Analízis 2
1. Gyakorló feladatsor

1. Legyen X egy topologikus tér és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{S} = \{C \cap O : C \text{ zárt halmaz}, O \text{ nyílt halmaz}\} = \{C_1 \setminus C_2 : C_1, C_2 \text{ zárt halmazok}\}.$$

   Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ *félgyűrű* X-ben, azaz bármely $A, B \in \mathcal{S}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{S}$ és $A \setminus B$ előáll véges sok $\mathcal{S}$-beli halmaz diszjunkt uniójaként.

2. Legyen X az alaphalmaz és $A \subset X$ rögzített. Határozzuk meg az

   (a) $\{A\}$

   (b) $\{B : A \subseteq B \subseteq X\}$

   halmazok által generált σ-algebrát!

3. Jelölje $\mathcal{S}$ a $[0, 1)$ intervallum azon részhalmazainak halmazát, melyek előállnak véges sok $[a, b)$ alakú, $[0, 1)$-beli intervallum uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ algebra, de nem σ-algebra.

4. Legyen X egy nem megszámlálható halmaz és legyen

$$\mathcal{S} = \{E \subseteq X : E \text{ vagy } E^c \text{ megszámlálható } \}.$$

   Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ σ-algebra, és éppen az X 1-pont halmazai által generált σ-algebra.

5. Melyik metrikus térben alkotnak a nyílt halmazok σ-algebrát?

6. Határozzuk meg egy topológikus tér sehol sem sűrű részhalmazai által generált σ-algebrát!

7. Legyen $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ egy n elemű halmaz. Adjuk meg az összes σ-algebrát X_n-en az $n = 1, 2, 3, 4$ esetben. Hány darab van belőlük?

8. Mutassuk meg, hogy minden végtelen σ-algebra tartalmaz nem megszámlálható számosságú halmazt!

9. Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{B}(X)$ a Borel-halmazok σ-algebrája, $Y \subset X$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy az (Y, τ) térben az örökölt topológia által generált Borel σ-algebra éppen
$$\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

10. Legyen X és Y két halmaz, és tekintsük az $f : X \to Y$ leképezést. Mutassuk meg, hogy
    (a) ha $\mathcal{B}$ σ-algebra Y-ban, akkor
    $$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$
    σ-algebra X-ben;
    (b) ha $\mathcal{A}$ σ-algebra X-ben, akkor
    $$\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$
    σ-algebra Y-ban.

11. Legyen $f : X \to Y$, ahol $X = Y = \mathbb{R}$ és tekintsük az előző feladat értelmébena az
$$\mathcal{M}_f = \{f^{-1}(B) \subset X : B \text{ Borel-halmaz } Y\text{-ban}\}$$
σ-algebrát X-en, amit az f függvény által generált σ-algebrának hívunk. Mutassuk meg, hogy az 1-pont halmazokra (szingletonokra) pontosan akkor áll fenn, hogy $\{x\} \in \mathcal{M}_f$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, ha f injektív.

12. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nemcsökkenő függvény. Az előző feladat jelöléseivel, mikor lesz igaz, hogy $\mathcal{M}_f = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ahol $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jelöli $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebráját?

13. Legyen $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x) = x^2$. Határozzuk meg az $\mathcal{M}_f$ f által generált σ-algebrát.

14. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x, y) = x - y$. Határozzuk meg az $\mathcal{M}_f$ f által generált σ-algebrát.

15. Jelölje $\mathcal{F}$ A valós értékű X halmazon értelmezett függvények azon családját, mely tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{F}$. Tegyük fel továbbá, hogy ha $f_n \in \mathcal{F}$ és $f_n \to f$, akkor $f \in \mathcal{F}$. Mutassuk meg, hogy
$$\mathcal{A} = \{A \subset X : \chi_A \in \mathcal{F}\}$$
σ-algebra, ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus (indikátor) függvénye.