Kalkulus 1
4. Feladatsor

2022/23. I. félév

I. Valós számok

1. Tekintsük a következő 2 elemű halmazt: $R = \{0, 1\}$, melyet ellátunk a következő operációkkal:

   (a) Összeadás $(+)$: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$ és $1 + 1 = 0$.

   (b) Szorzás $(\cdot)$: $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ és $1 \cdot 1 = 1$.

   (c) Rendezés: $0 \geq 0$, $1 \geq 1$ és $1 \geq 0$.

   A valós számok melyik axiómája nem teljesül erre az R halmazra?

2. Vezessük le az axiómákból, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x, y \neq 0$, akkor $xy \neq 0$.

3. Legyen a egy pozitív egész, melyre $\alpha := \sqrt{a}$ irracionális. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik $c > 0$, hogy minden p, q egész $(q > 0)$ esetén
$$|q\alpha - p| > \frac{c}{q}.$$

4. Legyen w egy irracionális szám. Mutassuk meg, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik y irracionális szám, melyre $|y - w| < \varepsilon$.

5. Legyen z egy tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy létezik n egész, melyre $n \leq z < n + 1$. Ezt az n számot szokás z (alsó) egész részének hívni (jel: $[z] = n$).

6. Mutassuk meg, hogy minden $a \geq 0$ valós számnak létezik négyzetgyöke.

7. Legyen $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Írjuk fel, $r = \frac{a}{b}$ alakban, ahol, $a, b \geq 1$ és relatív prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik $n \geq 1$ természetes szám, melyre

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{n}.$$

Ennek segítségével mutassuk meg, hogy léteznek $n_1, n_2, \cdots, n_k$ természetes számok, hogy

$$r = \frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}.$$

II. Néhány további egyenlőtlenség

1. Bizonyítsuk be a **Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget**, azaz ha n egy természetes szám és $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, ha $i = 1, 2, \cdots, n$, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

2. Bizonyítsuk be a **Minkowski-egyenlőtlenséget**, azaz ha n egy természetes szám és $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, ha $i = 1, 2, \cdots, n$, akkor

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Legyen n egy természetes szám, és $a_i \in \mathbb{R}$, ha $i = 1, 2, \cdots, n$. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

4. Igazoljuk, hogy az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ számokra teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!

(a)
$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

(b)
$$6 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

(c)
$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(d) Ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, akkor

$$a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$$

.

(e)

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2.$$

Hogyan lehetne általánosítani az egyenlőtlenséget?