

MINTA VIZSGADOLGOZAT - Gyakorlati rész

Kalkulus 1.
MATEMATIKA BSc

2021. december 20.
Munkaidő: 100 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név: _____

Neptun kód: _____

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

1. (4 × 5 pont) Adja meg az alábbi függvények deriváltját, mindenütt, ahol létezik!

(a)

$$f : (0, \frac{\pi}{7}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[2x]{\sin 7x + e^{2x}}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\ln x^2} \operatorname{ch} x}{e^{\cos^2 x^3}}, \quad x \neq 0$$

(d)

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{e^t + 2} dt.$$

2. (20 pont) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$$

függvényen.

(Teljes függvényvizsgálatnál vizsgálja meg a függvényt az alábbi szempontok szerint: értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás, periódikusság, határérték a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a \mathcal{D}_f halmaz határpontjaiban, szakadási helyek osztályozása, aszimptoták. Foglalja táblázatba, hogy hol monoton növekvő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőérték, és az milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete, vázolja a függvény menetét.)

3. (10 pont) Bizonyítsa be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mindenütt deriválható függvényre fennáll, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2,$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $f(x) = c$, valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

4. (5 × 7 pont) Határozza meg az alábbi határozatlan- illetve határozott integrálok értékét!

(a)

$$I_1 = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$$

(b)

$$I_2 = \int \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} dx$$

(Javasolt helyettesítés: $t = \operatorname{tg} x$.)

(c)

$$I_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(Javasolt helyettesítés: $x = \sin t$.)

(d)

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x}} dx$$

(e)

$$I_5 = \int x^3 \ln x dx$$

5. (15 pont) Határozza meg az $y = -x^2 + 2x + 1$ parabola és az $y = x - 1$ egyenes által közrezárt terület nagyságát!