1/

Analízis 2. - Mértékelmélet

1. gyakorló feladatsor

(1/1) X top. tér $\quad S = \{C \cap O : C \text{ zárt}, O \text{ nyílt}\} = \{C_1 \setminus C_2 : C_1, C_2 \text{ zárt}\}$

$\Rightarrow$ S félgyűrű X-ben.

- zártság a véges metszetre:

$$C_1 \cap O_1,\ C_2 \cap O_2 \in S \Rightarrow (C_1 \cap O_1) \cap (C_2 \cap O_2) = \underbrace{(C_1 \cap C_2)}_{\text{zárt}} \cap \underbrace{(O_1 \cap O_2)}_{\text{nyílt}} \in S$$

- bármely két halmaz különbsége előáll S-beli diszjunktak uniójaként:

$$C_1 \cap O_1,\ C_2 \cap O_2 \in S$$

$$\Rightarrow (C_1 \cap O_1) \setminus (C_2 \cap O_2) = (C_1 \cap O_1) \cap (C_2 \cap O_2)^c \underset{\text{de Morgan}}{=} (C_1 \cap O_1) \cap (C_2^c \cup O_2^c) =$$

$$\underset{\text{disztr.}}{=} (C_1 \cap O_1) \cap [C_2^c \cup (O_2^c \cap C_2)] =$$

$$\underset{\text{disztr.}}{=} [C_1 \cap (O_1 \cap C_2^c)] \cup [(C_1 \cap C_2 \cap O_2^c) \cap O_1] =$$

$$= A \cup B \text{, ahol}$$

$$A = C_1 \cap \underbrace{(O_1 \cap C_2^c)}_{\text{nyílt}} \in S$$

$$B = \underbrace{(C_1 \cap C_2 \cap O_2^c)}_{\text{zárt}} \cap O_1 \in S \quad \text{és} \quad A \cap B = \emptyset$$

$\circ$!

1/2 X alaphalmaz, $A \subset X$ fix. (a) $\{A\}$

(b) $\{B : A \subseteq B \subseteq X\}$

halmazok által generált σ-alg?

(a) $\{\emptyset, A, A^c, X\}$

(b) Ha $B \in \mathcal{M}\{B : A \subseteq B\}$, akkor B^c is benne kell, hogy legyen, ~~ekkor~~ azaz $A \subseteq B$ miatt $A \subseteq B^c$ is kell.

Ellenőrizhető, hogy akkor a többi feltétel is teljesül, így

$$\mathcal{M} = \{B : A \subseteq B \text{ vagy } A \subseteq B^c\}$$

!

1/3 S: $[0,1)$ azon részhalmazai, melyek előállnak véges sok $[a,b)$ alakú $[0,1)$-beli uniójaként.

$\Rightarrow$ S algebra, de nem σ-alg.

$A := \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, $B := \bigcup_{j=1}^{m} [c_j, d_j)$

$\Rightarrow$ a) $A \cup B \in S$ ✓

b) $A \cap B = \bigcup_i \bigcup_j \underbrace{[a_i,b_i) \cap [c_j,d_j)}_{[.,.) \text{ alakú}} \in S$ ✓

c) $[0,1) \setminus A = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{([0,1) \setminus [a_i,b_i))}_{\text{véges uniója } [.,.)\text{-k párosának}} \in S$ ✓

Nem σ-algebra, pl.:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \tfrac{1}{n}) = \{0\} \notin S$$

!

3/ 4/4. X nem megszámlálható, $S := \{E \subseteq X : E$ vagy E^c megszámlálható$\}$

$\Rightarrow S$ σ-alg és az 1-pont halmazok által generált σ-alg.

- $\phi, X \in S$ és zárt a komplementerképzésre ✓

- $\{A_n\} \subseteq S$ 1, ha A_n megszámlálható $\forall n$-re $\Rightarrow \bigcup_n A_n$ megszámlálható ✓

  2, Ha $\exists k$, melyre A_k nem megszámlálható, akkor A_k^c megszámlálható.

  De $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_k^c$, vagyis

  $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ megszámlálható $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ ✓

$\Rightarrow S$ σ-algebra.

S tartalmazza X 1-pont halmazait $\Rightarrow S$ benne van az 1-pont halmazok által generált σ-algebrában, de S-ről láttuk, hogy σ-algebra, így adódik az állítás.

! ?

1/

A/5. Melyik metrikus térben alkotnak a nyílt halmazok σ-algebrát?

$\mathcal{T} := \{X \text{ nyílt halmazai}\}$

Ha $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, akkor $\mathcal{T}$ σ-algebra. Ám, ha

$\mathcal{T}$ σ-algebra és $x \in X$, akkor $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, \frac{1}{n})$

miatt $\{x\}$ nyílt. Emiatt X bármely részhalmaza

nyílt, vagyis $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Egyetlen olyan metrikus tér van, ahol $\forall$ halmaz nyílt:

a <u>diszkrét metrikus tér</u>.

A/6 Mutat meg egy top. tér sehol sem sűrű részhalmazai által generált σ-algebrát!

X top. tér. Azon halmaz, mely előáll sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniójaként = I. kategóriájú

$\hookrightarrow$ $\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ I. kat. vagy } A^c \text{ I. kat}\}$

sehol sem sűrű halmazok $\subset \mathcal{A}$ $\rightsquigarrow$ elég belátni, hogy $\mathcal{A}$ σ-algebra:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ + zárt a komplementer képzésre
- $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$
  - ha $\forall A_n$ I. kategóriájú $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ I. kat $\Rightarrow \in \mathcal{A}$ ✓
  - ha $\exists k : A_k^c$ I. kat., akkor

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_k^c \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \checkmark$$

o.!

5/ 1/7. $X_n := \{1, 2, \dots, n\}$ Adjuk meg az összes σ-algebrát X_n-en $n = 1, 2, 3$ esetben

---

$\mathcal{P}(X_n)$ halmazrendszer azon részhalmazait keressük, melyek σ-algebrát alkotnak

a) • $\underline{n=1}$ $\quad \mathcal{P}(X_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ $\quad$: σ-algebra ✓

b) • $\underline{n=2}$ $\quad \mathcal{P}(X_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Mivel $\forall X$ esetén $\{\emptyset, X\}$ mindig σ-algebra, ezért

$$\mathcal{B}_1 := \{\emptyset, \{1,2\}\} \quad \sigma\text{-algebra}$$

Ha $\mathcal{B}_2$ σ-algebra tartalmaz egyéb elemet is, pl $\{1\}$-et, akkor, mivel $\mathcal{B}_2$ zárt a komplementer képzésre

$$\{1\}^c = \{2\} \in \mathcal{B}_2 \text{ is kell}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} = \mathcal{P}(X_2)$$

vagyis $n=2$ esetben 2 db σ-algebra van.

c) • $\underline{n=3}$ $\quad \mathcal{P}(X_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$$C_1 := \{\emptyset, X_3\}$$

ha $\{1\} \in C_2 \Rightarrow \{1\}^c = \{2,3\} \in C_2$ -kell

$$\hookrightarrow C_2 := \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

hasonlóan:

$$C_3 := \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$C_4 := \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

6/ ha ~~tartalmaz C_5 σ-algebra egy 2 elemű halmazt,~~

~~pl $\{1,2\}$-t $\Rightarrow$ $\{1,2\}^c = \{3\} \in C_5$~~

Ha C_5 tartalmaz 2 db egyelemű halmazt, pl

$$\{1\}, \{2\} \in C_5 \Rightarrow \{1,2\} \in C_5 \Rightarrow \{1,2\}^c = \{3\} \in C_5$$

$\Rightarrow$ visszakapjuk $\mathcal{P}(X_3)$-t

$$\Rightarrow \boxed{C_5 = \mathcal{P}(X_3)}$$

$n=3$ esetén 5 db σ-algebra van.

1/8 $\forall$ végtelen σ-algebra tartalmaz nem megszámlálható számosságú halmazt.

Legyen $\mathcal{A}$ végtelen σ-algebra X-en.

Ha $\mathcal{A}$ tartalmaz $\{A_n\}$ páronként diszjunkt halmazból álló sorozatot ($A_n \neq \emptyset$), akkor $\forall\ S \subset \mathbb{N}$-re

$$A_S := \bigcup_{n \in S} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad A_S \neq A_t, \text{ ha } s \neq t$$

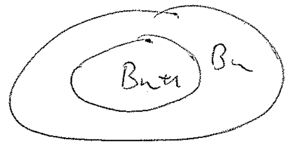
$\Rightarrow$ $\{A_S : S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ nem megszámlálható számosságú és benne van $\mathcal{A}$-ban ✓

$\Uparrow$

Elég megmutatni, hogy $\exists$ ilyen $\{A_n\}$ halmazsorozat.

7/ (1/8) folytatás

Megmutatjuk, hogy $\exists\ \{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$, $B_{n+1} \neq B_n$ $\forall n$ halmazsorozat.



Ekkor $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$ már megfelelő $\{A_n\}$ sorozatot ad.

<u>$\{B_n\}$ konstrukciója</u>: indukcióval

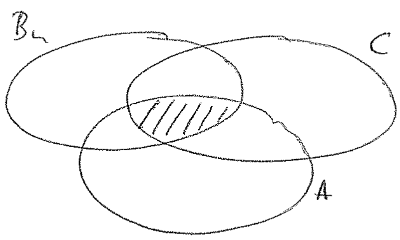
Tfh $B_n \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\{B_n \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ végtelen halmaz.

Legyen $C \in \mathcal{A}$: $\emptyset \subsetneq B_n \cap C \subset B_n$.

Mivel $B_n \cap A = [(B_n \cap C) \cap A] \cup [(B_n \setminus C) \cap A]$, ezért

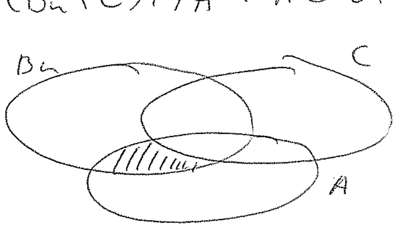
vagy $\{(B_n \cap C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$, vagy $\{(B_n \setminus C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ végtelen halmaz.

- ha $\{(B_n \cap C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ végtelen



$\Rightarrow B_{n+1} := B_n \cap C \subset B_n$

- ha $\{(B_n \setminus C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ végtelen



$\Rightarrow B_{n+1} := B_n \setminus C \subset B_n$

Induljunk ki $B_1 = X$ végtelen halmazból $\Rightarrow$ kész vagyunk!

8/

1/5 $(X, \mathcal{T})$ Topologikus tér, $\mathcal{B}(X)$ X Borel-halmazainak σ-algebrája

$Y \subset X$ tetsz. $\Rightarrow$ $(Y, \mathcal{T})$-ban $\underset{\mathcal{B}_Y}{\overset{\parallel}{\mathcal{B}(Y)}} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$.

$\mathcal{A} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$

cél: $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$.

$\mathcal{A}$ σ-algebra és $\forall\, U \in \mathcal{T}$ esetén $U \cap Y \in \mathcal{A}$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{A}$ tartalmazza Y összes nyílt halmazát

$\Rightarrow \mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}$ ✓

Másrészt: $C := \{A \in \mathcal{B}(X) : A \cap Y \in \mathcal{B}_Y\}$

$\hookrightarrow$ C X részhalmazainak azon σ-algebrája, melyre $\mathcal{T} \subseteq C$

$\Rightarrow C = \mathcal{B}(X) \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$ $\circ$!

1/10 a) $f : X \to Y$, $\mathcal{B}$ σ-algebra Y-ban

$\mathcal{M}_f := f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ σ-alg X-ben

---

Legyen $A \in \mathcal{M}_f$, $B \in \mathcal{B}$, melyre $A = f^{-1}(B)$

- Mivel $B^c \in \mathcal{B}$ és $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c = A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}_f$ ✓
- Legyen $\{A_n\} \subset \mathcal{M}_f$, $\{B_n\} \subset \mathcal{B}$, melyre $A_n = f^{-1}(B_n)$ $\forall n$-re

$\Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ és $\bigcup_n A_n = \bigcup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) \in \mathcal{M}_f$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{M}_f$ σ-algebra X-en. $\circ$!

b) következő oldalon

1/11 $f: X \to Y$, $X = Y = \mathbb{R}$

$\mathcal{M}_f := \{ f^{-1}(B) \subset X : B$ Borel Y-ban $\}$

$\{x\} \in \mathcal{M}_f \ \forall x \in \mathbb{R} \iff f$ injektív

---

<u>szükségesség:</u> ! $x \in \mathbb{R}$, t.f.h. $f(x) = f(x_1)$ vmely $x_1 \neq x$-re

$\Rightarrow \{x\} \subsetneq f^{-1}(\{f(x)\})$ (valódi részhalmaza)

vagyis $\{x\} \notin \mathcal{M}_f$: ↯

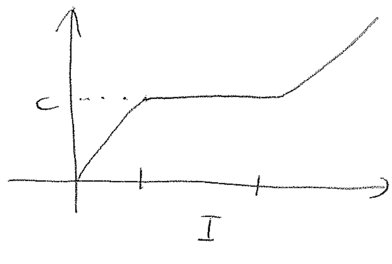
vagy így f-nek injektívnek kell lennie.

<u>elégségesség:</u> Ha f injektív, akkor $\{x\} = f^{-1}(\{f(x)\})$

de $\{f(x)\}$ Borel-halmaz $\mathbb{R}$-ben $\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{M}_f$.!

1/12 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemcsökkenő fv. Mikor igaz, hogy $\mathcal{M}_f = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Ha f konstans vmely intervallumon:



$\Downarrow$

$f^{-1}(\{c\}) = I$

↪ I $\forall$ részintervalluma nincs benne $\mathcal{M}_f$-ben, pedig Borel

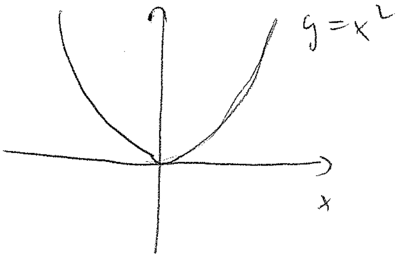
↪ $\mathcal{M}_f \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathcal{M}_f = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \iff f$ injektív, vagyis, ha

f szigorúan monoton nő .!

(1/13) $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x) = x^2$.

$\mathcal{A}_f = ?$



f^{-1} $[0,\infty)$-n 2 értékű:

$y = f(x) \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

Legyen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad B_+ := B \cap [0,\infty)$

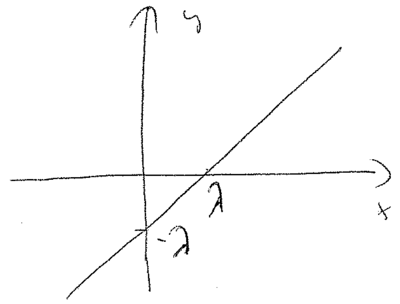
$$\hookrightarrow f^{-1}(B) = f^{-1}(B_+) = -\sqrt{B_+} \cup \sqrt{B_+}$$

$$\sqrt{B_+} := \{\sqrt{x} : x \in B_+\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_f = \{-\sqrt{B_+} \cup \sqrt{B_+} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

(1/14) $f : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x,y) = x - y$. $\mathcal{A}_f = ?$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = \lambda\}$



λ-val jobbra tolt 1 meredekségű egyenes

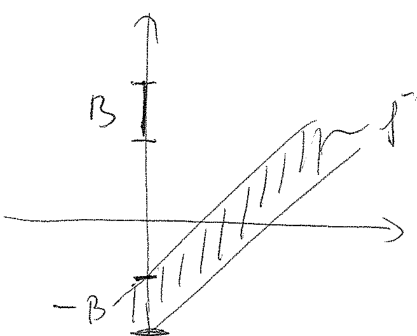
$\equiv$

λ-val lefele tolt 1 meredekségű egyenes

$\Rightarrow$ ha $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ $f^{-1}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\} =$

$= \{$azon 1 meredekségű egyenesek, melyek y tengelyt $-B$-ben metszik$\}$

pl:



$\Vert$

$\mathcal{A}_f = \{$az x tengellyel 45°-os szöget bezáró azon sávok, melyek y tengellyel vett metszete Borel halmaz$\}$