

1. MINTA ZÁRTHELYI

Analízis 2.
MATEMATIKA BSc

2024. április 9.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név: _____

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5*.	Σ

1. (10 pont) Legyen X az alaphalmaz és $A \subset X$ rögzített. Határozzuk meg a $\{B : A \subseteq B \subseteq X\}$ halmazok által generált σ -algebrát!
2. (10 pont) Tekintsük az $E_n = (-1/n, n]$ intervallumsorozatot! Mi lesz $\overline{\lim} E_n$ illetve $\underline{\lim} E_n$?
3. (10+5+5 pont)
Legyen $X = \{1, 2, 3, 4\}$ az alaphalmaz, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}\} \subset \mathcal{P}(X)$ egy halmazrendszer, és tekintsük a $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu(\{1\}) = 2$, $\nu(\{4\}) = 4$, $\nu(\{1, 2\}) = 1$, $\nu(\{1, 2, 4\}) = 3$ halmazfüggvényt.
 - (a) Adja meg a ν halmazfüggvény által generált külső mértéket!
 - (b) Adjon példát, amennyiben van, nem mérhető halmazra!
 - (c) Igaz-e, hogy ν premérték (előmérték)? Válaszát indokolja!
4. (10 pont) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre az $\{f(x) : x \in [a, b], f'(x) = 0\}$ halmaz nullmértékű.
5. (10 pont - BÓNUSZ)

Tekintsük a következő halmazt:

$$A = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \in [0, 1] : x_k = 0 \text{ vagy } 1, \text{ és } x_{2k} = 0 \text{ minden } k\text{-ra} \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy A kompakt, nem megszámlálható, sehol sem sűrű, nullmértékű halmaz.