

Vizsgatematika

Kalkulus 1, 2022/23 I. félév

A **vastagított betűvel** írt tételek bizonyítását tudni kell.

1. Matematikai logika és halmazelméleti alapok.

Logikai állítások és műveletek, műveletek tulajdonságai, **de Morgan azonosság**. Bizonyítási módszerek (lánckövetkeztetés, kontrapozíció, indirekt, teljes indukció). Elemi halmazelméleti jelek és műveletek (\subseteq, \cap, \cup , stb.) Relációk, ekvivalenciarelációk és függvények. (Reflexív, (anti)szimmetrikus, tranzitív relációk; függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze; függvények kompozíciója; injektív-, szürjektív- és bijektív függvények.) Halmazok számossága. Véges, megszámlálhatóan végtelen és kontinuum számosságú halmazok. **Nincs legnagyobb számosságú halmaz**. Rendezés, infimum, szuprémum.

2. A valós számok felépítése és topológiája.

A valós számok axiómái - Dedekind-féle axiómarendszer. Testaxiómák néhány következménye. Természetes számok - Peano-féle axiómák. Rendezési axiómák és néhány következménye. A teljességi axióma és néhány következménye. Arkhimédeszi-tulajdonság és néhány következménye. Metrika \mathbb{R} -en, intervallumok. **Cantor-féle metszettétel**. **Racionális számok halmaza megszámlálható**. $[0, 1]$ nem megszámlálható - **bizonyítása Cantor-féle átlós módszerrel**. Belső pont, határpont, torlódási pont, izolált pont. Halmaz belseje, halmaz lezártja, halmaz határa, derivált halmaz. Nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmaz. Nyílt halmazok struktúratétele. **Bolzano-Weierstrass tétel**. **Heine-Borel (Borel-Lebesgue) tétel**. Sűrű halmaz, perfekt halmaz.

3. Valós sorozatok.

A határérték és elemi tulajdonságai. Rendőrelv. Monoton, korlátos sorozat fogalma és tulajdonságai. Részsorozatok. **Minden sorozatnak van monoton részsorozata**. **Bolzano-Weierstrass tétel**. Cauchy-sorozat, **Cauchy-kritérium**. Torlódási pont jellemzése sorozatokkal. \liminf , \limsup . Az e szám. Rekurzív sorozatok határértéke. **Newton-féle gyökvonó módszer**.

4. Numerikus sorok.

Sor konvergenciája, és elemi tulajdonságai. Divergens sorok. Cauchy-kritérium. Sor abszolút konvergenciája. Riemann-féle átrendezési tétel. Majoráns/minoráns kritérium. **Konvergencia-kritériumok: kondenzációs, gyök, hányados kritérium**. Alternáló sorok. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok. Dirichlet-féle kritérium. **Leibniz-kritérium**. Abel-féle kritérium. Sorok természetes és Cauchy-sorzata. Mertens-tétel.

5. Elemi függvények.

Hatványsor definíciója, konvergencia sugara és a **Cauchy-Hadamard-tétel**. Elemi függvények (\exp , \sin , \cos , sh , ch) definíciója. Az \exp tulajdonságai. Euler-formula. A \sin , \cos alaptulajdonságai.

6. Valós függvények jellemzői és határértéke.

Páros, páratlan, (szigorúan) monoton növekvő és csökkenő, konkáv és konvex, periodikus függvény. Jensen-egyenlőtlenség. Függvény határértéke és a határérték tulajdonságai. **Átviteli elv határértékre**. Bal és jobb oldali határérték, kapcsolatuk a határértékkel.

Határérték a végtelenben. Függvény aszimptotái. **Hatványsorokra vonatkozó transzformációs tétel. Analitikus függvények határértéke.**

7. Valós-valós függvények folytonossága.

Függvény folytonossága, pontonként folytonos függvények tulajdonságai. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Szakadási helyek osztályozása. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai. Bolzano-Darboux tulajdonság. **Bolzano-Darboux tétel. Bolzano-tétel.** Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai. **Weierstrass-tétel.** Kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt. Egyenletes folytonosság, **Heine-tétel.** Lipschitz-tulajdonság. Inverz függvények folytonossága. Monotonitás és folytonosság. Konvexitás és folytonosság. Exponenciális és logaritmusfüggvények. Hatványfüggvények értelmezése.

8. A differenciálszámítás alapjai.

A differenciálás fogalma, függvény deriváltja. Deriválás, mint lineáris polinommal való közelítés, érintőegyenes. A folytonosság kapcsolata a differenciálhatósággal. A deriváltfüggvény. **Differenciálás alaptulajdonságai. Hatványsorok differenciálása.** Elemi függvények deriváltjai. **Középértéktételek: Rolle, Lagrange, Cauchy. Lokális tulajdonságok és a derivált.** Trigonometrikus függvények és inverzeik. Hiperbolikus függvények és inverzeik.

9. A differenciálszámítás alkalmazása.

L'Hospital-szabály. Magasabbrendű differenciálhányadosok. Polinomapproximáció, Taylor-polinom. **Taylor-formula.** Konvexitás/konkavitás kapcsolata a deriválással. Lokális szélsőérték fogalma és kapcsolata a függvény deriváltjával. Deriválható függvények vizsgálata.

10. Határozatlan integrál.

Primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma. Elemi határozatlan integrálok és integrálási szabályok. Parciális és helyettesítéses integrálás. Parciális törtekre bontás. Racionális törtfüggvények integrálása.

11. Határozott integrál.

Intervallum felosztása, a felosztás finomsága. Darboux-féle alsó és felső közelítő összeg, alsó- és felső integrál. Riemann-integrálhatóság definíciója. Riemann-integrál tulajdonságai. **Newton-Leibniz tétel.**

12. A Riemann-integrálhatóság kritériumai.

Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények. **Monoton függvények integrálhatóak. Folytonos függvények integrálhatóak.** Az integrálfüggvény és tulajdonságai. **Az integrálszámítás középértéktétele.** A Riemann-integrál alkalmazásai.