

Kalkulus 1

6. feladatsor

2022/23. I. félév

Numerikus sorozatok határértéke I.

1. Tetszőleges α, A, B valós számokból kiindulva, képezzük a következő rekurzív sorozatot:

$$a_1 := \alpha, \quad a_{n+1} := Aa_n + B, \quad (\text{ha } n \geq 1).$$

Adjuk meg az α, A, B és az n számok függvényeként a sorozat n -dik tagját! (Ha $A = 1$, akkor (a_n) számtani, ha $B = 0$, akkor (a_n) mértani sorozat.)

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy az (a_n) sorozat nem konvergens! Mutassuk meg ez alapján, hogy a $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem konvergens!
3. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 - 17n + 2} = -\frac{1}{5}.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{n + 7} = +\infty.$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2 - 3n^3}{n^2 + 3n + 7} = -\infty.$$

4. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens sorozat minden tagja pozitív és a határértéke A . Mutassuk meg, hogy

(a) $A \geq 0$.

(b) az $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

5. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \frac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^3+2}$, $b_n = \frac{3n^5-7 \cdot 10^{23}n^3}{10^{-38}n^6-67n^2+9n}$, $c_n = \frac{-n^7+n^6-3}{n^5-n^2+4}$

(b) $a_n = \frac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-n+5}$, $b_n = \frac{(2n^3+3)^2}{(3n+6)^6}$

(c) $a_n = \frac{(n+1)!}{(3-2n)n!}$, $b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$, $c_n = \frac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$

(d) $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n}$, $b_n = \sqrt[3]{n^3 - 3n + 8} - \sqrt[3]{n^3 + n + 1}$,
 $c_n = \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 3n + 5}}$

(e) $a_n = \frac{3^{2n}}{(-3)^{n+10^n}}$, $b_n = \frac{3^{2n}}{3^n + 9^n}$, $c_n = \frac{9^n}{3^n + 2^n}$

(f) $a_n = \frac{4^{n-1} + n^5 3^{n+2}}{2^{2n+3} + 2^{n-2}}$, $b_n = \frac{n^3 2^{n+3n}}{2^{2n} - 3n^2}$

(g) $a_n = \sqrt[3]{3n}$, $b_n = \sqrt[3]{3n}$, $c_n = \sqrt[3]{n}$, $d_n = \sqrt[5]{3n}$

(h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3}$, $b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+6}{3n^2+2n}}$, $c_n = \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n-5}{n^3+6n^2-n}}$.

(i) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$

(j) $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

(k) $a_n = \left(0.9 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$

(l) $a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$

(m) $a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$

(n) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(o) $a_n = \frac{(n^2-2n+1)^{3n^2-6n+5} + \sqrt{n^4-n^2+6} - \sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$

(p) $a_n = n^2(\sqrt{3n^4 + 2n - 1} - \sqrt{3n^4 + n^2 - n})\left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2}$

(q) $a_n = \left(\frac{(n+3)!}{n!n^3}\right)^{n-1}$

(r) $a_n = \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2}$

(s) $a_n = n^2 \sin \frac{5}{n^2+1}$

(t) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$.

(u) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + 1/n) = 1$

6. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

(a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

(c) $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})$

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} + 2^n}$

(e) $a_n = \frac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1} (2+1/n)^n}$