

Kalkulus 1, 10. Feladatsor

2022/23. 1. félév

Függvény határértéke

1. Bizonyítsuk be definíció alapján a következőket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-16}{x^2-4x} = 2$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$

2. Számoljuk ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-2} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1 - 5x}{x^2+x^5}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$

- (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\sin x}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 3\pi x}$

3. Előadáson bizonyítjuk, így használható (persze nem muszáj!):
 Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$, és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x) - 1) = b$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^b.$$

Itt x_0 véges, vagy $\pm\infty$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x} - x)^{1/x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x^{\tan x}$

4. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f, g : H \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ legyen torlódási pontja H -nak. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) ha f határértéke létezik x_0 -ban és g -nek nem, akkor $f + g$ -nek sem létezik határértéke x_0 -ban.
- (b) ha f határértéke x_0 -ban 0 és g korlátos x_0 egy környezetében, akkor $f \cdot g$ -nek 0 a határértéke x_0 -ban.

5. Legyen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \text{ és } x = \frac{m}{n} \end{cases},$$

ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, és m és n relatív prímek, azaz f az előadáson megismert *Riemann-függvény*. Továbbá legyen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ \frac{1}{f(x)}, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy g minden pont bármely környezetében nem korlátos.

Függvények folytonossága

1. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket! (Szakadási helyek vizsgálata.)

$$(a) f(x) = \frac{3(1-x^2)+|1-x^2|}{2(1-x^2)-|1-x^2|}$$

$$(b) f(x) = 3 + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$$

$$(e) f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$$

2. Határozzuk meg, ha lehetséges, a paramétereket úgy, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x \leq 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

3. Adjuk meg az alábbi függvények lineáris aszimptotáit!

$$(a) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$$

$$(c) f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$$