

Kalkulus 1, 13-14. Feladatsor

2022/23. 1. félév

1. Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

- (a) $\int \frac{x^2-7x+8}{x^2} dx$
- (b) $\int \frac{x^6}{x^2+1} dx$
- (c) $\int \left(\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
- (d) $\int \frac{-2}{5x^2+5} dx$
- (e) $\int \frac{2x+3}{x-2} dx$
- (f) $\int \frac{1-e^x}{1+e^{x/2}} dx$
- (g) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}} dx$
- (h) $\int e^{3x} \operatorname{sh} 5x dx$
- (i) $\int \frac{1}{3x^2+6} dx$
- (j) $\int \sqrt{3x-1} dx$
- (k) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}} dx$

2. Teljes négyzetté alakítással alapintegrálokra visszavezethető feladatok

- (a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$
- (b) $\int \frac{dx}{x^2-6x+1}$
- (c) $\int \frac{dx}{2x^2-12x+23}$
- (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+40}}$
- (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

3. Trigonometrikus szorzat integrálok

(a) $\int \cos^4 x \, dx$

(b) $\int \sin^2(1 - 2x) \, dx$

(c) $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$

4. $\int f'(x)f^\alpha(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ **típus**

(a) $\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x+10)^7}} \, dx$

(b) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(c) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

(d) $\int \cos^5 x \, dx$

(e) $\int \sin^3 x \, dx$

(f) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$

(g) $\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt[3]{\operatorname{sh} x}} \, dx$

(h) $\frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} \, dx$

(i) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} \, dx$

5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$ **típus**

(a) $\int \frac{5x^2}{5-4x^3} \, dx$

(b) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

(c) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

(d) $\int \frac{9x^2}{4x^3+5} \, dx$

(e) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6} \, dx$

(f) $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\operatorname{arctg} x}} \, dx$

6. Ha $F'(x) = f(x)$, akkor $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$. Feladatok erre a típusra:

(a) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx$

(b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx$

(c) $\int x \sin x^2 \, dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

$$(e) \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$$

7. Parciális integrálás

$$(a) \int x^2 \sin 2x dx$$

$$(b) \int e^{2x} \cos 3x dx$$

$$(c) \int e^x \sin^2 x dx$$

$$(d) \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$(e) \int x \operatorname{arctg} x dx$$

$$(f) \int \arcsin x dx$$

$$(g) \int \ln^3 x dx$$

$$(h) \int x \operatorname{sh} x dx$$

$$(i) \int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$$

$$(j) \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$(k) \int \cos x \operatorname{sh} x dx$$

$$(l) \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$$

8. Helyettesítéses integrálás

$$(a) \int \sqrt{5+3x^2} dx$$

$$(b) \int \sqrt{(x^2-1)^3} dx$$

$$(c) \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$(d) \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[4]{x}}}$$

$$(f) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

9. Racionális törtfüggvények, illetve arra vezető helyettesítések

$$(a) \int \frac{1}{x^2-2x+3} dx$$

$$(b) \int \frac{1}{x^4-x^2} dx$$

$$(c) \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$$

$$(d) \int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$$

- (e) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$
 (f) $\int \frac{6 dx}{e^x - 3}$
 (g) $\int \frac{4 dx}{e^{2x} - 4}$
 (h) $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$
 (i) $\int x\sqrt{5x + 3} dx$

Határozott integrál alkalmazásai

1. Az integrálfüggvény alkalmazásai

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \arcsin t dt}{x} = ?$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = ?$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = ?$$

(d)
$$\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \ln(1+t) dt = ?, \quad (x > 0)$$

(e)
$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = ?$$

2. Végtelen sorösszegek kiszámítása

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = ?$$

(b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = ?$$

(c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = ?, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

3. Határozzuk meg az alábbi görbék által bezárt korlátos térrész területét!

(a) $y = x^2, y = 1 - x^2$

(b) $y = \frac{4}{3x}, y = \frac{13}{3} - x$

(c) $y^2 = x + 3, y = \frac{x}{2}$

(d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x + y = 1$

(e) $y = \ln x, y = \ln^2 x$