Kalkulus 1
7. feladatsor

2022/23. I. félév

Numerikus sorozatok határértéke II.

1. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két valós sorozat, melyre $a_n \leq 0 \leq b_n$ minden n-re és legyen $c_n = a_n - b_n$. Mutassuk meg, hogy ha (c_n) egy nullsorozat (azaz egy 0-hoz tartó sorozat), akkor (a_n) és (b_n) is nullsorozat!

2. Határozzuk meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2}) = 1$$

legyen.

3. Legyen $a \geq 0$ és $b \geq 0$ két rögzített valós szám. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

   (a) $(\sqrt[n]{a^n + b^n})$.

   (b) $(\sqrt[n]{|a^n - b^n|})$.

   Amennyiben konvergensek, mi lesz a határértékük?

4. Legyenek α és β valós számok, melyekre $|\alpha| \neq |\beta|$ és legyen

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n + \beta^n}.$$

Disszkutáljuk, hogy mikor lesz az (a_n) sorozat konvergens illetve divergens!

5. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív valós számok. Számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$$

határértéket!
(*Útmutatás:* Feltehető, hogy $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Adjunk a_1 segítségével becslést a fenti kifejezésre!)

6. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy adott valós sorozat és

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha (a_n) monoton növő, akkor (A_n) is monoton növő.

(b) ha (a_n) monoton csökkenő, akkor (A_n) is monoton csökkenő.

(c) ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$.

(d) ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$.

(e) Mutassunk olyan példát, hogy az (a_n) sorozat divergál, de az (A_n) sorozat konvergens.

7. A fenti módszert **Cesaro-féle átlagolási eljárásnak** is hívják. Alkalmazásként mutassuk meg, hogy ha (a_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = A$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

8. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat és

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha (a_n) konvergens, akkor (G_n) is konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} G_n$.

(b) ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} G_n = +\infty$.

9. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat és

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha (a_n) konvergens, akkor (H_n) is konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} H_n$.

(b) ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

10. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat. Legyen

$$b_1 := a_1, \quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq 1), \quad \text{és} \quad c_n := \sqrt[n]{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha (b_n) konvergens, akkor (c_n) is konvergens és $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) ha $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

(c) Mutassunk olyan (a_n) sorozatot, melyre (c_n) konvergens, de (b_n) divergens.

(*Útmutatás:* Használjuk az előző feladat eredményét!)

11. Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

12. A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, ahol

(a)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

(b)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(c)

$$a_n = b_0 + b_1 q + \cdots + b_n q^n,$$

ahol $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ és $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ egy korlátos valós számsorozat.

13. Legyen $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mutassuk meg, hogy ha $a_n \leq b_n$ majdnem minden n-re és a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$, akkor a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
(*Útmutatás:* Használjuk a Cauchy-kritériumot!)

14. Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = 0$, akkor a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

15. A monotonitás illetve a korlátosság vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek-e, ahol

    (a)
    $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1/2)^k}{k^2}.$$

    (b)
    $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1,1)^{-k}}{\sqrt{k}}.$$

    (c)
    $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{k+1}.$$

16. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, ahol $\alpha < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

17. A fenti feladat alkalmazásaként mit mondhatunk az alaábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok határértékeiről, ahol

    (a)
    $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

    (b)
    $$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített.}$$

    (c)
    $$a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

Rekurzív sorozatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurziv sorozatokat konvergencia szempontjából és adjuk meg a határértéket, amennyiben létezik!

    (a) $a_1 = 6$, $a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

    (b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$, ha $n \geq 2$.

    (c) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

    (d) $a_1 = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

(e) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$, ha $n \geq 2$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + \alpha}{2}, \quad (n \geq 2)$$

formulákkal megadott rekurziv sorozat konvergens.

3. Milyen $\alpha > 0$ értékek esetén lesznek az alábbi rekurziv sorozatok konvergensek? Adjuk meg a határértéküket is!

(a) $a_1 = \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}, \quad (n \geq 2)$.

(b) $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{2\alpha a_n}{a_n + \alpha}, \quad (n \geq 2)$.