3/1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$

$\Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$

$$A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}_{B_N} = \bigcap_{N=1}^{\infty} B_N$$

$$\mu(B_N) = \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-szubadditivitás})$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = 0$$

Mivel $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} B_N \subseteq B_N$ $\forall N$-re $\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B_N)$ $\forall N$-re

(mérték monotonitás)

$\Rightarrow \underline{\underline{\mu(A) = 0}}$

!

3/2

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A_n \in \mathcal{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$.

Igaz-e, hogy a) $\limsup A_n \neq \emptyset$?

b) $\limsup A_n \neq \emptyset$, feltéve, hogy $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$?

---

a) $A_n := (0, \frac{1}{n})$ $\forall n$-re μ = Lebesgue-mérték $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$$\limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} (0, \tfrac{1}{n})}_{(0, \frac{1}{N})} = \emptyset \quad \Rightarrow \text{nem igaz}$$

ez jó b)-re is, mert $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 < \infty$

!

3/3 Mutassuk meg, hogy ha μ mérték $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-en, azaz $\mathbb{R}$ összes részhalmazán és μ csak a 0 vagy 1 értéket veszi fel, akkor vagy $\mu \equiv 0$, vagy $\exists$ olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy
$$\mu(H) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H \\ 0, & \text{ha } x \notin H \end{cases}, \quad \forall H \subset \mathbb{R}\text{-re}.$$

Tegyük fel, hogy $\mu \not\equiv 0$. Ekkor $0 \neq \mu(\mathbb{R}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu([n-1,n])$,

így $\exists$ $n \in \mathbb{Z}$, melyre $\mu([n-1,n]) > 0$, de ekkor a feltétel miatt
$$\mu([n-1,n]) = 1.$$

$I_1 := [n-1,n]$. Tfh $k \geq 1$ és már definiáltuk I_k korlátos, zárt intervallumot, melyre $\mu(I_k) = 1$.

Felezzük el I_k-t $\Rightarrow$ legalább az egyik félintervallum mértéke pozitív, azaz 1.

felezőpont tartozzon mindkettőhöz

$\Downarrow$

legyen az I_{k+1}

$\Rightarrow$ definiáltunk egy $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ intervallumsorozatot, melyek zártak + korlátosak $\xRightarrow{\text{Cantor}}$ $\exists!$ egy közös pontjuk:
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x\}$$

$I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ és $\mu(I_1) < \infty$ $\Rightarrow$ $\mu(\{x\}) = \lim_{k \to \infty} \mu(I_k) = 1$.

$\hookrightarrow$ ha $x \in H \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mu(H) = 1$

$\hookrightarrow$ $\mu(\mathbb{R}) = 1$ $\Rightarrow$ $\mu(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ $\Rightarrow$ $\mu(H) = 0$, ha $x \notin H$!

3/4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér. Biz. be, hogy

a) ha $A \cup N \in \mathcal{A}$, ahol $\mu(N) = 0 \implies A \in \mathcal{A}$

b) ha $A, B \subset X$, melyekre $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A \Delta B) = 0$

$$\implies B \in \mathcal{A} \text{ és } \mu(B) = \mu(A).$$

---

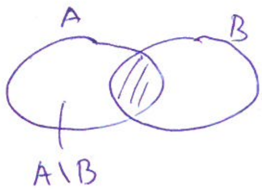
a) $A = [(A \cup N) \setminus N] \cup (A \cap N)$

$$\left.\begin{array}{ll} A \cup N \in \mathcal{A} & (\text{feltétel}) \\ N \in \mathcal{A} & (\Leftarrow \mu(N) = 0) \end{array}\right\} \implies (A \cup N) \setminus N \in \mathcal{A}$$

$A \cap N \subset N$ + μ teljes $\implies A \cap N \in \mathcal{A}$ és $\mu(A \cap N) = 0$

$\implies A \in \mathcal{A}$ ✓

b)



$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

- $A \in \mathcal{A}$
- $A \setminus B \subset A \Delta B$ + μ teljes $\implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ és $\mu(A \setminus B) = 0$

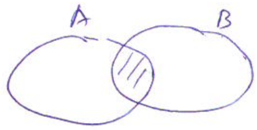
$\Downarrow$

$A \cap B \in \mathcal{A}$

Hasonlóan $B \setminus A \subset A \Delta B$ + μ teljes $\implies B \setminus A \in \mathcal{A}$ és $\mu(B \setminus A) = 0$

$\implies B = (A \cap B) \underset{\text{diszjunktak}}{\cup} (B \setminus A) \in \mathcal{A}$. ✓

$\mu(B) \underset{A \in \mathcal{A}}{=} \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B) + 0 \leq \mu(A)$ és



$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B) + 0 \leq \mu(B) \implies \mu(A) = \mu(B)$ □

$\boxed{3/5}$ $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, melyen van két mérték: μ, ν, melyre $\nu(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Biz be, hogy

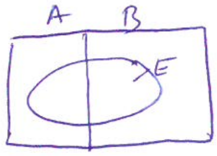
$$\lambda(A) := \sup\{\mu(B) - \nu(B) : B \subset A,\ \nu(B) < \infty\} \qquad A \in \mathcal{A}$$

mérték $\mathcal{A}$-n, mellyel $\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

- $\lambda(\emptyset) = 0$ ✓
- λ additív:

$A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$. Ha $E \subset A \cup B$ és $\nu(E) < \infty$

$\hookrightarrow$ $\mu(E) - \nu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B) - \nu(E \cap A) - \nu(E \cap B) =$



$= \big(\mu(E \cap A) - \nu(E \cap A)\big) + \big(\mu(E \cap B) - \nu(E \cap B)\big) =$

$\leq \lambda(A) + \lambda(B)$

$\Downarrow \sup_E$

$\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$

másrészt: ! $A' \subset A$, $\nu(A') < \infty$; $B' \subset B$, $\nu(B') < \infty$ $\Rightarrow$ $A' \cap B' = \emptyset$ $(\Leftarrow A \cap B = \emptyset)$, $\nu(A' \cup B') < \infty$

$\hookrightarrow$ $\mu(A') - \nu(A') + \mu(B') - \nu(B') = \mu(A' \cup B') - \nu(A' \cup B') \leq$

$\leq \lambda(A \cup B)$

$\Downarrow \sup_{A', B'}$

$\lambda(A) + \lambda(B) \leq \lambda(A \cup B)$

$\Rightarrow$ $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B)$ ✓

∂ emL: láttuk előadáson:

$(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $\psi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ <u>végesen additív</u>

ψ σ-additív $\iff$ Ha $(A_n) \subset \mathcal{A}$ monoton fogyó halmazsorozat, melyre $\bigcap_n A_n = \emptyset$

$\Rightarrow \lim_n \psi(A_n) = 0$.

(4) $\iff$ Ha $(A_n) \subset \mathcal{A}$ monoton növő halmazsorozat, melyre $A = \bigcup_n A_n \Rightarrow \lim_n \lambda(A_n) = \lambda(A)$

↳ Legyen (A_n) monoton növő, melyre $A = \bigcup_n A_n$.

(A_n) monoton növő $\Rightarrow$ $(\lambda(A_n)) \nearrow$ és $\lim_n \lambda(A_n) \leq \lambda(A)$

Legyen $B \subset A$, $\nu(B) < \infty$. $\Rightarrow$ $(B \cap A_n) \nearrow B$ halmazsorozat

$\Downarrow$

- $\mu(B \cap A_n) \nearrow \mu(B)$
- $\nu(B \cap A_n) \nearrow \nu(B) < \infty$
- $\lambda(B \cap A_n) \nearrow$ és

$\lim_n \lambda(B \cap A_n) \leq \lambda(B)$

$\Rightarrow$ $\lambda(B) \cancel{\leq} \mu(B) - \nu(B) = \lim_n \mu(B \cap A_n) - \lim_n \nu(B \cap A_n) =$

$= \lim_n \lambda(B \cap A_n) \leq \lim_n \lambda(A_n) \leq \lambda(A)$

$\Downarrow \sup_{B \subset A}$

$\lambda(A) \leq \lim_n \lambda(A_n) \leq \lambda(A)$ $\Rightarrow$ <u>λ mérték</u>

3/5 folyt.

ellenőrizni kell, hogy $\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$\nu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A) - \nu(A) \leq \lambda(A)$ (def)

$$\Downarrow$$

$$\mu(A) \leq \lambda(A) + \nu(A).$$

ha $B \subset A$, $\nu(B) < \infty \rightsquigarrow \mu(B) - \nu(B) + \nu(A) =$

$$= \mu(B) + \nu(A \setminus B) \underset{\mu \geq \nu}{\leq} \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$$

$$\Rightarrow \lambda(A) + \nu(A) = \sup_{B \subset A} \{\mu(B) - \nu(B) + \nu(A)\} \leq \mu(A)$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lambda(A) + \nu(A)$$

!

3/6| $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $A \in \mathcal{A}$ atom, ha $0 < \mu(A) < \infty$ és

$B \subset A$, $\mu(B) < \mu(A) \Rightarrow \mu(B) = 0$

a) Számláló mérték atomjai?

számláló mérték: $\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{ha } A \text{ véges} \\ \infty, & \text{ha } A \text{ nem véges} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ $A = \{a\}$ 1 pont halmaz $\Rightarrow$ • $\mu(A) = 1 > 0$ ✓

• $B \subset A$, $\mu(B) < \mu(A) \Leftrightarrow B = \{0\}$

$\mu(B) = 0$

$\Downarrow$

1 pont halmazok atomok

Ha A nem 1 pont halmaz, de $\mu(A) < \infty \Rightarrow \cancel{\nexists}\ \exists N \in \mathbb{N}$

$\mu(A) = N$

$\forall B \subset A$, $B \neq \emptyset$-re

$\mu(B) < \mu(A)$, de

$\mu(B) \neq 0$

$\Rightarrow$ csak az 1 pont halmazok az atomok.

b) $a \in X$-re koncentrált Dirac-mérték atomjai?

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha } a \notin A \\ 1, & \text{ha } a \in A \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\forall$ a pontot tartalmazó halmaz atom, hiszen

ha $a \in A \Rightarrow \mu(A) = 1 > 0$

$\forall B \subset A$, $\mu(B) < \mu(A) \Leftrightarrow a \notin B \Rightarrow \mu(B) = 0$

egyéb halmaz nem lehet atom.

o!

c) Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en nem atomos:

! $A \in \mathbb{R}$ mérhető, $\lambda(A) > 0$

Legyen $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda([n, n+1] \cap A) =: \delta > 0$

Osszuk fel $[n, n+1]$-t véges sok δ-nál rövidebb részintervallumra! Az egyiket jelölje: I

↳ $\underbrace{\lambda([n, n+1] \cap A \cap I)}_{=: E} > 0$

° $E \subset A$ mérhető

° $0 < \lambda(E) < \delta \leq \lambda(A)$

$\Downarrow$

A nem atom

$\Longrightarrow$ Lebesgue-mérték nem atomos. ☺!

$\boxed{3/7.}$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér.

a) $A \in \mathcal{A}$ atom $\Longleftrightarrow$ $\mu(A \cap B) = 0$ vagy $\mu(A \setminus B) = 0$
$\forall\, B \in \mathcal{A}$-ra

b) Ha μ nem atomos $\Rightarrow$ $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$, $\varepsilon > 0$ esetén
$\exists\, B \subset A$, melyre $0 < \mu(B) < \varepsilon$.

c) Ha μ nem atomos $\Rightarrow$ $\forall\, \eta \in [0, \mu(X)]$ esetén $\exists\, A \in \mathcal{A}$,
melyre $\mu(A) = \eta$

---

a) $\Rightarrow$: t.f.h. $A \in \mathcal{A}$ atom.

Ha $\mu(A \cap B) = 0$ $\rightsquigarrow$ készen vagyunk.

$\hookrightarrow$ T.f.h. $\mu(A \cap B) > 0$. $A \cap B \subset A$ $\Rightarrow$ $\cancel{\mu(A \cap B) = \mu\ (A \text{ atom}})$
$\mu(A \cap B) = \mu(A)$

(hiszen, ha $\mu(A \cap B) < \mu(A)$ lenne,
akkor $\mu(A \cap B) = 0$, mert A atom)

$\hookrightarrow$ $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A) = 0$

$\Rightarrow$ $\mu(A \setminus B) = 0$ ✓

$\Leftarrow$: ! $B \subset A$, melyre $\mu(A) > \mu(B)$.

T.f.h. $\mu(B) > 0$ (indirekt).

$A = B \overset{*}{\cup} (A \setminus B)$ $\Rightarrow$ $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) > 0$

De $\mu(A \cap B) \underset{\substack{\cap \\ B \subset A}}{=} \mu(B) > 0$

$\lightning$ a feltétel miatt

$\Downarrow$

$\mu(B) = 0$, vagyis A atom. !

b) μ nem atomos $\Rightarrow$ $\exists$ B_0 mérhető, melyre

- $B_0 \subset A$
- $0 < \mu(B_0) < \mu(A) < \infty$.

Definiáljunk egy fogyó $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ sorozatot:

<u>indukcióval</u>: ha B_{n-1} megvan, legyen $C \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $0 < \mu(C) < \mu(B_{n-1})$

$\Downarrow$

legyen $B_n = C$ vagy $B_{n-1} \setminus C$ attól függően, hogy melyik mértéke $\leq \dfrac{\mu(B_{n-1})}{2}$

$\Rightarrow$ $B_n \subset A$ és $0 < \mu(B_n) \leq \dfrac{\mu(B_0)}{2^n}$

$\downarrow$

tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy

$\hookrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists$ $B_n \subset A$: $\mu(B_n) < \varepsilon$

!
☺

3/7 folyt.

c) Legyen $A \in \mathcal{A}$ melyre $\mu(A) \leq \eta$.

$$\mathcal{F}(A) := \{ B \in \mathcal{A} : A \subset B,\ \mu(B) \leq \eta \}$$

$$\varphi(A) := \sup \{ \mu(B) : B \in \mathcal{F}(A) \}.$$

Mivel $\mu(A) \leq \eta \Rightarrow A \in \mathcal{F}(A)$.

Definiáljunk induktíve egy növő $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ sorozatot: (mérhetőek)

- $A_0 := \emptyset$
- Ha A_{n-1} adott, legyen $A_n \in \mathcal{F}(A_{n-1})$ olyan, hogy

$$\varphi(A_{n-1}) - \frac{1}{n} \leq \mu(A_n) \leq \varphi(A_{n-1})$$

$\hookrightarrow$ így $\forall n$-re $\mu(A_n) \leq \eta$.

$A := \bigcup_n A_n$. Mivel $A_n \nearrow$ és $\mu(A_n) \leq \eta$ $\forall n$-re

$\hookrightarrow$ $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n) \leq \eta$.

Megmutatjuk, hogy $\mu(A) = \eta$.

<u>Indirekt</u>: Tfh $\mu(A) < \eta$.

(a) miatt $\exists\, C \subset X \setminus A$ mérhető, hogy $0 < \mu(C) < \eta - \mu(A)$

$\Rightarrow \mu(A \cup C) < \eta \rightsquigarrow \varphi(A_n) - \frac{1}{n} \leq \mu(A_{n+1}) \leq \mu(A) < \mu(A \cup C) < \eta$.

Mivel $A \cup C \in \mathcal{F}(A_n) \Rightarrow \mu(A \cup C) \leq \varphi(A_n)$, nellyel

$\varphi(A_n) - \frac{1}{n} \leq \mu(A) < \mu(A \cup C) \leq \varphi(A_n) \Rightarrow 0 < \mu(C) = \mu(A \cup C) - \mu(A) < \frac{1}{n}$: ↯ ($\forall n$-re)

$\mu(A) = \eta \Leftarrow$ ‼

|3/8| Létezik-e olyan véges Borel-mérték $\mathbb{R}^n$-en, melyre $\mu(\{x\})=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$-re és $\mu(B)$ 0 v 1 $\forall B$ Borelre?

<u>NEM</u>, ugyanis:

$\forall x\in\mathbb{R}^n$-re $\quad \lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcap_{k=N}^{\infty}B(x,\tfrac{1}{k})\right)=\mu(\{x\})=0$

de mivel μ csak 0 v 1 értéket vehet fel, ezért

elég nagy N-re $\quad \mu\left(\bigcap_{k=N}^{\infty}B(x,\tfrac{1}{k})\right)=0$

Másrészt, mivel $\quad \mu\left(\bigcap_{k=N}^{\infty}B(x,\tfrac{1}{k})\right)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(B(x,\tfrac{1}{k})\right)$

ezért elég nagy k_x-re $\quad \mu\left(B(x,\tfrac{1}{k_x})\right)=0$,

! $Q\in\mathbb{R}^n$ egy zárt kocka, pozitív mértékkel ($\mu(Q)=1$)

$\forall x\in Q$-ra $\quad B_x:=B(x,\tfrac{1}{k_x})$, melyre $\mu(B_x)=0$.

Q-nak $\bigcup_{x\in Q}B_x$ egy lefedése, melyből a Heine-Borel tétel miatt kiválasztható $B_{x_1},\dots,B_{x_n}$-ből álló véges fedés: $\quad Q\subset\bigcup_{k=1}^{N}B_{x_k}$

$\mu(Q)=1\le\sum_{k=1}^{N}\mu(B_{x_k})=0 \quad ; \lightning$

!

3/9 $(X,\mathcal{A},\mu)$ véges mértéktér.

$A_1, A_2, \dots, A_{10} \subset X$ diszjunktak, melyre $\mu(A_n) = \frac{1}{3}$ $n = 1, \dots, 10$.

$\Rightarrow A = \{x \in X : x$ legalább négy különböző A_n-be tartozik$\}$ $\rightsquigarrow$ A mérhető és pozitív mértékű

$B_k := \{x \in X : x$ legalább k db A_n-ben tartozik$\}$ $k = 1, \dots, 10$.

$\hookrightarrow$ $$B_k = \bigcup_{1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k \le 10} \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} \right) \rightsquigarrow B_k \text{ mérhető } \forall k\text{-ra}$$

mérték: $$\sum_{n=1}^{10} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{10} \mu(B_k)$$

$\hookrightarrow$ $$\frac{10}{3} = \sum_{n=1}^{10} \mu(A_n) \le \mu(B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) + 7\mu(B_4)$$

$\Uparrow$

$B_1 \supset B_2 \supset \dots$

de $\mu(B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) \le 3$ (μ végigmérték)

$\Downarrow$

$$\mu(B_4) \ge \frac{\frac{10}{3} - 3}{7} = \frac{1}{21} > 0 \quad \checkmark$$

~~Megj. 9 halmazra nem működik:~~

~~pl.: $X = [0,1]$, $\mu = \lambda$ (Lebesgue-mérték)~~

~~$A_1 = A_2 = A_3 = (0, \frac{1}{3})$~~

~~$A_4 = A_5 = A_6 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ $\Rightarrow \mu(B_4) = 0$~~

~~$A_7 = A_8 = A_9 = (\frac{2}{3}, 1)$~~

3/9 folyt.

Megj: 9 halmazra nem működik. $\mu = \lambda$ $X = [0,1]$-en

$A_1 = A_2 = A_3 = [0, \frac{1}{3}]$

$A_4 = A_5 = A_6 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{9} A_i = \emptyset$, $\mu(A_i) = \frac{1}{3}$

$A_7 = A_8 = A_9 = (\frac{2}{3}, 1]$

de $\mu(B_4) = 0$

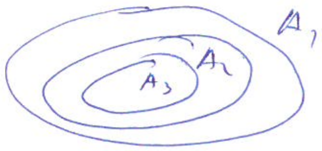
o!

$\boxed{3/10}$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $(A_n) \subset \mathcal{A}$ fogyó sorozat.

$\mu(A_1) < \infty$, $\mu(A_1 \setminus A_2) = \frac{1}{3}$, $\mu(A_n \setminus A_{n+2}) = 2^{-n}$.

$\mu\left(\bigcup_n (A_n \setminus A_{n+1})\right) = ?$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots$



$\mu(A_1) < \infty$

$A_1 = \bigcup_n^{*} (A_n \setminus A_{n+1}) \Rightarrow \mu(A_1) = \sum_n \mu(A_n \setminus A_{n+1})$

$\mu(A_1 \setminus A_2) = \frac{1}{3}$, $\mu(A_2 \setminus A_3) \underset{\uparrow}{=} \mu(A_1 \setminus A_3) - \mu(A_1 \setminus A_2) =$

$(A_1 \setminus A_2) \cup^{*} (A_2 \setminus A_3) = A_1 \setminus A_3$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

indukcióval $\Rightarrow$ $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\mu\left(\bigcup_n (A_n \setminus A_{n+1})\right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}$

Megj: $\mu(A_1) < \infty$ kell, mert különben pl

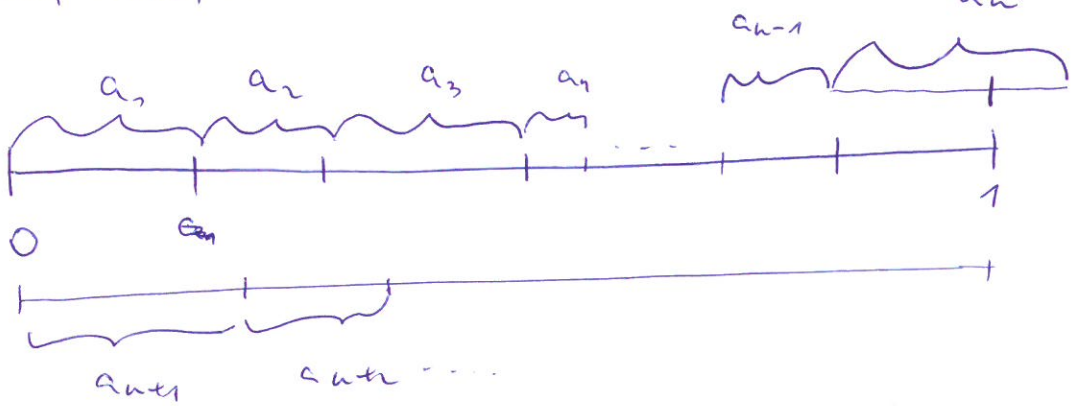
$A_1 = [0, \infty)$, $A_2 = [\frac{1}{3}, \infty)$, $A_3 = [\frac{1}{2}, \infty)$ ... -re divergál.

3/11

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú divergens sor. Mutassuk meg, hogy vannak olyan $I_n \subset [0,1]$ intervallumok, hogy $\lambda(I_n) \leq a_n$ $\forall n$-re (λ a Lebesgue mértéket jelöli), és $\limsup I_n = [0,1]$.

Egy lehetséges konstrukció:

A 0 ponttól kezdve illesszünk egymáshoz $a_1, a_2, \dots$ hosszúságú intervallumokat, míg az 1-et el nem érjük, ha az n-ediknél elérjük, akkor az n-ediket 1-nél vágjuk le, és 0-nál kezdjük elölről az eljárást $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ -vel:



az eljárást folytatjuk végtelenségig.

$\Rightarrow$ • az így kapott I_n intervallumokra nyilván teljesül, hogy

$\lambda(I_n) \leq a_n$ $\forall n$-re

• $[0,1]$ $\forall$ pontja végtelen sok I_n intervallum eleme

$\Rightarrow \limsup I_n = [0,1]$

∘!

3/13 Mutassuk meg, hogy ha $E \subset [0,1]$ mérhető, $\lambda(E)=1$, akkor E sűrű $[0,1]$-ben.

! $I \subset [0,1]$ intervallum. $I \neq \emptyset$

Ha $I \cap E = \emptyset \rightsquigarrow \lambda(E)+\lambda(I) = \lambda(E \cup I) \leq \lambda([0,1]) = 1$

$\hookrightarrow \lambda(E) \leq 1 - \lambda(I) < 1 \quad : \lightning$

$\Rightarrow I \cap E \neq \emptyset \quad \forall\, I$ részintervallumra $\Rightarrow$ vagyis E sűrű mindenhol

$\Downarrow$

E sűrű $[0,1]$-ben.

3/14 $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető $\Rightarrow \exists\, A$ F_σ és B G_δ halmaz: $A \subseteq E \subseteq B$ és $\lambda(B \setminus A) = 0$. !

- $\forall\, k \in \mathbb{N}$-re $\exists\, C_k$ zárt (kompakt): $C_k \subseteq E$ és $\lambda(E \setminus C_k) < \frac{1}{k}$ (ld. előadás)
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$-re $\exists\, V_k$ nyílt: $E \subseteq V_k$ és $\lambda(V_k \setminus E) < \frac{1}{k}$ (ld. előadás)

$$\left.\begin{array}{l} A := \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad (F_\sigma\text{-halmaz}) \\ B := \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \quad (G_\delta\text{-halmaz}) \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq E \subseteq B$$

$$\lambda(B \setminus A) \leq \lambda(V_k \setminus C_k) = \lambda((V_k \setminus E) \cup (E \setminus C_k)) \leq$$

$$\leq \lambda(V_k \setminus E) + \lambda(E \setminus C_k) < \frac{2}{k} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \lambda(B \setminus A) = 0$$

!

3/12 | ! $H \subset \mathbb{R}$ nullmértékű. Ekkor H beltolható az irracionális számokba, azaz $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $h+c$ irracionális $\forall\, h \in H$-ra

---

$$C := \{ c : H+c \text{ \underline{nem} részhalmaza az irrac. számoknak} \}$$

azaz, ha $c \in C$, akkor $\exists\, x \in H$, melyre $x + c = r \in \mathbb{Q}$.

$$\Downarrow$$

$$C = \{ r - x : x \in H, r \in \mathbb{Q} \}, \text{ vagyis}$$

C lefedhető $(-H)+r$ halmazokkal, ahol $r \in \mathbb{Q}$

H nullmértékű $\Rightarrow$ $-H$ és $(-H)+r$ is nullmértékű

$\Downarrow$ ezek megszámlálható uniója is 0 mértékű

C nullmértékű

$\hookrightarrow \mathbb{R} \setminus C \neq \emptyset \leadsto$ ha $\cancel{c \notin \mathbb{R}\setminus C}$ $c \in \mathbb{R} \setminus C$

$$\Downarrow$$

$$H + c \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

3/15/

Legyen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$. Mi az f által generált μ_f Lebesgue–Stieltjes-mérték $\mathbb{R}$-en?

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges.

- ~~Tfh~~ Tfh $0 \in H$ és H-t lefedik az $[a_n, b_n)$ intervallumok.

$\hookrightarrow f(b_n) - f(a_n) = 1$, ha $0 \in [a_n, b_n)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(b_n) - f(a_n) \right) \ge 1.$$

Legyen $[a_n, b_n) = [n-1, n)$ $n \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ lefedőrendszer és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n) - f(n-1) \right) = \cancel{f(1) - f(0)} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(f(n) - f(n-1) \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \ldots + f(N) - f(N-1) \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(f(N) - f(0) \right) = 1 - 0 = 1$$

Vagyis az infimum felvétetik pl erre a fedőrendszerre $\Rightarrow$ $\boxed{\mu_f(H) = 1, \text{ ha } 0 \in H}$

- Tfh $0 \notin H$. $\Rightarrow$ H lefedhető olyan rendszerrel, amelyik nem tartalmazza a 0-t. Ilyen fedésre:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(b_n) - f(a_n) \right) = 0$$

Megj: ilyen fedés pl: $[n-1, n)$, ha $n = -1, -2, \ldots$ és $[\frac{1}{k}, k)$ $k = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \mu_f(H) = 0$, ha $H \notin H$

Vagyis: $\mu_f(H) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \notin H \\ 1, & \text{ha } 0 \in H \end{cases}$ $\Rightarrow$ 0-ra koncentrált Dirac-mérték