Analízis 2 Mértékelmélet,
3. Gyakorló feladatsor

Mértékek 2.

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Tegyük fel, hogy $A_n \in \mathcal{A}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mu(\limsup_n A_n) = 0$, azaz azon pontok, amelyek végtelen sok A_n halmaz elemei, nullmértékűek. (Ez az un *Borel-Cantelli-lemma* egyik fele.)

2. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Tegyük fel, hogy $A_n \in \mathcal{A}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$. Mutassunk példát, hogy ebből nem következik, hogy $\limsup A_n \neq \emptyset$, még akkor sem, ha plusszban feltesszük, hogy $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha μ mérték $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-en, azaz $\mathbb{R}$ részhalmazainak σ-algebráján, mely csak 0 vagy 1 értéket vehet fel, akkor vagy $\mu \equiv 0$, vagy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre minden $H \subset \mathbb{R}$ esetén
$$\mu(H) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{ha } x \notin H. \end{cases}$$

4. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy teljes mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) ha $A \cup N \in \mathcal{A}$, ahol $\mu(N) = 0$, akkor $A \in \mathcal{A}$.
   (b) ha $A, B \subset X$, melyekre $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A \triangle B) = 0$, akkor $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) = \mu(A)$.

5. Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája, és legyen μ,ν két mérték $\mathcal{A}$-n, melyekre $\nu(A) \leq \mu(A)$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Mutassuk meg, hogy a
$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) - \nu(B) : B \subset A, \nu(B) < \infty\}, \quad A \in \mathcal{A}$$
halmazfüggvény mérték $\mathcal{A}$-n, mellyel $\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$, minden $A \in \mathcal{A}$ esetén.

6. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Az A mérhető halmazra azt mondjuk, hogy **atom**, ha $0 < \mu(A) < \infty$ és valahányszor $B \subset A$, $\mu(B) < \mu(A)$, akkor $\mu(B) = 0$. Egy mértéktér (illetve a mérték) **nem atomos**, ha nem tartalmaz atomot. Ezek után
   (a) Melyek a számláló mérték atomjai?
   (b) Melyek az $a \in X$ pontra koncentrált Dirac-mérték atomjai?
   (c) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ a Lebesgue-mértékkel nem atomos.
7. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér. Bizonyítsuk be a következőket:
   (a) $A \in \mathcal{A}$ akkor és csak akkor atom, ha $\mu(A \cap B) = 0$ vagy $\mu(A \setminus B) = 0$ fennáll bármely $B \in \mathcal{A}$ esetén.
   (b) Ha μ nem atomos, akkor bármely $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén, létezik $B \subset A$, melyre $0 < \mu(B) < \varepsilon$.
   (c) Ha μ nem atomos, akkor bármely $\eta \in [0, \mu(X)]$ esetén létezik $A \in \mathcal{A}$, melyre $\mu(A) = \eta$.
8. Létezik-e olyan μ valószínűségi Borel-mérték $\mathbb{R}^n$-en, melyre $\mu(\{x\}) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re és $\mu(B)$ csak 0 vagy 1 értéket vesz fel bármely B Borel-halmazon?
9. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy valószínűségi mértéktér,$A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ X diszjunkt részhalmazai, melyekre $\mu(A_n) = 1/3$, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Mutassuk meg, hogy az
$$A = \{x \in X : x \text{ legalább négy különböző } A_n\text{-be tartozik}\}$$
   halmaz mérhető és pozitív mértékű. Állíthatjuk-e ugyanezt, ha csak 9 halmazunk van?
10. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, (A_n) mérhető halmazok egy olyan fogyó sorozata, melyre $\mu(A_1) < \infty$, $\mu(A_1 \setminus A_2) = 1/3$ és $\mu(A_n \setminus A_{n+2}) = 2^{-n}$. Számoljuk ki $\mu(\cup_n (A_n \setminus A_{n+1}))$-et!

Lebesgue-mérték, Lebesgue-Stieltjes-mérték 1.

11. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy pozitív tagú divergens sor. Mutassuk meg, hogy vannak olyan $I_n \subset [0, 1]$ intervallumok, hogy $|I_n| \leq a_n$ minden n-re, és $\limsup_n I_n = [0, 1]$. ($|I|$ az I intervallum hosszát (Lebesgue-mértékét) jelöli.)
12. Mutassuk meg, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ nullmértékű, akkor betolható az irracionális számokba, azaz van olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $h + c$ irracionális minden $h \in H$-ra.

13. Mutassuk meg, hogy ha $E \subset [0,1]$ mérhető halmazra fennáll, hogy $\lambda(E) = 1$, akkor E sűrű halmaz $[0,1]$-ben.

14. Mutassuk meg, hogy ha $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, akkor létezik olyan A F_σ és B G_δ halmaz, melyre $A \subseteq E \subseteq B$ és $\lambda(B \setminus A) = 0$.

15. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$
Mi az f függvény által generált μ_f Lebesgue-Stieltjes-mérték $\mathbb{R}$-en?