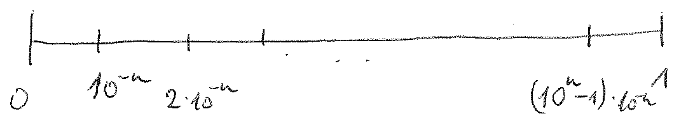
4. Gyakorló feladatsor

Lebesgue-mérték, Lebesgue-Stieltjes-mérték 2.

4/1. $A_n(x)$ = az $x=0,a_1a_2\ldots$ tizedestörtben az első n jegy közötti 7-es számjegyek száma.

Biz be: $A:=\left\{x : \lim_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{n} = \frac{1}{10}\right\}$ Borel-halmaz.

Osszuk fel $[0,1]$-t 10^n egyenlő részre:



↳ ∀ ~~számok~~ osztó intervallumban szereplő bármely két nem tizedestört alakjának első n jegye megegyezik

$\Downarrow$

$A_n(x)$ konstans minden intervallum belsejében $\Rightarrow$ A_n : lépcsős függvény $\forall n$-re

↳ $\{x\in[0,1] : A_n(x) < b\}$: véges sok nyílt szakasz és véges sok pont uniója $\forall b$-re

$\Downarrow$

Borel

↳ $\forall a,b\in\mathbb{R}$-re

$\{x\in[0,1] : |A_n(x)-a| < b\}$ is véges sok nyílt szakasz és véges ~~∅~~ sok pont uniója

$\Downarrow$

Borel

limesz definíciója: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{n} = \frac{1}{10} \iff \forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{A_n(x)}{n} - \frac{1}{10} \right| < \varepsilon, \text{ ha } n \geq N.$$

$$\Downarrow$$

$\varepsilon := \frac{1}{k}$-val: $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{A_n(x)}{n} - \frac{1}{10} \right| < \frac{1}{k}, \text{ ha } n \geq N$$

$$\Downarrow$$

$$\left| A_n(x) - \frac{n}{10} \right| < \frac{n}{k} \quad \forall\, n \geq N$$

$$\Rightarrow A = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{n} = \frac{1}{10} \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ x : \left| A_n(x) - \frac{n}{10} \right| < \frac{n}{k} \right\}$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\quad$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\quad$ $\forall\, n \geq N$ $\quad$ Borel

$\Rightarrow$ A Borel, mert Borel-halmazok megszámlálható metszetével és uniójával jön létre

o.k.!

4/2. $l > 1$ fix egész $\Rightarrow \forall x \in [0,1]$ l-adikus tört kifejtése:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{l^n} \qquad 0 \le x_n \le l-1$$

Mutassuk ~~meg~~, hogy Borel-mérhetőek + Lebesgue-mértékük?

a) $A_n(k) = \{x \in [0,1] : x_n = k\}$, $0 \le k \le l-1$

$A_n(k)$: azon számok, melyek l-adikus tört kifejtésében az n-dik számjegy k, vagyis

$$x = \frac{a_1}{l} + \frac{a_2}{l^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{l^{n-1}} + \frac{k}{l^n} + y =$$

$$= \frac{a_1 l^{n-2} + a_2 l^{n-3} + \dots + a_{n-1}}{l^{n-1}} + \frac{k}{l^n} + y \quad \text{, ahol}$$

$0 \le k \le l-1$, $0 \le a_j \le l-1$, ha $1 \le j \le n-1$ és $0 < y \le \frac{1}{l^n}$

$$\min_{\substack{a_i \\ i \le 1 \le n-1}} \{a_1 l^{n-2} + a_2 l^{n-3} + \dots + a_{n-1}\} = 0 \qquad (a_1 = \dots = a_{n-1} = 0)$$

$$\max_{\substack{a_i \\ i \le 1 \le n-1}} \{a_1 l^{n-2} + \dots + a_{n-1}\} = (l-1) \sum_{j=0}^{n-2} l^j = l^{n-1} - 1 \qquad (a_1 = \dots = a_{n-1} = l-1)$$

$$\Downarrow$$

$a_1 l^{n-2} + a_2 l^{n-3} + \dots + a_{n-1}$ felveszi az összes egész számot 0 és $l^{n-1} - 1$ között

↳ $$A_n(k) = \bigcup_{j=0}^{l^{n-1}-1} \left[\frac{jl+k}{l^n}, \frac{jl+k+1}{l^n}\right) \qquad 0 \le k \le l-1$$

↑

Borel

⇒ $A_n(k)$ Borelek uniója ⇒ Borel ✓

$A_n(k)$ l^{n-1} db $\frac{1}{l^n}$ hosszú ~~intervall~~ diszjunkt intervallum uniója

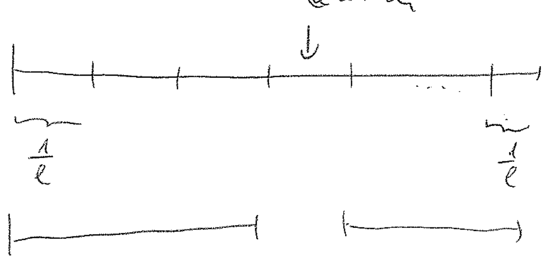
$$\Rightarrow \lambda(A_n(k)) = l^{n-1}\cdot\frac{1}{l^n} = \frac{1}{l} \qquad \forall\, n,k$$.!

b) $A^k = \{x\in[0,1] : x_n \neq k, \forall n\text{-re}\} \qquad 0 \le k \le l-1$

A^k: azon számok halmaza, melyek számjegyei között nincs k

↳ $A^k = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(k)\right]^c$ ⇝ Borel

Hasonlóan a Cantor halmazhoz: osszuk $[0,1]$-t l egyenlő részre ⇒ hagyjuk el a $(k+1)$-diket ⇒ első számjegy $\neq k$



⇝ maradékokat osszuk tovább $\frac{1}{l^2}$ részre

⇓

~~kihagyott részek hossza $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\right)^n$~~

összegezve a maradékot <u>0-mértékű</u>

(5)

(4/2) c) $B_k = \{x \in [0,1] : x_n = k$, végtelen sok n-re$\}$ $\quad 0 \le k \le l-1$

Vegyük észre:

$$B_k = \{x \in [0,1] : \forall\, m\text{-re } \exists\, n : n \geq m \text{ és } x_n = k\}$$

vagyis $\quad B_k = \limsup_n A_n(k) \quad \rightsquigarrow$ Borel-halmaz

$$\lambda(B_k) \geq \limsup_n \lambda(A_n(k)) = \frac{1}{l}$$

másrészről $\quad B_k \subset A_n(k)$ minden n-re $\rightsquigarrow \lambda(B_k) \leq \lambda(A_n(k)) = \frac{1}{l}$ minden n-re

$$\Rightarrow \quad \lambda(B_k) = \frac{1}{l}$$

(4/3.) $\quad A := \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \in [0,1] : x_k = 0 \vee 1 \text{ és } x_{2k} = 0 \quad \forall k \right\}$

$\Rightarrow$ A kompakt, nem megszámlálható, seholsem sűrű, nullmértékű

- $A \subset [0,1]$ korlátos ✓
- A zártsága

Tfh A nem zárt: ! x A egy torlódási pontja, ami $\notin A$.

$\hookrightarrow \quad \exists\, K \in \mathbb{N} : x_{2K} = 1 \quad$ (x pont kifejtésében)

! $\varepsilon := \frac{1}{2^{K+1}} \quad \rightsquigarrow \quad d(x, A) \geq \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\Downarrow$

$\lightning$: x nem torlódási pont

$\Rightarrow$ A zárt

Heine-Borel $\Rightarrow$ A kompakt

◦ A nem megszámlálható:

$$f: A \to [0,1]$$

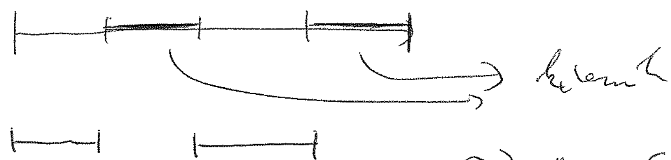
$$x = 0{,}x_1x_2x_3\ldots_{(4)} \longmapsto 0{,}x_1x_3x_5\ldots_{(2)}$$

$x_{2k} = 0$ $\qquad\qquad$ $x_{2k+1} = 0 \vee 1$

f bijekció $\rightsquigarrow |A| = |[0,1]| =$ kontinuum ✓

◦ Osszuk $[0,1]$-et 4 egyenlő intervallumra

↳ vegyük ki $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ és $(\frac{3}{4}, 1)$-et



A_1: $\rightsquigarrow A_1 = \{x \in [0,1] : x_2 = 0\}$

Osszuk mindkettő intervallumot 4 egyenlő részre

↳ vegyük ki $\left(\frac{1}{4^2}, \frac{2}{4^2}\right), \left(\frac{3}{4^2}, \frac{4}{4^2}\right), \left(\frac{9}{4^2}, \frac{10}{4^2}\right), \left(\frac{11}{4^2}, \frac{12}{4^2}\right)$-et

$\Rightarrow$ maradék $= A_2 = \{x \in [0,1] : x_2 = x_4 = 0\}$

$\Rightarrow$ Folytatva az eljárást A_n: 2^n zárt intervallum uniója, mindegyik hossza $= 4^{-n}$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow A = \bigcap_n A_n$$

$$\Rightarrow \lambda(A_n) = 2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n} \Rightarrow \lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$$

$\Rightarrow$ A nullmértékű

(4/3) folyt.

A zárt és 0 mértékű $\Rightarrow$ A sehol sem sűrű:

($\forall$ I nyílt intervallumot nézünk $I \not\subset A$, hiszen

$$0 < \lambda(I) \leq \lambda(A) = 0 : \lightning$$

$\Rightarrow$ $I \cap A^c \neq \phi$ és nyílt

$\Downarrow$

tartalmaz A-tól diszjunkt nyílt részintervallumot)

$\Downarrow$

A sehol sem sűrű.

ö!

(4/4) Bizonyítsuk be, hogy ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, akkor $\{f(x): x \in [a,b], f'(x) = 0\}$ nullmértékű.

$N := \{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$ $\Rightarrow$ kell: $\lambda(f(N)) = 0$

! $\underline{\varepsilon > 0 \text{ fix.}}$ Legyen H_n, azon $x \in N$ pontok halmaza, melyre

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon |y - x|, \text{ ha } |y - x| < \frac{1}{n}.$$

$\hookrightarrow$ $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ és $H_1 \cup H_2 \cup \ldots = N$

Ha I az $[a,b]$ intervallum $1/n$-nél nem nagyobb hosszúságú részintervalluma, akkor

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon |y - x| \leq \varepsilon \cdot \underbrace{|I|}_{\lambda(I)} \qquad \forall\, x, y \in H_n \cap I\text{-re}$$

$\Rightarrow$ $f(H_n \cap I)$ halmaz bármely két elemének távolsága $\leq \varepsilon \cdot |I|$

$\hookrightarrow$ $\sup f(H_n \cap I)$ és $\inf f(H_n \cap I)$ különbsége is legfeljebb $\varepsilon \cdot |I|$.

~~inf f~~(

$\Rightarrow$ $f(H_n \cap I)$ lefedhető egy legfeljebb $\varepsilon \cdot |I|$ hosszúságú intervallummal

Bontsuk fel $[a,b]$-t véges sok $\frac{1}{n}$-nél rövidebb részintervallumra, melyek összhossza $b-a$. $\rightsquigarrow$ $f(H_n)$ lefedhető egy legfeljebb $\varepsilon \cdot (b-a)$ összhosszúságú véges intervallumrendszerrel.

$$\Downarrow$$

$$\lambda(f(H_n)) \le \varepsilon(b-a)$$

$f(H_1) \subset f(H_2) \subset \ldots$ és $f(H_1) \cup f(H_2) \cup \ldots = f(N)$

$\hookrightarrow$ $\lambda(f(N)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f(H_n)) \le \varepsilon(b-a)$ $\forall\, \varepsilon > 0$-ra

$\Rightarrow$ $\lambda(f(N)) = 0$.

o.!

(4/5) Biz. be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda(A) > 0$, akkor $\exists$ I intervallum, melyre $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot \lambda(I)$

1.) $\lambda(A) < \infty$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ -nek I_n intervallumok, melyre:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < 1{,}01 \cdot \lambda(A)$$

$\Rightarrow$ $\lambda(I_n \cap A) > 0{,}99 \cdot \lambda(I_n)$ teljesül legalább egy n-re.

(Ha nem teljesülne, akkor mivel $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap A)$, ezért

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n \cap A) \leq 0{,}99 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq 0{,}99 \cdot 1{,}01 \cdot \lambda(A) < \lambda(A)$$

$\lightning$)

2.) $\lambda(A) = \infty$ $\rightsquigarrow$

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(I_{n-1,n}) \cap A)$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ olyan n, melyre $\lambda(I_{n-1,n}) \cap A) > 0$.

Mivel $\lambda(I_{n-1,n}) \cap A) \leq 1$ $\overset{\text{előző rész}}{\rightsquigarrow}$ $\exists$ olyan I intervallum, hogy

$$\lambda(I \cap (I_{n-1,n}) \cap A)) > 0{,}99 \cdot \lambda(I)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot \lambda(I)$$

$\circ$!

Mérhető függvények I.

(1.) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f mérhető X-en és $g = f$ μ-m.m. Igaz-e, hogy g mérhető?

Legyen $N := \{g \neq f\}$. Ekkor $\mu(N) = 0$ és $N^c = \{g = f\}$ mérhető.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$\{g > \lambda\} = \underbrace{(\{g > \lambda\} \cap N^c)}_{\{f > \lambda\} \cap N^c \in \mathcal{A}} \cup (\{g > \lambda\} \cap N)$$

mérhető

és $(\{g > \lambda\} \cap N) \subset N$. Ahhoz, hogy ez mérhető legyen, szükséges, hogy μ teljes mérték legyen.

Ekkor $(\{g > \lambda\} \cap N)$ 0-mértékű és mérhető.

Tehát, ha μ teljes, akkor $\{g > \lambda\}$ mérhető $\Rightarrow$ <u>g mérhető</u>

μ teljessége elégséges feltétel is:

! $A \subset B$, $\mu(B) = 0$ és legyen $f = 0$, $g := \chi_A + \chi_B$.

$\hookrightarrow$ f mérhető, $\{f \neq g\} = B$ $\rightsquigarrow$ $f = g$ μ-m.m. $\Rightarrow$ g mérhető

$\Rightarrow$ $g^{-1}(\{2\}) = A$ tehát mérhető, vagyis μ teljes.

<u>Tehát</u>

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes $\Longleftrightarrow$ (f mérhető és $f = g$ μ-m.m.) $\Rightarrow$ g mérhető !

2) $X=(0,1]$

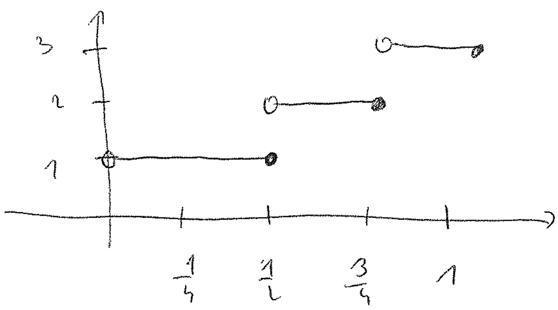
$\mathcal{A}_1 := \{(0,\frac{1}{2}],(\frac{1}{2},\frac{3}{4}],(\frac{3}{4},1]\}$ által generált σ-alg.

$\mathcal{A}_2 := \{(0,\frac{1}{4}],(\frac{1}{4},1/2],(1/2,1]\}$ —||—

Adjunk meg olyan f függvényt X-en, melyre

a) $\mathcal{A}_1$-mérhető, de nem $\mathcal{A}_2$-mérhető

pl: $f=\chi_{(0,1/2]}+2\chi_{(1/2,3/4]}+3\chi_{(3/4,1]}$

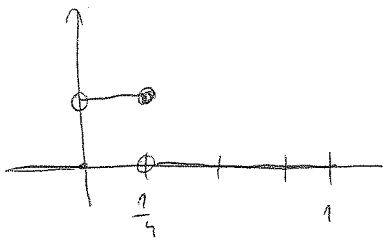


$\mathcal{A}_1$-mérhető, hiszen $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\{f<\lambda\}$ $\mathcal{A}_1$-beli halmaz

de nem $\mathcal{A}_2$-mérhető, hiszen pl $\{f<\frac{5}{2}\}=(0,\frac{3}{4}]\notin\mathcal{A}_2$

b) $\mathcal{A}_2$-mérhető, de nem $\mathcal{A}_1$-mérhető

pl: $f:=\chi_{(0,1/4]}$



$\mathcal{A}_2$-mérhető, hiszen $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\{f<\lambda\}$ $\mathcal{A}_2$-beli halmaz, ~~de~~

de nem $\mathcal{A}_1$-mérhető, hiszen

$\{f<2\}=(0,\frac{1}{4}]\notin\mathcal{A}_1$

c) $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ szerint is mérhető

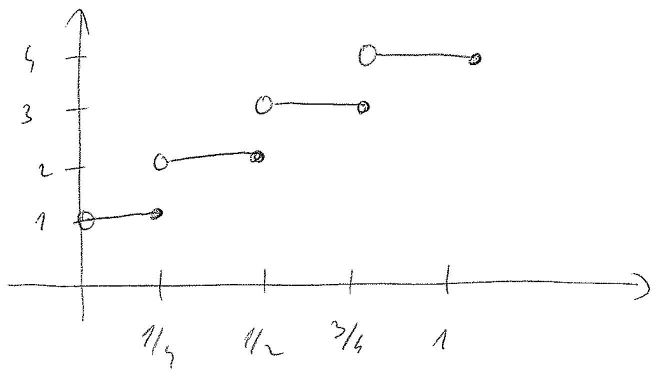
pl: $f := \chi_{(0, \frac{1}{2}]}$, mert $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\{f < \lambda\} \in \mathcal{A}_1$ és $\in \mathcal{A}_2$

d) sem $\mathcal{A}_1$, sem $\mathcal{A}_2$ szerint nem mérhető

pl:

$$f = \chi_{(0, 1/4]} + 2\chi_{(1/4, 1/2]} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, 3/4]} + 4\chi_{(3/4, 1]}$$



$\{f < \frac{3}{2}\} = (0, \frac{1}{4}] \notin \mathcal{A}_1 \Rightarrow$ nem $\mathcal{A}_1$-mérhető

$\{f < \frac{7}{2}\} = (0, \frac{3}{4}] \notin \mathcal{A}_2 \Rightarrow$ nem $\mathcal{A}_2$-mérhető.

ö!

3. $\mathcal{A} := \mathbb{R}^2$ $B(0,r)$ gömbjei által generált σ-alg.

a) $u : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, $u(x_1,x_2) := \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

mérhető

Mivel $\mathcal{A}$ a legszűkebb σ-algebrája $\mathbb{R}^2$-nek részhalmazainak, mely tartalmazza az origó körüli nyílt gömböket $\Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Emlékezzünk, hogy $C := \{[0,r) : r > 0\}$ intervallumok generálják $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-t, vagyis $\mathcal{M}(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

$\Rightarrow$ Mivel $u^{-1}([0,r)) = B(0,r) \Rightarrow u^{-1}([0,r)) \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ ~~$u^{-1}([0,r)) \in$~~

$u^{-1}(\mathcal{M}(C)) = \mathcal{M}(u^{-1}(C)) = \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

vagyis u mérhető.

b) $v : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$, $v(x) := (x,0)$ mérhető

$\forall$ $B(0,r)$-re $v^{-1}(B(0,r)) = \{x : v(x) \in B(0,r)\} = [0,r) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$

$\Downarrow$

sőt ezek generálják $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-t

$\Downarrow$

v mérhető

(4) Konstruáljunk olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue-szerint nem mérhető függvényt, melyre teljesül, hogy ha $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan, hogy $|g(x)-f(x)|<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, akkor g sem Lebesgue-mérhető.

Láttuk, hogy $\exists$ Lebesgue-nem mérhető halmaz, jelölje ezt: V.

$$f(x) := \chi_V(x) - \chi_{V^c}(x).$$

Ekkor, ha $|g(x)-f(x)|<1 \quad \forall x$-re $\Rightarrow$

- $0<g(x)<2$, ha $x\in V$
- $-2<g(x)<0$ ha $x\in V^c$

$\Rightarrow \{g>0\}=V, \ \{g<0\}=V^c$

$\Rightarrow$ g nem Lebesgue-mérhető ⊙!

5 $f \in C[0,1] \Rightarrow A = \{x \in [0,1] : f(x) > f(y),\ \forall y \in [0,x)\}$ Borel-halmaz.

Vegyük észre, hogy A nem változik, ha $f(x)$ helyett

$\sup\limits_{0 \le y \le x} f(y)$-t írunk.

Ezzel feltehető, hogy f nemcsökkenő $[0,1]$-en.

$\Rightarrow$ ~~$f^{-1}(\{x\})$~~ $a \le x \le b$, $x \in (0,1] \setminus A$-ra

$f^{-1}(\{x\}) = [a,b] \subset [0,1]$

Ezért $(0,1] \setminus A$ előáll $(a_k, b_k] \subset (0,1]$ intervallumok legfeljebb megszámlálható uniójaként

$\Downarrow$

$[0,1] \setminus A$ Borel $\Rightarrow$ A Borel $\circ$!

(6) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető fv-ek $n \in \mathbb{N}$.
Az alábbi halmazok mérhetőek:

a) $A = \{x \in X : f_n(x) \to \infty\}$

$f_n(x) \to \infty$, ha $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \exists\ m \in \mathbb{N} : f_n(x) \geq k$, ha $n \geq m$

$A_{m,k} := \{x \in X : f_n(x) \geq k, \cancel{\text{ha}}\ \forall\ n \geq m\} =$

$= \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq k\}$ $\Rightarrow$ $A_{m,k}$ mérhető $\forall\ m, k$

mérhető halmaz $\forall$ k-ra

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,k}$ ⤳ mérhető, mert mérhető halmazok metszete & uniója.

$\forall$ k-ra $\quad \exists\ m \in \mathbb{N}$

b) $B = \{x \in X : f_n(x) \to -\infty\}$

---

hasonlóan: $B_{m,k} := \{x \in X : f_n(x) \leq -k, \forall\ n \geq m\}$ mérhető

↪ $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{m,k}$

c) $C = \{x \in X : \lim_n f_n(x)\ \exists\ \mathbb{R}\text{-ben}\}$

---

pl.: $C = \{x \in Y : \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)\}$

$Y := X \setminus (A \cup B)$

mérhető

o !