Analízis 2 Mértékelmélet, 2. Gyakorló feladatsor

lim inf, lim sup, monoton osztály

1. Legyen X egy alaphalmaz, (E_n) pedig egy halmazsorozat X-ben. Mutassuk meg, hogy
$$X \setminus \overline{\lim} E_n = \underline{\lim}(X \setminus E_n).$$

2. Legyen X egy alaphalmaz, $A, B \subset X$. Tekintsük az
$$E_n = \begin{cases} A, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ B, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$
halmazsorozatot! Mi lesz $\overline{\lim} E_n$ illetve $\underline{\lim} E_n$?

3. Tekinsük a következő halmazsorozatot: $A_n = \{m : m \in \mathbb{N}, n \leq m < 2n\}$. Mi lesz $\overline{\lim} A_n$ illetve $\underline{\lim} A_n$?

4. Legyen $X \neq \emptyset$ tetszőleges. $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád *monoton osztály*, ha
   (a) minden $\{A_n\} \subset \mathcal{M}_0$, melyre $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ esetén $\cup_n A_n \in \mathcal{M}_0$;
   (b) minden $\{A_n\} \subset \mathcal{M}_0$, melyre $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ esetén $\cap_n A_n \in \mathcal{M}_0$.

   Mutassuk meg a következőket:

   (a) Ha $\mathcal{M}_0$ monoton osztály, akkor $\mathbb{N} = \{A \in \mathcal{M}_0 : A^c \in \mathcal{M}_0\}$ szintén monoton osztály.
   (b) Ha $\mathcal{M}_0$ monoton osztály, és $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ tetszőleges, akkor $\mathbb{N} = \{A \in \mathcal{M}_0 : A \cap C \in \mathcal{M}_0 \text{ minden } C \in \mathcal{C} \text{ esetén}\}$ szintén monoton osztály.
   (c) Ha $\mathcal{M}_0$ monoton osztály halmazalgebra, akkor σ-algebra is.

Mértékek

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu_n)$ mértéktér minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén, melyekre teljesül, hogy $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ minden $A \in \mathcal{A}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu(A) := \sup\{\mu_n(A)\}$, ha $A \in \mathcal{A}$. Mutassuk meg, hogy μ is mérték $\mathcal{A}$-n.

2. Az $(X, \mathcal{A}, \mu_n)$ mértéktérben minden $A, B \in \mathcal{A}$ esetén legyen $A \sim B$, ha $\mu(A \triangle B) = 0$, ahol $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a szimmetrikus differencia. Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, és az ekvivalenciaosztályokon a $d(\bar{A}, \bar{B}) := \mu(A \triangle B)$ leképezés metrikát definiál. ($\bar{A}$ jelöli az A-tartalmazó ekvivalenciaosztályt reprezentáló elemet. (Szorgalmasok beláthatják, hogy az így kapott metrikus tér teljes.)

3. Legyen $X \neq \emptyset$, $f : X \to [0, \infty]$ egy függvény. Definiáljuk a $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ függvényt a következőképpen:
$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{x \in A} f(x), & \text{ha } A \neq \emptyset \text{ megszámlálható}, \\ \infty, & \text{ha } A \text{ nem megszámlálható}, \\ 0, & \text{ha } A = \emptyset. \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy μ mérték.

4. Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér és $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ I. vagy II. kategóriájú}\}$. Legyen minden $A \in \mathcal{A}$ esetén
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A \text{ I. kategóriájú}, \\ 1, & \text{ha } A \text{ II. kategóriájú}. \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ σ-algebra, és μ mérték $\mathcal{A}$-n.

5. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér ($\mu(X) = 1$). Mutassuk meg, hogy ha $A_1, A_2 \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ olyan halmazok, hogy X bármely pontját legalább k-szor lefedik, akkor létezik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, melyre $\mu(A_i) \geq k/n$.

6. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $T : X \to Y$ egy szürjektív leképezés. Láttuk, hogy $\mathcal{B} = \{B \subset Y : T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ σ-algebra Y-on. Mutassuk meg, hogy $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ mérték lesz $\mathcal{B}$-n. (Ezt hívják a T leképezés által indukált mértéknek.) Mutassuk meg, hogy ha μ valószínűségi mérték, akkor ν is az, és ha ha μ teljes mérték, akkor ν is az.

7. Legyen $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ megszámlálható vagy } A^c \text{ megszámlálható}\}$ és μ egy mérték $\mathcal{A}$-n: $\mu(A) = 0$, ha A megszámlálható, és $\mu(A) = \infty$ különben. Legyen $Y = \{1, 2\}$, és tekintsük a $T : X \to Y$ függvényt, melyre $T(x) = 0$, ha x racionális és $T(x) = 1$, ha x irracionális. Mi lesz a T által indukált mérték Y hatványhalmazainak σ-algebráján?

8. Jelölje X az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes σ permutációinak halmazát, és tekintsük a következő valószínűségi mértéket $\mathcal{P}(X)$-en: $\mu(\sigma) = 1/n!$, ha $\sigma \in X$. Legyen

$$A_n = \{\sigma \in X : \sigma(m) \neq m, \text{ minden } m = 1, \ldots, n \text{ esetén.}\}$$

Számoljuk ki $\mu(A_n)$-et és $\lim_n \mu(A_n)$-et!

Külső mértékek

1. Az alábbi $X \neq \emptyset$ halmazokon értelmezett $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ halmazfüggvények közül melyik lesz külső mérték? Ezekben az esetekben melyek lesznek a mérhető halmazok?
   (a) Valamely $x_0 \in X$ rögzített esetén, minden $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra,

   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_0 \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A. \end{cases}$$

   (b) Minden $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén, $\mu^*(A) = 1$, valamint $\mu^*(\emptyset) = 0$.
   (c) $X = \{1, 2\}$, $\mu^*(\{1\}) = 10$, $\mu^*(\{2\}) = 10$, $\mu^*(\{1, 2\}) = 2$, $\mu^*(\emptyset) = 0$.
   (d) Legyen X egy 10×10-es rács, melynek bármely A részhalmazára legyen $\mu^*(A)$ azon oszlopok száma, amelyben van A-beli pont.

2. Legyen X a sík egységnégyzete és S a

   $$T_{ab} = \{(x, y) \in X : 0 \leq a \leq x < b \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

   alakú téglalapok halmaza. Tekintsük a

   $$\nu : S \to [0, 1], \quad \nu(T_{ab}) = b - a$$

   halmazfüggvényt! Jelölje μ^* a ν által generált külső mértéket! Mutassuk meg, hogy a $T = \{(x, y) : x = y\}$ halmaz nem mérhető!

3. Legyen μ^* külső mérték. Igazoljuk, hogy ha B mérhető, $B \subset A$ és $\mu^*(A) = \mu^*(B) < \infty$, akkor A is mérhető!

4. Legyen $X \neq \emptyset$, μ_1^*, μ_2^* külső mértékek X-en. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $\mu_1^* + \mu_2^*$ is külső mérték;
   (b) $A \subset X$ pontosan akkor mérhető μ_1^* illetve, μ_2^* szerint, ha mérhető $\mu_1^* + \mu_2^*$ szerint.

5. Legyen μ^* külső mérték X-en, $f : X \to Y$ egy tetszőleges függvény és minden $B \subset Y$ esetén,
$$\nu^*(B) := \mu^*(f^{-1}(B)).$$
Mutassuk meg, hogy ν^* külső mérték Y-on.

6. Legyen μ^* külső mérték X-en és legyen A nullmértékű. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely $B \subset X$ esetén
$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) = \mu^*(B \setminus A).$$

7. Legyen $E \subset X$ μ^*-mérhető. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset X$ esetén
$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cup A) = \mu^*(E) + \mu^*(A).$$