Analízis 2 Mértékelmélet,
4. Gyakorló feladatsor

Lebesgue-mérték, Lebesgue-Stieltjes-mérték 2.

1. Jelöljük $A_n(x)$-szel az $x = 0,a_1a_2\dots$ tizedestörtben az első n jegy között előforduló 7-es számjegyek számát. (Ha a tizedesjegy nem egyértelmű, akkor vegyük azt az alakot, amelyben minden jegy 0 valahonnan kezdve.) Mutassuk, meg, hogy az
$$A = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{n} = \frac{1}{10} \right\}$$
halmaz Borel-halmaz.

2. Legyen $l > 1$ egész szám. Minden $x \in [0,1]$-re tekintsük x „l-adikus törtekben” való kifejtését, azaz
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{l^n}, \quad 0 \le x_n \le l-1.$$
Mutassuk meg az alábbi halmazokról, hogy Borel-mérhetőek és számítsuk ki a Lebesgue-mértéküket.
   (a) $A_n(k) = \{x \in [0,1] : x_n = k\}$, ahol $0 \le k \le l-1$.
   (b) $A^k = \{x \in [0,1] : x_n \ne k, \text{ minden } n\text{-re}\}$, ahol $0 \le k \le l-1$.
   (c) $B_k = \{x \in [0,1] : x_n = k, \text{végtelen sok } n\text{-re}\}$, ahol $0 \le k \le l-1$.

3. Tekintsük a következő halmazt:
$$A = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \in [0,1] : x_k = 0 \text{ vagy } 1, \text{ és } x_{2k} = 0 \text{ minden } k\text{-ra} \right\}.$$
Mutassuk meg, hogy A kompakt, nem megszámlálható, sehol sem sűrű, nullmértékű halmaz.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre az $\{f(x) : x \in [a, b], f'(x) = 0\}$ halmaz nullmértékű.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(A) > 0$, akkor van olyan I intervallum, amelyre $\lambda(I \cap A) > 0,99 \cdot \lambda(I)$.

Mérhető függvények 1.

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, f egy mérhető függvény X-en és $g = f$ μ-m.m. Igaz-e, hogy g mérhető?
2. Legyen $X = (0, 1]$. Tekintsük X részhalmazainak következő σ-algebráit:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}(\{(0, 1/2], (1/2, 3/4], (3/4, 1]\}), \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{M}(\{(0, 1/4], (1/4, 1/2], (1/2, 1]\}),$$

ahol $\mathcal{M}(A)$ jelöli az A halmaz által generált σ-algebrát. Adjunk meg olyan f függvényt X-en, amely

   (a) $\mathcal{A}_1$-mérhető, de nem $\mathcal{A}_2$-mérhető.
   (b) $\mathcal{A}_2$-mérhető, de nem $\mathcal{A}_1$-mérhető.
   (c) $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ szerint is mérhető.
   (d) sem $\mathcal{A}_1$, sem $\mathcal{A}_2$ szerint nem mérhető.

3. Jelölje $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}^2$ sík $\mathcal{B}(0, r)$ nyílt gömbjei által generált σ-algebrát! Bizonyítsuk be a következőket:

   (a) Az

$$u : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \quad u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

   függvény mérhető.

   (b) A

$$v : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}), \quad v(x) = (x, 0)$$

   függvény mérhető.

4. Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-szerint nem mérhető függvényt, melyre fennáll, hogy ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $|g(x) - f(x)| < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, akkor g sem Lebesgue-mérhető. (Használjuk fel, hogy mutattunk példát nem Lebesgue-mérhető halmazra!)
5. Legyen $f \in C[0, 1]$. Mutassuk meg, hogy az

$$A = \{x \in [0, 1] : f(x) > f(y), \text{ minden } y \in [0, x) \text{ esetén}\}$$

Borel-mérhető halmaz.

6. Legyen (f_n) egy valós értékű mérhető függvényekből álló sorozat az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmazok mérhetőek:

   (a) $A = \{x \in X : f_n(x) \to \infty\}$.

   (b) $B = \{x \in X : f_n(x) \to -\infty\}$.

   (c) $C = \{x \in X : \lim_n f_n(x) \text{ létezik } \mathbb{R}\text{-ben}\}$.