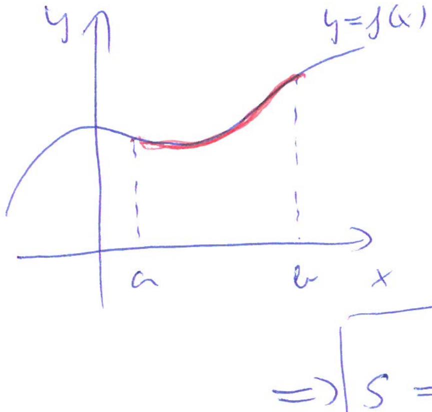
(ha $0 \leq t \leq 2\pi$)

$$= 2r \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= -4r \left(\underbrace{\cos \pi - \cos 0}_{-2} \right) = \underline{\underline{8r}}$$

(2) <u>Spec</u> $y = f(x) \rightsquigarrow x(t) = t \qquad a \leq x \leq b$

$$y(t) = f(t) \qquad \Updownarrow$$
$$a \leq t \leq b$$



$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = 1$$
$$\dot{y}(t) = f'(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Példa $y = \mathrm{ch}\, x$ ívhossza $a \le x \le b$ között

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}\, dx = \int_a^b \mathrm{ch}\, x\, dx = [\mathrm{sh}\, x]_a^b = \underline{\underline{\mathrm{sh}\, b - \mathrm{sh}\, a}}$$

$(\mathrm{ch}' x) = \mathrm{sh}\, x$

③ ívhossz polárkoordinátás megadás esetén

$$r = r(\varphi) \rightsquigarrow \begin{array}{l} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{array} \qquad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$\dot{x}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$$

$$\dot{y}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

$$\hookrightarrow [\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2 = \dots = [\dot{r}(\varphi)]^2 + r^2(\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\, d\varphi}$$

Pl. $r = c\varphi$ $c>0$ Arkhimédeszi-spirális ívhossza $0 \le \varphi \le \alpha$ esetén

$\Downarrow$

$\dot{r}(\varphi) = c$

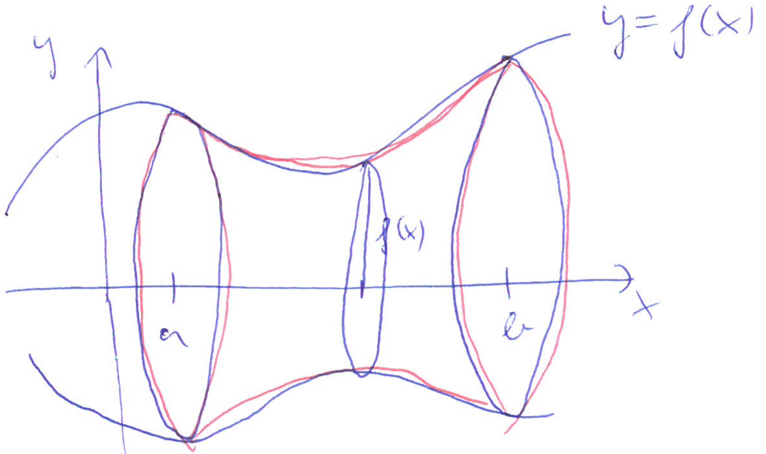
$$S = \int_0^\alpha \sqrt{c^2 + c^2\varphi^2}\, d\varphi = c\int_0^\alpha \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \dots = \underline{\frac{c}{2}\left[\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)\right]}$$

$\varphi = \mathrm{sh}\, t$ $\quad t = \mathrm{arsh}\, \varphi$

$d\varphi = \mathrm{ch}\, t\, dt$

IV. Forgástestek térfogata

① x tengely körüli forgatás esetén: $\longrightarrow V_x$



x helyen f(x) sugarú körlap

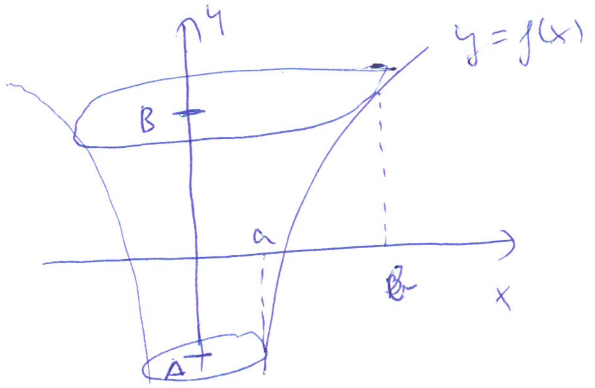
$\Downarrow$

dx vastagságú henger térfogata

$f(x)^2\pi \cdot dx$

$$\boxed{V_x(a,b) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx}$$

② y tengely körüli forgatás esetén $\longrightarrow V_y$



$y = y(x)$ ha invertálható

$\Downarrow$

$x = x(y)$

$$V_y(A,B) = \pi \int_A^B x(y)^2 \, dy$$

de $y = y(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'(x)\,dx$

$A \le y \le B \iff a \le x \le b$

$$\Rightarrow \boxed{V_y(a,b) = \pi \int_a^b x^2 y'(x)\,dx = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\,dx}$$