1

Szorzatmérték és a Fubini-tétel

$(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$: mértékterek

$X := X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$

<u>Cél:</u> szeretnénk mértéket definiálni X-en μ_1 és μ_2 segítségével

1. <u>mérhető téglák</u> : $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{A}_1 \\ B \in \mathcal{A}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \times B$

2. $\mathcal{A} := \{$mérhető téglák véges diszjunkt uniójaként előálló halmazok$\}$

   ↳ algebrát alkotnak

   $\mu_0(A \times B) := \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) \Rightarrow \mu_0$ <u>pre-mérték (előmérték)</u> $\mathcal{A}$-n

3. Caratheodory $\Rightarrow$ μ_0-mérhetők által generált σ-algebra : $\mathcal{M}$

$$\Downarrow$$

$\mu := \mu_0|_{\mathcal{M}}$ mérték $\mathcal{M}$-en

<u>Jel:</u> $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

$\Rightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{M}, \mu_1 \times \mu_2)$: <u>szorzatmértéktér</u>

<u>Def:</u> $E_{x_1} := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$ <u>$E \in \mathcal{M}$ szeletei</u>

$E^{x_2} := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$

②

Eml: $\mathcal{A}_\sigma$: azon halmazok, melyek előállnak $\mathcal{A}$ elemeinek megszámlálható uniójaként

$\mathcal{A}_{\sigma\delta}$: $\mathcal{A}_\sigma$ elemeinek megszámlálható metszetei

Áll: Ha $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, akkor E^{x_2} μ_1-mérhető $\forall x_2 \in X_2$ esetén és $\mu_1(E^{x_2})$ μ_2-mérhető függvény.

Ekkor
$$\int_{X_2} \mu_1(E^{x_2})\, d\mu_2 = (\mu_1 \times \mu_2)(E)$$

Biz • Ha $E = A \times B$ mérhető tégla $\Rightarrow$ triviális

• Tfh $E \in \mathcal{A}_\sigma$ $\Rightarrow$ $E = \bigcup_j^* E_j$ ↑ téglák ($E_j \in \mathcal{A}$)

$\Rightarrow$ $\forall x_2 \in X_2$ $E^{x_2} = \bigcup_j E_j^{x_2}$ és $E_j^{x_2}$-k diszjunktak

↳
$$\int_{X_2} \mu_1(E_j^{x_2})\, d\mu_2 = (\mu_1 \times \mu_2)(E_j)$$

• Tfh $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ és $(\mu_1 \times \mu_2)(E) < \infty$ (csak azt az esetet bizonyítjuk)

$\Rightarrow$ $\exists\, (E_j) \subset \mathcal{A}_\sigma$, $E_{j+1} \subset E_j$: $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$

③

$$f_j(x_2) := \mu_1(E_j^{x_2})$$

$$f(x_2) := \mu_1(E^{x_2})$$

$\Rightarrow$ $E_j^{x_2} \nearrow E^{x_2}$ $\rightsquigarrow$ E^{x_2} mérhető

$\hookrightarrow$ $f_j(x_2) \longrightarrow f(x_2)$ $\forall x_2$ $\Rightarrow$ $f(x_2)$ mérhető

$f_j(x_2) \geq 0$ és $(f_j) \nearrow$ $\underset{\text{monoton konv. tétel}}{\Rightarrow}$ $\displaystyle\int_{X_2} f(x_2)\, d\mu_2(x) = \lim_{j\to\infty} \int_{X_2} f_j(x_2)\, d\mu_2(x)$

$\circ$!

Állítás: Ha $E \subset X$ tetsz. mérhető, akkor E^{x_2} μ_1-mérhető és $\mu_1(E^{x_2})$ jól definiált m.m. $x_2 \in X_2$ esetén.

TÉTEL (Fubini-tétel)

Tfh $f(x_1, x_2) \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$, vagyis integrálható függvény $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$-n.

Ekkor

(i) $f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ szelet m.m. $x_2 \in X_2$ esetén integrálható (X_1, μ_1)-en $\left(f^{x_2} \in L^1(X_1, \mu_1)\right)$

(ii) $f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$ szelet m.m. $x_1 \in X_1$ esetén integrálható (X_2, μ_2)-n $\left(f_{x_1} \in L^1(X_2, \mu_2)\right)$

(iii) $\displaystyle\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1$ integrálható (X_2, μ_2)-n

(iv) $\displaystyle\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2$ integrálható (X_1, μ_1)-n

(v) $\displaystyle\int_{X_2} \left[\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right] d\mu_2 = \int_{X_1} \left[\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int_{X_1 \times X_2} f \, d\mu_1 \times d\mu_2$.

(3)

Biz.

Tfh $f \geq 0$, $f := \chi_E$-re a fenti állítást

adja vissza ✓

$\Downarrow$ lineárkombinációkra is fennáll

egyszerű függvényekre igaz

$\Downarrow$ monoton konvergencia tétel

nemnegatív függvényekre is igaz

$\Downarrow$

ezek lineárkombinációjával ~~$\forall$ mérhető~~ integrálhatóra

igaz

$\circ$!

Példák:

Gyakran alkalmazható nehezebb integrálok kiszámításánál:

(1) Biz be $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-y}\sin^2 y}{y}\,dy = \frac{\ln 5}{4}$.

Ötlet: tekintsük az $f(x,y) = e^{-y}\sin 2xy$ függvényt:

$y \neq 0$ $\displaystyle\int_0^1 e^{-y}\sin 2xy\,dx = e^{-y}\left[-\frac{\cos 2xy}{2y}\right]_{x=0}^{1} =$

$$= e^{-y}\left(-\frac{\cos 2y}{2y} + \frac{1}{2y}\right) = e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}$$

integrálható

(5)

$|e^{-y}\sin 2xy| \le e^{-y} \Rightarrow f(x,y)$ integrálható

$[0,1]\times[0,\infty)$-en

$\Downarrow$ Fubini-tétel

$$\int_0^\infty \Big[\underbrace{\int_0^1 e^{-y}\sin 2xy \, dx}_{\frac{e^{-y}\sin^2 y}{y}} \Big] dy = \int_0^1 \Big[\int_0^\infty e^{-y}\sin 2xy \, dy \Big] dx$$

Másrészt

$$\int_0^\infty e^{-y}\sin 2xy \, dy = \lim_{\Omega\to\infty} \int_0^\Omega e^{-y}\sin 2xy \, dy \; \textcircled{=}$$

parc. int.

$u' = e^{-y} \to u = -e^{-y}$

$v = \sin 2xy \quad v' = 2x\cos 2xy$

$$\int e^{-y}\sin 2xy \, dy = \left[-e^{-y}\sin 2xy\right] + 2x\int e^{-y}\cos 2xy \, dy =$$

$$= \left[-e^{-y}\sin 2xy\right] + 2x\left\{\left[-e^{-y}\cos 2xy\right] - 2x\int e^{-y}\sin 2xy \, dy\right.$$

parc. int.

$u' = e^{-y} \to u = -e^{-y}$

$v = \cos 2xy \quad v' = -2x\cdot\sin 2xy$

$$= -e^{-y}\left[\sin 2x + 2x\cos 2xy\right] - 4x^2\int e^{-y}\sin 2xy \, dy$$

$$\hookrightarrow \int e^{-y}\sin 2xy \, dy = -\frac{e^{-y}\left[\sin 2xy + 2x\cos 2xy\right]}{1+4x^2}$$

$$\textcircled{=} \lim_{\Omega\to\infty} \underbrace{\left[-\frac{e^{-y}\left[\sin 2xy + 2x\cos 2xy\right]}{1+4x^2}\right]_{y=0}^{\Omega}}_{-\frac{e^{-\Omega}\left[\sin 2xy + 2x\cos 2x\Omega\right]}{1+4x^2} + \frac{\cancel{\sin 0} + 2x}{1+4x^2}} = \frac{2x}{1+4x^2}$$

$e^{-\Omega} \xrightarrow{\Omega\to\infty} 0$

⑥

Legyen $$\int_0^\infty e^{-y}\sin 2xy\,dy = \frac{2x}{1+4x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-y}\sin^2 y}{y}\,dy = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\Big[\ln(1+4x^2)\Big]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\ln 5}{4}}}$$

o!

<u>Megj</u> A Fubini-tétel feltételei fontosak:

②
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=0 \end{cases}$$

$$A := [-1,1]\times[-1,1]$$

- $y\neq 0$ $$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x\text{-ben páratlan fv}}}{=} 0$$
- $x\neq 0$ $$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ y\text{-ban páratlan függvény}}}{=} 0$$

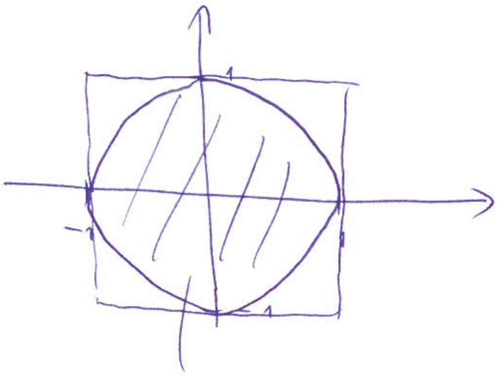
$$\Rightarrow \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy\right)dx = 0$$

(a két integrál felcserélhető)

<u>DE</u> f nem integrálható $\lambda_1\times\lambda_2$ szerint:

② Megjegyzés:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x,y)|\, \underbrace{dx\,dy}_{\text{Lebesgue-mérték } \mathbb{R}^2\text{-en}} \geq \iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy \ =$$



R

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$\Downarrow$$
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^4}$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{|\cos\varphi\sin\varphi|}{r^2}\, r\,d\varphi\right] dr = 2\int_0^1 \frac{dr}{r} = \infty$$

③ $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = ?$, ahol $R:\ 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Iterált integrálás:

$$x \neq 0:\quad A(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{x(2x^2-u)}{2u^3}\,du = \int_{x^2}^{x^2+1}\left(\frac{x^3}{u^3} - \frac{x}{2u^2}\right)du \ =$$

$$u := x^2+y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$$

$$x^2-y^2 = x^2-(u-x^2) = 2x^2-u$$

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq u \leq x^2+1$$

$$= \left[-\frac{x^3}{2u^2} + \frac{x}{2u} \right]_{u=x^2}^{u=x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$x=0$ -ban is igaz, mert $f(0,y)=0$.

$$\hookrightarrow \int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2(x^2+1)}\,dx = \left[-\frac{1}{4(x^2+1)} \right]_0^2 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy \right] dx = \frac{1}{5}$$

~~Másik~~ Megfordítva a sorrendet:

$$B(y) := \int_0^2 f(x,y)\,dx = \int_{y^2}^{4+y^2} \frac{y(u-y^2)}{u^3}\,du = \left[-\frac{y}{2u} + \frac{y^3}{2u^2} \right]_{u=y^2}^{u=4+y^2} =$$

- $y \neq 0$ $\quad u := x^2+y^2 \rightsquigarrow du = 2x\,dx$

$$0 \le x \le 2 \Longrightarrow y^2 \le u \le 4+y^2$$

$$= -\frac{2y}{(4+y^2)^2}$$

$y=0$ -ban is igaz, mert $f(x,0)=0$.

$$\hookrightarrow \int_0^1 B(y)\,dy = \int_0^1 \frac{-2y}{(4+y^2)^2}\,dy = \left[\frac{1}{4+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx \right] dy = -\frac{1}{20} \neq \frac{1}{5} = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy \right] dx$$

__OK:__ f nem integrálható R-en: 0-ban nem korlátos:

$$f(2t,t) = \frac{6}{125t}, \quad f(t,2t) = -\frac{6}{125t^2}$$