EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Mérték és integrál

egyetemi jegyzet

Budapest, 2015

A jegyzet az
ELTE IK 2015. évi *Jegyzettámogatási pályázat*
támogatásával készült

Lektorálta: Dr. Kovács Sándor egyetemi adjunktus

Tartalomjegyzék

Előszó **7**

1. Bevezetés **9**
1.1. Riemann-integrálható függvények . . . 10
1.2. A Riemann-integrál kritikája . . . 16
1.2.1. Folytonosság . . . 16
1.2.2. Konvergencia-határátmenet . . . 20
1.2.3. Teljesség . . . 28
1.3. A Lebesgue-integrál fogalma . . . 30
1.4. A Riesz-féle felépítés . . . 33
1.5. Megjegyzések . . . 39

2. A mértékelmélet alapjai **55**
2.1. Halmazrendszerek . . . 55
2.2. Megjegyzések . . . 60
2.3. Mérték . . . 64
2.3.1. Halmazfüggvények . . . 65
2.3.2. A Lebesgue-féle kvázimérték . . . 72
2.3.3. A Stieltjes-féle kvázimérték . . . 74
2.4. Megjegyzések . . . 77
2.5. Kiterjesztési tételek . . . 82
2.6. Megjegyzések . . . 94
2.7. A Lebesgue-mérték . . . 100
2.7.1. A Lebesgue (-Stieltjes)-mérték értelmezése . . . 101
2.7.2. Euklideszi gömbök Lebesgue-mértéke . . . 109
2.7.3. Vitali-lemma . . . 116
2.8. Megjegyzések . . . 117
2.9. Mértékek szorzata . . . 134
2.10. Megjegyzések . . . 142
2.11. Előjeles mértékek . . . 145
2.12. Megjegyzések . . . 152

3. Az integrál fogalma **153**
3.1. Borel-mérhető leképezések . . . 153
3.2. Megjegyzések . . . 160
3.3. Mérhető függvények integrálja . . . 161
3.3.1. Lépcsősfüggvények integrálja . . . 161
3.3.2. Az L^+ függvényosztály . . . 166
3.3.3. Integrálható függvények . . . 175
3.4. Megjegyzések . . . 184
3.5. L^p-terek . . . 194
3.6. Megjegyzések . . . 216
3.7. Eloszlásfüggvény, monoton átrendezés . . . 233
3.8. Megjegyzések . . . 243
3.9. Konvergencia . . . 247
3.9.1. Konvergencia normában, majdnem mindenütt . . . 247
3.9.2. μ-véges norma-konvergencia . . . 249
3.9.3. Sztohasztikus konvergencia . . . 254
3.9.4. Gyenge konvergencia normában . . . 266
3.10. Megjegyzések . . . 269
3.11. Radon-Nikodym-tétel . . . 278
3.12. Megjegyzések . . . 295
3.13. Duális terek . . . 309
3.14. Megjegyzések . . . 318
3.15. Fubini-tétel . . . 325
3.16. Megjegyzések . . . 334

4. Topologikus mértékek **337**
4.1. Topologikus terek . . . 337
4.1.1. A topológia alapfogalmai . . . 338
4.1.2. Kompaktság . . . 342
4.1.3. Lokálisan kompakt terek . . . 350
4.1.4. Baire- és Borel-halmazok . . . 362
4.2. Megjegyzések . . . 364
4.3. Absztrakt integrálok . . . 376
4.3.1. Daniell-Stone-tétel . . . 377
4.3.2. Baire- és Borel-mértékek . . . 385
4.3.3. Haar-mérték . . . 396
4.4. Megjegyzések . . . 473

5. A Fourier-analízis alapjai **499**
5.1. Konvolúció 499
5.2. Megjegyzések 504
5.3. Duális csoport 506
5.4. Trigonometrikus Fourier-transzformáció 517
5.4.1. Borel-mértékek transzformáltja 517
5.4.2. L^1-beli függvények Fourier-transzformáltja 520
5.4.3. L^p-beli függvények Fourier-transzformáltja 530
5.4.4. A Fourier-transzformált deriváltja 538
5.4.5. A Schwartz-féle függvényosztály 541
5.5. Megjegyzések 545
5.6. Az absztrakt harmonikus analízis elemei 575
5.7. Megjegyzések 580

Arcképcsarnok **583**

Tárgymutató **592**

Előszó

A *Mérték és integrál* a tematikáját tekintve egyrészt az alkalmazott matematikus és a (megfelelő szakirányú) programtervező informatikus MSC-hallgatók képzésében szereplő mérték- és integrálelmélet témakörét öleli fel, másrészt a speciális előadásokat választóknak kíván segítséget nyújtani a topologikus mértékekkel és a Fourier-transzformációval foglalkozó fejezetek révén. A tantervben előírtakon túli részletek, kiegészítések a további specializálódást igyekeznek előkészíteni, ill. megkönnyíteni. Éppen ezért haszonnal forgathatják a szóban forgó jegyzetet az említett szakirányokban tanuló doktori ösztöndíjas hallgatók is.

Kitűnő - többnyire idegen nyelvű - szakkönyvek, monográfiák állnak azok rendelkezésére, akik bizonyos fejezetek után mélyebben érdeklődnek, vagy esetleg csupán más aspektusból kívánják az itt tárgyaltakat áttekinteni. A teljesség igénye nélkül ezért álljon itt a mondottaknak messzemenően megfelelő néhány mű:

- G. P. Akilov–B. M. Makarov–B. P. Havin, *Bevezetés az integrálelméletbe* (oroszul), Izd. Leningrad. Univ., Leningrád, 1969.
- S. K. Berberian, *Measure and Integration,* AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2011.
- H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1974.
- R. E. Edwards, *Functional Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London, 1965.
- P. R. Halmos, *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.
- E. Hewitt–K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I.*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- Járai Antal: *Mérték és integrál,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- A. N. Kolmogorov–Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

- K. Maurin, *Analysis I-II.*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1976-1980.
- Riesz Frigyes - Szőkefalvi-Nagy Béla: *Funkcionálanalízis,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Intersience Publishers, J. Wiley et Sons, New York-London, 1962.
- W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- F. Schipp–W. R. Wade–P. Simon–J. Pál, *Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó, Budapest - Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.
- R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales,* Cambridge University Press, 2005.
- Simon Péter, *Analízis V,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
- E. M. Stein–G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1971.
- Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- G. P. Tolsztov, *Mérték és integrál* (oroszul), Izd. Nauka, Moszkva, 1976.
- A. C. Zaanen, *Integration*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.
- A. C. Zaanen, *Continuity, Integration and Fourier Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.

A jelen jegyzet megírása során is támaszkodtunk néhányra a most felsorolt könyvek közül. Különösen vonatkozik ez az *Analízis V*-re (annak egy erősen átdolgozott, kibővített változatáról van szó), ill. a tankönyvként is kiváló Bauer-, ill. Maurin-féle művekre, valamint (elsősorban a „kitekintést" illetően) a Hewitt-Ross-féle kétkötetes monográfia első kötetére.

Budapest, 2014. április.

1. fejezet

Bevezetés

A modern kori matematika fejlődésének egy fontos állomása volt a később Riemann nevével fémjelzett integrál bevezetése. Ez a fogalom számos kérdés tisztázásához járult hozzá, elég itt csak pl. a (trigonometrikus) Fourier-sorok együtthatóinak a kiszámítására gondolni. A XIX. század vége felé azonban már számos olyan kérdés, probléma fogalmazódott meg, ami többek között világossá tette, hogy ezeknek a „kezelésére" az ún. Riemann-integrál már nem alkalmas. Szükségessé vált egy új integrálfogalom megalkotása, aminek az alapjait *Henri Lebesgue* fektette le az 1901-ben a Comptes Rendus-ben megjelent híres *Sur une généralisation de l'intégrale définie*-című dolgozatában, majd később, az 1902-ben sikerrel megvédett 130 oldalas *Intégrale, longueur, aire* című doktori disszertációjában (amit ugyanabban az évben az olasz Annali di Matematica meg is jelentetett). Nehéz lenne túlbecsülni mindennek a hatását a matematikára, ezért csupán röviden idézzük a T. Hawkins által írottakat:

... In Lebesgue's work ... the generalised definition of the integral was simply the starting point of his contributions to integration theory. What made the new definition important was that Lebesgue was able to recognise in it an analytic tool capable of dealing with – and to a large extent overcoming – the numerous theoretical difficulties that had arisen in connection with Riemann's theory of integration. In fact, the problems posed by these difficulties motivated all of Lebesgue's major results ...

Az azóta eltelt időben a Lebesgue-féle mérték- és integrálelmélet alapjainak számos prezentációja született (esetenként nem kevésbé híres matematikusok tollából is). Nehéz megválaszolni azt a kérdést, hogy pl. egy tankönyvben melyik „változatot" érdemes választani. Nagy vonalakban azt mondhatjuk, hogy pl. a valószínűségszámítás szempontjából a mértékelméleti megalapozás, ill. bevezetés „favorizálható", más szempontok (pl. a Fourier-sorok, stb.) az integrálelméletet helyezik az előtérbe. A továbbiakban az előbbi szempontot követjük.

Elöljáróban igyekszünk néhány olyan problémára rávilágítani, amelyeket talán a „Riemann-integrál kritikája" elnevezéssel foglalhatnánk össze. Ehhez mindenek előtt emlékeztetünk a Riemann-integrál fogalmára és (bizonyítással együtt) egy-két „alaptételre".

1.1. Riemann-integrálható függvények

Induljunk ki az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallumon $(a,b \in \mathbf{R},\ a<b)$ értelmezett

$$f:[a,b]\to\mathbf{R}$$

korlátos függvényből. A $\tau\subset[a,b]$ véges halmazt az $[a,b]$ intervallum *felosztásának* nevezzük, ha $a,b\in\tau$. Ekkor tehát egy $1\le n\in\mathbf{N}$ indexszel

$$\tau=\{x_0,...,x_n\}$$

alkalmas $x_0,...,x_n\in[a,b]$ számokkal, ahol (a későbbiekben ezt mindig feltételezzük a jelölésben)

$$x_0=a<x_1<...<x_n=b.$$

A

$$\delta_\tau:=\max\{x_{k+1}-x_k:k=0,...,n-1\}$$

számot a τ felosztás *finomságának* nevezzük.

Legyen

$$I_j:=[x_j,x_{j+1}]\qquad(j=0,...,n-1)$$

a τ felosztás által meghatározott *j-edik osztásintervallum,* ill.

$$\mathcal{F}(\tau):=\{I_j:j=0,...,n-1\}.$$

Definiáljuk az $m_j,\ M_j\in\mathbf{R}\quad(j=0,...,n-1)$ számokat a következőképpen:

$$m_j:=m_{I_j}:=\inf\{f(x):x\in I_j\},\ M_j:=M_{I_j}:=\sup\{f(x):x\in I_j\},$$

ill. egy $I:=[u,v]\quad(u,\ v\in\mathbf{R},\ u<v)$ intervallum esetén legyen $|I|:=v-u$ az I *hossza.* Ekkor

$$s(f,\tau):=\sum_{j=0}^{n-1}m_j\cdot|I_j|$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *alsó összege,*

$$S(f,\tau):=\sum_{j=0}^{n-1}M_j\cdot|I_j|$$

pedig az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *felső összege.* Világos, hogy bármely $\tau\subset[a,b]$ felosztás esetén

$$s(f,\tau)\le S(f,\tau),$$

sőt, könnyen beláthatóan tetszőleges $\tau,\mu\subset[a,b]$ felosztásokra

$$s(f,\tau)\le S(f,\mu).$$

Legyen

$$\omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

az f függvény τ által meghatározott *oszcillációs összege.* Az alsó, felső összegek definíciója szerint

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} (M_I - m_I)\cdot |I|,$$

ahol az I intervallumon vett $M_I - m_I$ oszcillációról a következőt mondhatjuk:

$$o_I(f) := M_I - m_I = \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\} = \sup\{f(x) - f(t) : x,t \in I\}.$$

Jelöljük az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}_a^b$-vel. Ekkor az

$$\left\{s(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b\right\}$$

halmaz felülről korlátos, és minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az utóbbi halmaznak az $S(f,\mu)$ felső összeg egy felső korlátja:

$$s(f,\tau) \le S(f,\mu) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Ezért

$$I_*(f) := \sup\left\{s(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b\right\} \le S(f,\mu) < +\infty.$$

Hasonlóan, az

$$\left\{S(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b\right\}$$

halmaz alulról korlátos, aminek minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az $s(f,\mu)$ alsó összeg egy alsó korlátja:

$$S(f,\tau) \le s(f,\mu) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Így

$$I^*(f) := \inf\left\{S(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b\right\} \ge s(f,\mu) > -\infty.$$

Következésképpen $I_*(f)$, $I^*(f) \in \mathbf{R}$, és

$$I_*(f) \le I^*(f).$$

A most definiált $I_*(f)$ számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának,* $I^*(f)$-et pedig az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük. A fentiek szerint tehát tetszőleges $\tau, \mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásokra

$$s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\mu).$$

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó f függvény *Riemann-integrálható,* ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f)$$

számot az f függvény *Riemann-integráljának* (vagy más szóval *határozott integráljának*) nevezzük.

Az előbbiekben értelmezett Riemann-integrálható függvények halmazát az $R[a,b]$ szimbólummal fogjuk jelölni. Esetenként használni fogjuk az

$$\int_{[a,b]} f := \int_I f := \int_a^b f$$

jelöléseket is (ahol $I := [a,b]$).

1.1.1. Tétel. *Legyen az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor a következő ekvivalencia igaz: $f \in R[a,b]$ akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel $\omega(f,\tau) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $I_*(f) = I^*(f)$. Figyelembe véve a Darboux-féle alsó, ill. felső integrál definícióját azt mondhatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy alkalmas $\nu, \mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással

$$s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2,\ S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \nu \cup \mu$, ekkor

$$s(f,\tau) \geq s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2,\ S(f,\tau) \leq S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Innen az következik, hogy

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < I^*(f) - I_*(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

hiszen azt tettük fel, hogy $f \in R[a,b]$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$.

Most induljunk ki abból, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel

$$I^*(f) - I_*(f) \leq \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Mivel $I^*(f) - I_*(f) \geq 0$, ezért csak $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$ lehetséges. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. ■

Induljunk ki ismét egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényből, és tekintsük (valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett) a $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztást. Ekkor tetszőleges $y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau)$ $(j = 0, ..., n-1)$ választással legyen

$$y := (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

és

$$\sigma(f,\tau,y) := \sum_{j=0}^{n-1} f(y_j)\cdot |I_j|.$$

Ez utóbbi $\sigma(f,\tau,y)$ összeget az f függvény (integrál) *közelítő összegének* nevezzük. Legyen továbbá

$$\hat{\tau} := \{y = (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n : y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau) \ \ (j = 0, ..., n-1)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $\tau \subset [a,b]$ felosztásra

$$s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,y) \le S(f,\tau) \qquad (y \in \hat{\tau}).$$

Azt sem nehéz belátni, hogy

$$s(f,\tau) = \inf\{\sigma(f,\tau,y) : y \in \hat{\tau}\},\ S(f,\tau) = \sup\{\sigma(f,\tau,y) : y \in \hat{\tau}\}.$$

1.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor:*

a) *tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$|s(f,\tau) - I_*(f)| < \varepsilon,\ |S(f,\tau) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta);$$

b) *ha $q \in \mathbf{R}$, akkor az $f \in R[a,b]$, $\int_a^b f = q$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel*

$$|\sigma(f,\tau,y) - q| < \varepsilon \qquad \Big(\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta,\ y \in \hat{\tau}\Big).$$

Bizonyítás. Legyen $0 < C \in \mathbf{R}$ olyan, hogy

$$|f(x)| \le C \qquad (x \in [a,b]).$$

Tegyük fel, hogy $\mu = \{z_0, ..., z_N\}$, $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ $(1 \le N,\ n \in \mathbf{N})$ egy-egy felosztása az $[a,b]$-nek, és

$$\{y_0, ..., y_s\} := \tau \cup \mu \in \mathcal{F}_a^b \qquad (1 \le s \in \mathbf{N}).$$

Bontsuk fel az $s(f,\tau)$-t definiáló összeget az alábbi módon:

$$s(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j\in A} m_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{j\in B} m_j(x_{j+1} - x_j),$$

ahol A azoknak a $j = 0, ..., n-1$ indexeknek a halmaza, amelyekre $(x_j, x_{j+1}) \cap \mu = \emptyset$ (azaz $z_p \notin (x_j, x_{j+1})$ $(p = 0, ..., N)$), ill. $B := \{0, ..., n\} \setminus A$. Tehát $[x_j, x_{j+1}] \in \mathcal{F}(\tau \cup \mu)$ $(j \in A)$, ill. a

$$B_i := \{k = 0, ..., s-1 : [y_k, y_{k+1}] \subset [x_i, x_{i+1}]\} \qquad (i \in B)$$

halmazokkal $[y_k, y_{k+1}] \in \mathcal{F}(\tau \cup \mu)$ $(k \in B_i)$ és

$$\bigcup_{k \in B_i} [y_k, y_{k+1}] = [x_i, x_{i+1}] \qquad (i \in B).$$

Következésképpen az

$$\tilde{m}_p := \inf\{f(x) : y_p \le x \le y_{p+1}\} \qquad (p = 0, ..., s-1)$$

jelöléssel

$$|s(f,\tau) - s(f,\tau \cup \mu)| = s(f,\tau \cup \mu) - s(f,\tau) =$$
$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} \tilde{m}_k (y_{k+1} - y_k) - \sum_{i \in B} m_i (x_{i+1} - x_i) =$$
$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} \tilde{m}_k (y_{k+1} - y_k) - \sum_{i \in B} m_i \cdot \sum_{k \in B_i} (y_{k+1} - y_k) =$$
$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} (\tilde{m}_k - m_i)(y_{k+1} - y_k) \le 2C \cdot \sum_{i \in B} \sum_{k \in B_i} (y_{k+1} - y_k) =$$
$$2C \cdot \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \le 2C\delta_\tau N,$$

hiszen a B számossága nyilván nem lehet N-nél nagyobb.

Tehát

$$s(f,\tau) \ge s(f,\tau \cup \mu) - 2CN\delta_\tau.$$

Analóg módon kapjuk (a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával), hogy

$$S(f,\tau) \le S(f,\tau \cup \mu) + 2CN\delta_\tau.$$

Mivel

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_a^b\},\ I^*(f) = \inf\{S(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_a^b\},$$

ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén a fenti $\mu = \{z_0, ..., z_N\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás megválasztható úgy, hogy

$$I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mu) \le s(f,\tau \cup \mu) \le S(f,\tau \cup \mu) \le S(f,\mu) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen ezzel a μ-vel $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ olyan felosztás, amelyre még az is igaz, hogy $2CN\delta_\tau < \varepsilon/2$, azaz

$$\delta_\tau < \delta := \frac{\varepsilon}{4CN}.$$

Ekkor

$$I_*(f) \ge s(f,\tau) > s(f,\tau \cup \mu) - \frac{\varepsilon}{2} > I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I_*(f) - \varepsilon.$$

Így

$$I_*(f) \ge s(f,\tau) > I_*(f) - \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ugyanezzel a meggondolással kapjuk az

$$I^*(f) \le S(f,\tau) < I^*(f) + \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta)$$

egyenlőtlenségeket, amivel a tétel a)-beli állítását beláttuk.

Ha most $f \in R[a,b]$ és $q := \int_a^b f$, akkor $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$, ill. a tétel a) része alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$\left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| = |s(f,\tau) - I_*(f)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| S(f,\tau) - \int_a^b f \right| = |S(f,\tau) - I^*(f)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ugyanakkor

$$s(f,\nu) \le \sigma(f,\nu,y) \le S(f,\nu) \qquad (\nu \in \mathcal{F}_a^b,\ y \in \hat{\nu})$$

és

$$s(f,\nu) \le \int_a^b f \le S(f,\nu) \qquad (\nu \in \mathcal{F}_a^b),$$

ezért

$$|\sigma(f,\tau,y) - q| = \left| \sigma(f,\tau,y) - \int_a^b f \right| \le S(f,\tau) - s(f,\tau) \le$$

$$\left| S(f,\tau) - \int_a^b f \right| + \left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta,\ y \in \hat{\tau}).$$

„Fordítva", most azt tegyük fel b)-ben, hogy a korlátos $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényről a következőt tudjuk: van olyan $q \in \mathbf{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $\delta > 0$ számmal tetszőleges $\tau \subset [a,b]$, $\delta_\tau < \delta$ felosztásra és $y \in \hat{\tau}$ vektorra $|\sigma(f,\tau,y) - q| < \varepsilon$, azaz

$$q + \varepsilon > \sigma(f,\tau,y) > q - \varepsilon.$$

Speciálisan az is igaz, hogy

$$q + \varepsilon > s(f,\tau) \ge q - \varepsilon \ \ ,\ \ q - \varepsilon < S(f,\tau) \le q + \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta),$$

így

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) \le 2\varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ez azt jelenti (ld. 1.1.1. Tétel), hogy $f \in R[a,b]$. Ezért (pl.) $\int_a^b f = I_*(f)$ miatt az előbbi $\varepsilon > 0$ számhoz a tétel a) állítása alapján alkalmas $\tilde{\delta} > 0$ mellett

$$\left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b,\ \delta_\tau < \tilde{\delta}).$$

Ha tehát $\tau \in \mathcal{F}_a^b$, $\delta_\tau < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$, akkor

$$\left| q - \int_a^b f \right| \leq |q - s(f,\tau)| + \left| s(f,\tau) - \int_a^b f \right| < 2\varepsilon.$$

Az itt szereplő $\varepsilon > 0$ tetszőleges lévén, az következik, hogy $q - \int_a^b f = 0$, azaz $q = \int_a^b f$. ■

Ha tehát $f \in R[a,b]$ és a $\tau_m \in \mathcal{F}_a^b$ $(m \in \mathbf{N})$ felosztássorozatra $\lim_{m\to\infty} \delta_{\tau_m} = 0$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} s(f,\tau_m) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_m) = \lim_{m\to\infty} \sigma(f,\tau_m,y(m)) = \int_a^b f$$

(az utóbbi esetben az $y(m) \in \hat{\tau}_m$ $(m \in \mathbf{N})$ vektorokra nézve egyenletesen).

1.2. A Riemann-integrál kritikája

Ebben a pontban néhány olyan kérdéskört tárgyalunk, amelyek rávilágítanak a Riemann-integrál „gyenge pontjaira". Kiderül, hogy egyrészt túl szűk azoknak a függvényeknek az összessége, amelyek Riemann-integrálhatók, nevezetesen, bizonyos értelemben a folytonosság „majdnem" szükséges az integrálhatósághoz. Másrészt pl. olyan, az analízis szempontjából alapvető művelet, mint a határátmenet eredményére nem „öröklődik" az integrálhatóság, ill. ha ez utóbbi teljesül is, akkor is csak erős feltételek mellett cserélhető fel a határátmenet és az integrálás. Az sem mellékes, hogy pl. a valós vagy a komplex számok körében alapvető fontosságú teljesség (azaz, a sorozatok konvergenciájának és a Cauchy-tulajdonságának az ekvivalenciája) nem igaz az $R[a,b]$-ben természetes módon értelmezhető távolság-fogalom tekintetében. Többek között ezek a szempontok is tették szükségessé egy olyan integrálfogalom megalkotását, amelyik pl. a most felsorolt hiányosságokat kiküszöböli.

1.2.1. Folytonosság

A továbbiákban megmutatjuk, hogy „lényegében" csak a folytonos függvények Riemann-integrálhatók. Vezessük be ehhez először is a (Lebesgue-szerint) nullamértékű halmaz fogalmát: azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz *nullamértékű,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Egyszerűen belátható, hogy az $\mathbf{R}$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Sőt, ha $X_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ nullamértékű, akkor az $\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ halmaz is nullamértékű. Az is egyszerűen adódik, hogy a nullamértékűség előbbi definíciójában (ha adott esetben szükség van rá) nyugodtan feltehető, hogy a szóban forgó I_k $(k \in \mathbf{N})$ intervallumok mindegyike nyílt. Világos továbbá, hogy egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű.

Könnyű meggondolni azt is, hogy egy $[a,b]$ $(a,b \in \mathbf{R}, a<b)$ intervallum nem nullamértékű.

1.2.1.1. Tétel (*Lebesgue-kritérium*). *Tegyük fel, hogy az* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ $(a,b \in \mathbf{R}, a<b)$ *kompakt intervallumon értelmezett* $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ *függvény korlátos, és legyen az* f *szakadási helyeinek a halmaza*

$$\mathcal{A}_f := \Big\{x \in I : f \notin C\{x\}\Big\}.$$

Ekkor az f *Riemann-integrálhatósága, azaz* $f \in R[a,b]$ *azzal ekvivalens, hogy az* $\mathcal{A}_f$ *halmaz nullamértékű.*

Bizonyítás. Induljunk ki először abbból, hogy $f \in R[a,b]$. Legyen $\alpha \in [a,b]$, és valamilyen $J \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén $\alpha \in \operatorname{int} J$, amikor is

$$O_J f := \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in J \cap [a,b]\}$$

az f *oszcillációja* a J intervallumon. Az f függvény α-beli *lokális oszcillációját* a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta_\alpha f := \inf\{O_J f : J \subset \mathbf{R} \text{ intervallum}, \ \alpha \in \operatorname{int} J\}.$$

Mutassuk meg először is azt, hogy

$$f \in C\{\alpha\} \iff \Delta_\alpha f = 0.$$

Valóban, ha $f \in C\{\alpha\}$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b], |x-\alpha| < \delta).$$

Ezért

$$|f(x)-f(y)| \le$$
$$|f(x)-f(\alpha)| + |f(\alpha)-f(y)| < 2\varepsilon \qquad (x,\, y \in [a,b], |x-\alpha|, |y-\alpha| < \delta).$$

Így minden olyan $J \subset \mathbf{R}$ intervallumra, amelyre $\alpha \in \operatorname{int} J$ és $d_J < \delta$, igaz, hogy

$$|f(x)-f(y)| < 2\varepsilon,$$

amiből $O_J f \le 2\varepsilon$ következik. Ez azt jelenti, hogy $(0 \le\ )\Delta_\alpha f \le 2\varepsilon$. Mindez csak úgy lehetséges, ha $\Delta_\alpha f = 0$.

Ha most azt tesszük fel, hogy $\Delta_\alpha f = 0$, akkor az infimum tulajdonságait figyelembe véve bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz találunk olyan $J \subset \mathbf{R}$ intervallumot, amellyel $\alpha \in \operatorname{int} J$, és $O_J f < \varepsilon$. Tehát

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon \qquad (x,\, y \in J \cap [a,b]),$$

speciálisan

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \qquad (x \in J \cap [a,b]).$$

Mivel $\alpha \in \operatorname{int} J$, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in J \quad (x \in [a,b],\ |x-\alpha| < \delta)$. Így

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \qquad (x \in I, |x-\alpha| < \delta),$$

azaz $f \in C\{\alpha\}$.

A lokális oszcilláció és a pontbeli folytonosság kapcsolatáról most belátott ekvivalencia alapján

$$\mathcal{A}_f = \Big\{x \in I : \Delta_x f > 0\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in I : \Delta_x f > 1/k\Big\} =: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékűségéhez ezért elegendő azt megmutatni, hogy az

$$A_\delta := \Big\{x \in I : \Delta_x f > \delta\Big\} \qquad (\delta > 0)$$

halmazok nullamértékűek. Legyen $\sigma > 0$, amikor is a Riemann-integrálhatóságnak az oszcillációs összegekkel való jellemzése folytán (ld. 1.1. Tétel) az $[a,b]$ intervallum egy alkalmas τ felosztásával

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| < \sigma,$$

$\mathcal{F}(\tau)$ jelöli a τ felosztás által meghatározott osztásintervallumok halmazát. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$ mellett

$$\sigma > \omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \geq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} o_J(f) \cdot |J|.$$

Világos, hogy minden $J \in \mathcal{F}(\tau)$, $A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset$ osztásintervallum esetén $o_J(f) \geq \delta$, ezért

$$\sigma > \delta \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J|.$$

Más szóval

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J| < \frac{\sigma}{\delta}.$$

Legyen itt valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett a $\sigma > 0$ olyan, hogy $\sigma/\delta < \varepsilon/2$. Nyilván

$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} J \right) \bigcup \left(\bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau)} (J \setminus \operatorname{int} J) \right),$$

ahol minden $J \setminus \operatorname{int} J \quad (J \in \mathcal{F}(\tau))$ halmaz, és így az $\bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau)} (J \setminus \operatorname{int} J)$ halmaz is nullamértékű. Ezért alkalmas $K_j \subset \mathbf{R} \quad (j \in \mathbf{N})$ intervallumsorozattal

$$\bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau)} (J \setminus \operatorname{int} J) \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j,$$

és $\sum_{j=0}^{\infty} |K_j| < \varepsilon/2$. Mindezeket egybevetve

$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} J \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j \right),$$

és

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J| + \sum_{j=0}^{\infty} |K_j| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az A_δ halmaz nullamértékű.

Most tegyük fel azt, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű. Legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám, ekkor egy alkalmas, kompakt intervallumokból álló $L_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ intervallumsorozattal

$$\mathcal{A}_f \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{int} L_k, \ \sum_{k=0}^{\infty} |L_k| < \frac{\varepsilon}{4C},$$

ahol $C > 0$, és $|f(x)| \leq C$ $(x \in [a,b])$. Ha $x \in [a,b] \setminus \mathcal{A}_f$, azaz $f \in C\{x\}$, akkor van olyan $I_x \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum, amelyre $x \in \operatorname{int} I_x$, és

$$O_{I_x} f = \sup\{|f(t) - f(y)| \in \mathbf{R} : t,\, y \in I_x \cap I)\} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Világos, hogy

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{int} L_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in I \setminus \mathcal{A}_f} \operatorname{int} I_x \right).$$

Az $[a,b]$ kompaktsága miatt az előbbi nyílt lefedést figyelembe véve kapunk olyan véges $A \subset \mathbf{N}$, $B \subset I \setminus \mathcal{A}_f$ halmazokat, amelyekkel

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k \in A} \operatorname{int} L_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in B} \operatorname{int} I_x \right).$$

Legyen $\tau \subset [a,b]$ az a felosztás, amit az a, b és az L_k $(k \in A)$, I_x $(x \in B)$ intervallumok $[a,b]$-be eső végpontjai alkotnak. Világos, hogy bármelyik $J \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra egy-egy alkalmas $k \in A$, vagy $x \in B$ mellett $J \subset L_k$, vagy $J \subset I_x$ (esetleg mindkét tartalmazás igaz). Ha $k \in A$ és $J \subset L_k$, akkor $o_J(f) \leq 2C$. Ha pedig $x \in B$ és $J \subset I_x$, akkor $o_J(f) \leq \varepsilon/(2(b-a))$. Ezért a τ-hoz tartozó $\omega(f,\tau)$ oszcillációs összegről az alábbiakat mondhatjuk:

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists k \in A : J \subset L_k} o_J(f) \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists x \in B : J \subset I_x} o_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$2C\cdot \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau),\,\exists k\in A: J\subset L_k} |J| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau),\,\exists x\in B: J\subset I_x} |J| \le$$

$$2C\cdot \sum_{k=0}^{\infty} |L_k| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} |J| \le 2C\cdot \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Az 1.1.1. Tétel alapján tehát $f \in R[a,b]$. ■

1.2.2. Konvergencia-határátmenet

Vizsgáljuk most Riemann-integrálható függvények sorozatait. Tegyük fel, hogy egy kompakt $[a,b]$ intervallum esetén adottak az $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények, és az (f_n) sorozat *pontonként konvergens*, azaz minden $x \in [a,b]$ mellett az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat konvergens. Legyen

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

az (f_n) sorozat *határfüggvénye*. Természetes módon vetődnek fel az alábbi kérdések:

1° konvergens-e az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata;

2° igaz-e, hogy az f határfüggvény Riemann-integrálható;

3° ha az előbbi két kérdésre „igen" a válasz, akkor teljesül-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség?

Röviden „összefoglalva"

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,?$$

(Ami a határátmenet és az integrálás felcserélhetőségét jelentené.)

A következő nagyon egyszerű példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui. valamilyen $a_n \in \mathbf{R}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & \big(x \in [0,1] \setminus (0,1/n)\big) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0,1],\ \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden $x \in [0,1]$ helyen könnyen beláthatóan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye az $f \equiv 0$ függvény. Így $f \in R[0,1]$, és $\int_0^1 f = 0$. Ugyanakkor az

$$a_n := n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok $\left(\int_0^1 f_n\right)$ sorozata konvergens, de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) = 1 \neq 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az $\left(\int_0^1 f_n\right) = \left((-1)^n\right)$ sorozat nem konvergens.

Az f határfüggvényre az sem teljesül „automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az (r_k) sorozat a $[0,1]$-beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in R[0,1]$ és $\int_0^1 f_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$ határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvény (a jól ismert Dirichlet-függvény) nem Riemann-integrálható.

Tekintve, hogy a határérték az analízis egyik központi fogalma, ezért az előbbi hiányosságok meglehetősen súlyosak. Csak „erős" kiegészítő feltételek mellett biztosítható a fenti kérdésekre az igenlő válasz. Ilyen feltétel a szóban forgó függvénysorozat egyenletes konvergenciája: az $X \neq \emptyset$ halmazon értelmezett $g_n : X \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló (g_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ index, hogy

$$|g_n(t) - g_m(t)| < \varepsilon \qquad (t \in X, N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor bármilyen $t \in X$ helyen létezik a $\lim_{n\to\infty} g_n(t) \in \mathbf{R}$ határérték, azaz a (g_n) sorozat pontonként is konvergál a

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) \qquad (t \in X)$$

határfüggvényhez. Továbbá – az előbbi jelölésekkel –

$$|g_n(t) - g(t)| = \lim_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)| \leq \varepsilon \qquad (t \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Innen az is rögtön következik, hogy ha az egyenletesen konvergens (g_n) függvénysorozatban szereplő valamennyi g_n $(n \in \mathbf{N})$ függvény korlátos:

$$C_{g_n} := \sup\{|g_n(t)| \in \mathbf{R} : t \in X\} < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a (g_n) sorozat *egyenletesen korlátos,* azaz egy alkalmas $C \geq 0$ számmal

$$|g_n(t)| \leq C \qquad (t \in X, n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, legyen az előbbiekben pl. $\varepsilon := 1$, ekkor

$$|g(t)| \leq |g(t) - g_{N+1}(t)| + |g_{N+1}(t)| < 1 + |g_{N+1}(t)| \leq 1 + C_{g_{N+1}} \qquad (t \in X),$$

így pl. a $C := 1 + C_{g_{N+1}}$ választás megfelelő.

A fenti példáink azt mutatják, hogy az egyenletes konvergencia „erősebb" feltétel a pontonkénti konvergenciánál: ha egy függvénysorozat pontonként konvergens, abból minden további nélkül nem következik, hogy egyenletesen is konvergens.

1.2.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvényekből álló* (f_n) *függvénysorozat egyenletesen konvergens, legyen* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *a határfüggvénye:*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Ekkor $f \in R[a,b]$, *és*

$$(*) \qquad \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbf{N}$ olyan index, amellyel

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b], N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \qquad (x \in [a,b], N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen tetszőleges $I \subset [a,b]$ intervallummal

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq$$

$$2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)| \qquad (x, y \in I, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$o_I(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| \in \mathbf{R} : x, y \in I\} \leq 2\varepsilon + o_I(f_n) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát a $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ egy tetszőleges felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, akkor

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} o_I(f)\cdot |I| \le \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \Big(2\varepsilon + o_I(f_n)\Big)\cdot |I| =$$

$$2(b-a)\cdot\varepsilon + \omega(f_n,\tau) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az itt szereplő f_n függvény Riemann-integrálható: $f_n \in R[a,b]$, ezért (ld. 1.1.1. Tétel) a τ felosztás megválasztható úgy, hogy $\omega(f_n,\tau) < \varepsilon$ teljesüljön, amikor is

$$\omega(f,\tau) < (2(b-a)+1)\cdot\varepsilon.$$

Ezért az 1.1.1. Tétel szerint $f \in R[a,b]$. Továbbá

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \le \int_a^b |f-f_n| \le \int_a^b \varepsilon = (b-a)\cdot\varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N})$$

miatt a $(*)$ egyenlőség is világos. ■

Vegyük észre, hogy az előbbi tételben szereplő valamennyi f_n $(n \in \mathbf{N})$ függvény (lévén Riemann-integrálható) korlátos. Ezért az említett (f_n) függvénysorozat (egy előzetes megjegyzésünk szerint) egyenletesen korlátos.

Ha az egyenletes konvergenciát megpróbáljuk a jóval „gyengébb" pontonkénti konvergenciával helyettesíteni, akkor „legfeljebb" a határátmenet és az integrálás felcserélhetőségét tudjuk elérni, de ehhez – jobb híján – fel kell tételeznünk a határfüggvény Riemann-integrálhatóságát. Nevezetesen, az ún. *Arzelà-tétel* a következőt állítja:

1.2.2.2. Tétel (Arzelà). *Ha az $f_n \in R[a,b]$ sorozat egyenletesen korlátos, azaz egy alkalmas $C \ge 0$ korláttal*

$$|f_n(x)| \le C \qquad (x \in [a,b], n \in \mathbf{N})$$

teljesül, továbbá létezik az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

határfüggvény, akkor $f \in R[a,b]$ esetén igaz a $(*)$ egyenlőség.

Bizonyítás. Az alábbi „segéd-"állításokat fogjuk felhasználni:

1.2.2.3. Lemma (Dini-tétel). *Tegyük fel, hogy az*

$$f_n : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények folytonosak, az (f_n) *függgvénysorozat pontonként konvergál az ugyancsak folytonos* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *határfüggvényhez, és az* (f_n) *sorozat monoton növő, azaz*

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbf{N}),$$

vagy monoton fogyó, azaz

$$f_n(x) \ge f_{n+1}(x) \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (f_n) *függvénysorozat egyenletesen konvergens.*

Valóban, legyen pl. az (f_n) sorozat monoton fogyó. (A monoton növő esetet analóg módon „kezelhetjük".) Ekkor a

$$g_n := f_n - f : [a,b] \to [0,+\infty) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

folytonos függvények által alkotott (g_n) függvénysorozat is nyilván monoton fogyó, és

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]).$$

Következésképpen minden $\varepsilon > 0$ számhoz és $x \in [a,b]$ elemhez létezik olyan (ε-tól is függő) $N_x \in \mathbf{N}$ index, amellyel $g_{N_x}(x) < \varepsilon$. A folytonosság miatt viszont van olyan $\delta_x > 0$, hogy egyúttal

$$g_{N_x}(t) < \varepsilon \qquad (t \in [a,b], |t-x| < \delta_x)$$

is igaz. Világos, hogy

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} (x-\delta_x, x+\delta_x),$$

amiből az $[a,b]$ kompaktsága miatt valamilyen $s \in \mathbf{N}$ és $x_0, ..., x_s \in [a,b]$ mellett

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{s} (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}).$$

Ha $z \in [a,b]$, akkor egy megfelelő $j = 0, ..., s$ esetén $z \in (x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j})$, így $g_{N_{x_j}}(z) < \varepsilon$. Legyen

$$N := \max\{N_{x_i} : i = 0, ..., s\},$$

és $N < n \in \mathbf{N}$. Ekkor $N_{x_j} < n$, és a (g_n) sorozat monoton fogyása alapján

$$0 \le g_n(z) \le g_{N_{x_j}}(z) < \varepsilon.$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett az előbb definiált N küszöbindexszel

$$0 \le g_n(z) < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért a (g_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az ($[a,b]$-n) azonosan nulla függvényhez, ami nyilván ekvivalens a lemmánk állításával.

1.2.2.4. Lemma. *Tetszőleges $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ korlátos függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan folytonos $g : [a,b] \to [0,+\infty)$ függvény, amelyre $g \le f$, és*

$$I_*(f) < \int_a^b g + \varepsilon.$$

Ui. az $I_*(f)$ alsó integrál definíciójából következően van olyan $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a,b]$ felosztás, hogy

$$I_*(f) < s(f,\tau) + \varepsilon/2.$$

Emlékeztetünk arra (ld. az integrállal kapcsolatos jelöléseinket), hogy

$$s(f,\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j).$$

Legyenek az

$$x_j < z_j < z_{j+1} < x_{j+1} \qquad (j = 0, ..., n-1)$$

pontok egyelőre tetszőlegesek, a $g : [a,b] \to [0,+\infty)$ folytonos függvényt pedig értelmezzük az alábbiak szerint:

$$g(x) := \begin{cases} m_j & (z_j \le x \le z_{j+1}) \\ \dfrac{m_j(x - x_j)}{z_j - x_j} & (x_j \le x \le z_j) \\ \dfrac{m_j(x - x_{j+1})}{z_{j+1} - x_{j+1}} & (z_{j+1} \le x \le x_{j+1}) \end{cases} \qquad (j = 0, ..., n-1).$$

Ekkor $0 \le g \le f$, ill. C-vel jelölve az f függvény valamilyen felső korlátját azt kapjuk, hogy

$$\left| s(f,\tau) - \int_a^b g \right| \le \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{z_j} g + \int_{z_{j+1}}^{x_{j+1}} g - m_j(z_j - x_j + x_{j+1} - z_{j+1}) \right| \le$$

$$2C \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (z_j - x_j + x_{j+1} - z_{j+1}).$$

Nyilvánvaló, hogy a z_j-k alkalmas megválasztásával elérhető, hogy

$$2C\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(z_j - x_j + x_{j+1} - z_{j+1}) < \varepsilon/2$$

teljesüljön. Ezért

$$I_*(f) < s(f,\tau) + \varepsilon/2 = \int_a^b g + s(f,\tau) - \int_a^b g + \varepsilon/2 \leq$$

$$\int_a^b g + \Big|s(f,\tau) - \int_a^b g\Big| + \varepsilon/2 < \int_a^b g + \varepsilon.$$

1.2.2.5. Lemma. *Tekintsük az* $f_n : [a,b] \to [0,+\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$ *korlátos függvényeket. Tegyük fel, hogy minden* $x \in [a,b]$ *pont esetén az* $\Big(f_n(x)\Big)$ *sorozat monoton fogyó, és* $\lim_{n\to\infty}\Big(f_n(x)\Big) = 0$. *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} I_*(f_n) = 0.$$

Az 1.2.2.4. Lemma szerint minden $n \in \mathbf{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan folytonos $g_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény, hogy $0 \leq g_n \leq f_n$, és

$$I_*(f_n) < \int_a^b g_n + \varepsilon/2^n.$$

Legyen

$$h_n(x) := \min\{g_0(x), ..., g_n(x)\} \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in [a,b]).$$

Ekkor $h_n \in C[a,b]$, továbbá

$$0 \leq h_n \leq g_n \leq f_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy a (h_n) függvénysorozat monoton fogyó, és

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]).$$

Az 1.2.2.3. Lemma miatt tehát a (h_n) sorozat egyenletesen konvergál az ($[a,b]$-n) azonosan nulla függvényhez. Az Arzelà-tétel előtt mondottakra hivatkozva így

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n = 0.$$

Megmutatjuk, hogy

$$0 \leq I_*(f_n) \leq \int_a^b h_n + \varepsilon\cdot(2 - 1/2^n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(Innen már az 1.2.2.5. Lemma állítása következik.) Lássuk be ehhez először azt, hogy

$$0 \le g_n \le h_n + \sum_{i=0}^{n} \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ti.

$$0 \le g_n = g_i + (g_n - g_i) \le g_i + \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big) \le$$

$$g_i + \sum_{j=0}^{n} \Big(\max\{g_j, ..., g_n\} - g_j \Big) \qquad (i = 0, ..., n).$$

Innen

$$0 \le g_n \le \min\{g_0, ..., g_n\} + \sum_{i=0}^{n} \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big) = h_n + \sum_{i=0}^{n} \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big)$$

már nyilván következik.

Vegyük figyelembe, hogy

$$\max\{g_i, ..., g_n\} \le \max\{f_i, ..., f_n\} = f_i \qquad (i = 0, ..., n),$$

ezért

$$I_*(f_i) \ge I_*(\max\{g_i, ..., g_n\}) = \int_a^b \max\{g_i, ..., g_n\} \qquad (i = 0, ..., n).$$

Következésképpen

$$I_*(f_i) \ge \int_a^b \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big) + \int_a^b g_i \qquad (i = 0, ..., n),$$

tehát

$$\int_a^b \Big(\max\{g_i, ..., g_n\} - g_i \Big) \le I_*(f_i) - \int_a^b g_i < \varepsilon/2^i \qquad (i = 0, ..., n).$$

Mindezekre tekintettel azt mondhatjuk, hogy

$$\int_a^b g_n < \int_a^b h_n + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon/2^i = \int_a^b h_n + \varepsilon \cdot (2 - 1/2^n),$$

és így végül $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0$ miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$(0 \le)\ I_*(f_n) < \int_a^b g_n + \varepsilon/2^n < \int_a^b h_n + 2\varepsilon < 3\varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez pontosan azt jelenti, amit az 1.2.2.5. Lemmában állítottunk.

Rátérve most már az Arzelà-tétel bizonyítására azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n - f) = 0.$$

Mivel

$$\Big|\int_a^b (f_n - f)\Big| \le \int_a^b |f_n - f| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0,$$

ahol $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (x \in [a,b])$. Más szóval (az $f_n \longleftrightarrow |f_n - f| \quad (n \in \mathbf{N})$ cserére gondolva) az Arzelà-tételben feltehetjük, hogy az $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekre $f_n \ge 0$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b])$$

igaz. Legyen

$$F_n(x) := \sup\{f_{n+k}(x) \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}\} \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in [a,b]).$$

Ekkor az $F_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényekre

$$0 \le f_n \le F_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

minden $x \in [a,b]$ helyen az $\big(F_n(x)\big)$ sorozat nyilván monoton fogyó, és a nullához konvergál:

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Ezért az 1.2.2.5. Lemma szerint

$$\lim_{n\to\infty} I_*(F_n) = 0.$$

Mivel

$$0 \le \int_a^b f_n = I_*(f_n) \le I_*(F_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így egyúttal $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0$ is adódik. ■

1.2.3. Teljesség

Tekintsük a kompakt $[a,b]$ intervallum esetén az $[a,b]$-n Riemann-integrálható függvények $R[a,b]$ halmazát, és legyen

$$\rho(f,g) := \int_a^b |f - g| \qquad (f, g \in R[a,b]).$$

Ekkor a $\rho : R[a,b] \to [0,+\infty)$ leképezés félmetrika ($R[a,b]$-n), de az $(R[a,b],\rho)$ félmetrikus tér nem teljes. Más szóval van olyan $f_n \in R[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, amelyik a ρ értelmében Cauchy-sorozat:

$$\rho(f_n, f_m) = \int_a^b |f_n - f_m| \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

de (ugyancsak a ρ értelmében) nem konvergens: nincs olyan $f \in R[a,b]$ függvény, amellyel

$$\rho(f_n, f) = \int_a^b |f_n - f| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Legyen ui. az egyszerűség kedvéért $[a,b] := [0,1]$, ill

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & (0 \le x \le 1/n) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}, 0 < n < m$ indexekre

$$\int_0^1 |f_n - f_m| = \int_0^{1/m} (\sqrt{m} - \sqrt{n}) + \int_{1/m}^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{n} \right) dx =$$

$$\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

azaz az (f_n) sorozat Cauchy-sorozat.

Ugyanakkor nem konvergens (a ρ félmetrika értelmében). Tegyük fel ui., hogy van olyan $f \in R[0,1]$ függvény, amelyre

$$\int_0^1 |f_n - f| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ekkor minden olyen $0 < x < 1$ helyen, ahol az f folytonos, szükségképpen $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Különben az f egy $\xi \in (0,1)$ folytonossági pontjában $|f(\xi) - 1/\sqrt{\xi}| > 0$. Tehát valamilyen $\delta > 0$ szám mellett $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset (0,1)$, és

$$\left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| > \varepsilon := \frac{|f(\xi) - 1/\sqrt{\xi}|}{3} \ (> 0) \qquad (\xi - \delta \le t \le \xi + \delta).$$

Ezért tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}, 1/n < \xi - \delta$ mellett

$$\int_0^1 |f_n - f| \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| dt = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varepsilon \ge 2\delta \cdot \varepsilon \ (> 0).$$

Innen nyilvánvaló, hogy $\rho(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ nem teljesülhet.

Az 1.2.1.1. Tétel miatt $f \in R[0,1]$ esetén az f szakadási helyeinek a halmaza nullamértékű. Mivel minden $0 < r < 1$ számra a $(0,r)$ intervallum nem nullamértékű, ezért egy alkalmas $\xi_r \in (0,r)$ választással $f \in C\{\xi_r\}$, így az előbbiek szerint

$$f(\xi_r) = \frac{1}{\sqrt{\xi_r}} \to +\infty \qquad (r \to 0).$$

Ebből következően az f nem korlátos. Ekkor viszont $f \notin R[0,1]$, szemben a feltételezéssel.

1.3. A Lebesgue-integrál fogalma

Az „eredeti" Lebesgue-féle felépítésben az intervallumoknál „bonyolultabb" szerkezetű halmazok „mérésére", mértékére is szükség van. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy egy (korlátos) $I \subset \mathbf{R}$ intervallum $|I|$ mértékén az intervallum hosszát értjük: $|I| = b - a$, ahol $a := \inf I$, $b := \sup I$. Ennek alapján természetes módon értelmezhetjük (az egyszerűség kedvéért) korlátos nyílt halmazok mértékét a következőképpen. Ha ui. $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ ilyen halmaz és $a \in A$, akkor alkalmas $u, v > 0$ számokkal $(a - u, a + v) \subset A$. Legyen ekkor

$$u_a := \sup\{u > 0 : (a - u, a + v) \subset A\} \ , \ v_a := \sup\{v > 0 : (a - u, a + v) \subset A\}.$$

Világos, hogy $0 < u_a, v_a \in \mathbf{R}$ és

$$I_a := (a - u_a, a + v_a) \subset A \ , \ I_b = I_a \quad (b \in I_a),$$

ill. tetszőleges $a, c \in A$ esetén $I_a = I_c$ vagy $I_a \cap I_c = \emptyset$. Azt mondjuk, hogy a $B \subset A$ halmaz *komponense* az A-nak, ha valamilyen $a \in A$ elemmel $B = I_a$. Az előbbiek szerint az A különböző komponensei diszjunktak, és – $\mathcal{K}_A$-val jelölve a komponensek halmazát – az

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}_A} B$$

előállítás az A halmaz páronként diszjunkt nyílt intervallumokra való felbontása.

Ha $B \in \mathcal{K}_A$ és $r_B \in B \cap \mathbf{Q}$, akkor bármely két különböző $B, \widehat{B}$ komponensre $r_B \neq r_{\widehat{B}}$. Ezért a $\mathcal{K}_A$ halmaz legfeljebb megszámlálható. Legyen ezek után

$$|A| := \sum_{B \in \mathcal{K}_A} |B|$$

az A halmaz mértéke.

Ha most a $D \subset \mathbf{R}$ egy korlátos, zárt halmaz, akkor alkalmas korlátos, nyílt I intervallummal $D \subset I$. Vegyük észre, hogy az $I \setminus D$ halmaz nyílt, legyen

$$|D| := |I| - |I \setminus D|.$$

Könnyű meggondolni, hogy az így definiált $|D|$ mérték csak a D halmaztól függ, az azt lefedő I intervallumtól nem. Világos, hogy $|\emptyset| = 0$.

Tekintsük most a korlátos $Z \subset \mathbf{R}$ halmazt, és legyen

$$|Z|^* := \inf\{|A| \in \mathbf{R} : A \text{ nyílt, korlátos és } Z \subset A\}$$

(a Z *külső mértéke*), ill.

$$|Z|_* := \sup\{|B| \in \mathbf{R} : B \text{ zárt és } B \subset Z\}$$

(a Z *belső mértéke*). A nyílt halmazok előbb felidézett „szerkezetére" gondolva azt is írhatjuk, hogy

$$|Z|^* = \inf\{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| : I_n \ \ (n \in \mathbf{N}) \ \text{ intervallum és } \ Z \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\}.$$

Belátható, hogy $|Z|_* \leq |Z|^*$. Azt mondjuk, hogy az előbbi Z halmaz (Lebesgue-szerint) *mérhető,* ha $|Z|^* = |Z|_*$, és ekkor

$$|Z| := |Z|^* \ (= |Z|_*)$$

a Z halmaz *Lebesgue-mértéke.*

Nem nehéz meggondolni, hogy bármilyen korlátos intervallum Lebesgue-mérhető, és a Lebesgue-mértéke megegyezik a hosszával. Az értelmezésből az is nyilvánvaló, hogy ha valamilyen korlátos $Z \subset \mathbf{R}$ halmazra $|Z|^* = 0$, akkor a Z Lebesgue-mérhető, és $|Z| = 0$. Ekkor ui. $0 \leq |Z|_* \leq |Z|^*$ miatt szükségképpen $|Z|_* = |Z|^* = 0$. A $|Z| = |Z|^* = 0$ egyenlőség viszont azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén megadható intervallumoknak egy olyan (I_n) sorozata, hogy $Z \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$$

(ami egybecseng a fentebbi (ld. 1.1.), a Lebesgue-szerint nullamértékű halmazok definíciójával).

Az előbb értelmezett Lebesgue-mérhetőség, ill. Lebesgue-mérték karakterisztikus tulajdonsága az ún. *szigma-additivitás*: ha $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$, az $A_n \subset \mathbf{R} \ \ (n \in \mathcal{N})$ korlátos halmazok valamennyien Lebesgue-mérhetők, valamint az $A := \bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n$ halmaz is korlátos, akkor az A Lebesgue-mérhető. Ha még az is teljesül, hogy az előbbi A_n-ek páronként diszjunktak, akkor

$$|A| = \sum_{n \in \mathcal{N}} |A_n|.$$

Igaz továbbá, hogy Lebesgue-mérhető (korlátos) $A, B \subset \mathbf{R}$ halmazok esetén $A \setminus B$ is Lebesgue-mérhető. Speciálisan, ha $B \subset A$, akkor

$$|A \setminus B| = |A| - |B|.$$

A kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvényt (Lebesgue-szerint) *mérhetőnek* nevezzük, ha minden $a \in \mathbf{R}$ mellett az

$$\{f > a\} := \{x \in I : f(x) > a\}$$

halmaz Lebesgue-mérhető. Megmutatható, hogy ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ $a < b$ mellett az

$$\{a \leq f < b\} := \{x \in I : a \leq f(x) < b\}$$

halmaz is Lebesgue-mérhető. Azt mondjuk ezek után, hogy a szóban forgó f függvény *Lebesgue-integrálható,* ha megadhatók olyan $y_n \in \mathbf{R} \ \ (n \in \mathbf{Z})$ számok, amelyekre

$$y_n < y_{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}) \ \ , \ \ \lim_{n \to -\infty} y_n = -\infty \ \ , \ \ \lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty$$

teljesül, és bármely $\lambda_n \in [y_n, y_{n+1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ választással

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| \cdot |\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| < +\infty.$$

Belátható, hogy ekkor minden $z_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{Z})$,

$$z_n < z_{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}), \ \lim_{n \to -\infty} z_n = -\infty, \ \lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty$$

„lépcső" és $\mu_n \in [z_n, z_{n+1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ esetén is

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n| \cdot |\{z_n \leq f < z_{n+1}\}| < +\infty,$$

így létezik a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot |\{z_n \leq f < z_{n+1}\}| \in \mathbf{R}$$

összeg is. Igaz továbbá, hogy egyértelműen megadható olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ szám, amelyre teljesül a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\delta > 0$ mellett

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \cdot |\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| - \alpha \right| < \varepsilon$$

minden olyan (y_n) lépcsőre, amelyre $\sup\{y_{n+1} - y_n : n \in \mathbf{Z}\} < \delta$ fennáll, és bármilyen $\lambda_n \in [y_n, y_{n+1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ sorozatra. Ez az α szám az f függvény *Lebesgue-integrálja.*

Világos, hogy pl. minden korlátos és mérhető $f : I \to \mathbf{R}$ függvény Lebesgue-integrálható. Ekkor ui. tetszőleges (y_n) lépcsőt is véve az f korlátossága miatt valamilyen $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\{y_n \leq f < y_{n+1}\} = \emptyset \qquad (n \in \mathbf{Z}, |n| > N),$$

így

$$|\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| = 0 \qquad (n \in \mathbf{Z}, |n| > N).$$

Következésképpen - véges összeg lévén – akármilyen $\lambda_n \in [y_n, y_{n+1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ sorozattal

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| \cdot |\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| = \sum_{n=-N}^{N} |y_n| \cdot |\{\lambda_n \leq f < y_{n+1}\}| < +\infty.$$

Ha itt alkalmas $u, v \in \mathbf{R}, u < v$ számokkal $\mathcal{R}_f \subset (u, v)$, akkor nyilván elegendő a fentiekben az

$$y_0 = u < y_1 < \ldots < y_s = v$$

alakú lépcsőket figyelembe venni (valamilyen $0 < s \in \mathbf{N}$ mellett). Ezzel egyúttal szembetűnően kidomborodik az „integrál" fogalom Riemann-, ill. Lebesgue-féle megközlítése közötti

különbség: míg Riemann a szóban forgó függvény értelmezési tartományának a felosztásaiból indult ki, addig Lebesgue „fordítva", az értékkészletet (ill. az azt lefedő intervallumot) osztotta fel. A Riemann-(Darboux-) féle alsó-felső integrálok kiszámítására gondolva a (Riemann-)integrálhatóságot természetszerűleg erősen befolyásolja a függvény ingadozása az értelmezési tartomány osztásintervallumain. Ez utóbbi következményeként nem meglepő, hogy „lényegében" csak a folytonos függvényekre működik az integrál. Ez az effektus viszont eleve kiküszöbölődik a Lebesgue-féle felépítéskor az értékkészlet felosztása révén.

Tekintsük pl. az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

(nem Riemann-integrálható) Dirichlet-függvényt. Ha itt (amint az feltehető) az előbbi $y_0, ..., y_s$ lépcsőre $y_0 = 0$ és $y_{s-1} \leq 1 < y_s$ teljesül, akkor bármilyen $\lambda_n \in [y_n, y_{n+1})$ $(n = 0, ..., s-1)$ választással

$$\sum_{n=0}^{s-1} \lambda_n \cdot |\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| = \lambda_0 \cdot |\mathbf{Q} \cap [0,1]| + \lambda_{s-1} \cdot |[0,1] \setminus \mathbf{Q}| = \lambda_{s-1},$$

hiszen – lévén a $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ halmaz megszámlálható – $|\mathbf{Q} \cap [0,1]| = 0$, és

$$|\{y_{s-1} \leq f < y_s\}| = |[0,1] \setminus \mathbf{Q}| = 1 - |\mathbf{Q} \cap [0,1]| = 1.$$

Ezért

$$\left| \sum_{n=0}^{s-1} \lambda_n \cdot |\{y_n \leq f < y_{n+1}\}| - 1 \right| = |\lambda_{s-1} - 1| <$$
$$y_s - y_{s-1} \leq \max\{|y_k - y_{k-1}| : k = 1, ..., s\},$$

amiből az f függvény Lebesgue-integrálhatósága már következik (ahol tehát az f Lebesgue-integrálja 1).

1.4. A Riesz-féle felépítés

Amint azt fentebb már megjegyeztük, bizonyos szempontból a legsúlyosabb hiánossága a Riemann-integrálnak a határátmenettel szembeni viselkedése (hogy ti. csak „erős" mellékfeltételekkel biztosítható az integrálás és a határátmenet felcserélhetősége). Ezt a szempontot helyezte a középpontba Riesz Frigyes, amikor – nem sokkal Lebesgue nevezetes eredményeinek a megjelenése után – a Lebesgue-féle gondolat egy új interpretálását fogalmazta meg. Az alábbiakban röviden vázoljuk a Riesz-féle felépítés alapgondolatát.

Az egyszerűség kedvéért induljunk ki ehhez egy (valódi) kompakt $[a, b]$ intervallumból. A $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvényt *lépcsősfüggvénynek* nevezzük, ha alkalmas

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

osztópontokkal és $c_0, ..., c_n \in \mathbf{R}$ konstansokkal minden $k = 0, ..., n-1$ esetén (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett)

$$h(x) = c_k \qquad (x_k < x < x_{k+1}).$$

A $h(x_j) \in \mathbf{R}$ $(j = 0, ..., n)$ helyettesítési értékek tetszőlegesek lehetnek. Legyen ekkor a h függvény *integrálja* a következő:

$$\int_a^b h := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

(Világos, hogy $h \in R[a, b]$, és az előbbi $\int_a^b h$ nem más, mint a h függvény Riemann-integrálja.)

Az előbbiekben definiált lépcsősfüggvények halmazát (Riesz nyomán) C_0-lal fogjuk jelölni. A C_0 halmaz bővítése szempontából alapvető fontosságú Riesz alábbi két lemmája, amelyeket ő A. Lemmának és B. Lemmának nevezett.

A. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* $h_n \in C_0$ $(n \in \mathbf{N})$ *lépcsősfüggvény-sorozatra a következők teljesülnek:*

1° *minden* $x \in [a, b]$ *és* $n \in \mathbf{N}$ *mellett* $0 \le h_{n+1}(x) \le h_n(x)$;

2° *valamilyen nullamértékű* $\mathcal{N} \subset [a, b]$ *halmazzal*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \qquad (x \in [a, b] \setminus \mathcal{N}).$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbf{N}$ indexre a h_n osztópontjai véges halmazt alkotnak, így ez utóbbiak egyesítése egy legfeljebb megszámlálható halmaz, következésképpen nullamértékű. Ha ezt a tételben szereplő $\mathcal{N}$ halmazzal egyesítjük, akkor „még mindig" egy $\mathcal{R} \subset [a, b]$ nullamértékű halmazt kapunk. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik nyílt intervallumoknak egy olyan (I_n) sorozata, amellyel

$$\mathcal{R} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Ha $x \in [a, b] \setminus \mathcal{R}$, akkor $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Így létezik olyan $N_x \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$h_m(x) < \varepsilon \qquad (N_x \le m \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan $h_{N_x}(x) < \varepsilon$. Mivel az x nem osztópontja a h_{N_x}-nek, ezért valamilyen $J_x \subset [a, b]$ nyílt intervallummal $x \in J_x$ és

$$h_{N_x}(t) < \varepsilon \qquad (t \in J_x).$$

A (h_n) sorozat feltételezett monoton fogyása alapján egyúttal

$$h_m(t) < \varepsilon \qquad (t \in J_x, N_x \le m \in \mathbf{N})$$

is igaz. Világos, hogy

$$[a,b] \subset \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{x\in[a,b]\setminus\mathcal{R}}\Big),$$

ezért az $[a,b]$ kompaktságára tekintettel egy-egy véges $U \subset \mathbf{N}$, $V \subset [a,b]\setminus\mathcal{R}$ halmazzal is

$$[a,b] \subset \Big(\bigcup_{n\in U} I_n\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{x\in V} J_x\Big).$$

Az $[a,b]$ előbbi lefedésében szereplő intervallumok $[a,b]$-beli végpontjai (ha kell, az a,b pontok hozzávételével) egy

$$z_0 = a < \ldots < z_s = b$$

felosztást határoznak meg valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett. Legyen

$$N := \max\{N_x : x \in V\},$$

ekkor minden $N < n \in \mathbf{N}$ indexre

$$0 \le \int_a^b h_n = \sum_k^{(1)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} h_n + \sum_k^{(2)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} h_n,$$

ahol $\sum_k^{(1)}$ az olyan $k = 0, ..., s-1$ indexekre vonatkozó összegzést jelenti, amelyekre egy alkalmas $j \in U$ esetén $(z_k, z_{k+1}) \subset I_j$, a $\sum_k^{(2)}$ összegzés pedig a maradék $k = 0, ..., s-1$ indexekre vonatkozik. Minden utóbbi k-ra valamilyen $x \in V$ hellyel $(z_k, z_{k+1}) \subset J_x$.

Figyelembe véve a fentieket azt mondhatjuk, hogy a h_0 függvény egy K felső korlátjával

$$0 \le \int_a^b h_n \le K\cdot \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| + \varepsilon\cdot \sum_{k=0}^{s-1} (z_{k+1} - z_k) < K\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot(b-a) = (K+b-a)\cdot\varepsilon.$$

Mindez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0$. ■

B. Lemma. *Az előbbiekben szereplő $h_n \in C_0$ $(n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvény-sorozatról most azt tegyük fel, hogy*

1° *minden $x \in [a,b]$ és $n \in \mathbf{N}$ mellett $h_n(x) \le h_{n+1}(x)$;*

2° *az integrálok $\Big(\int_a^b h_n\Big)$ sorozata korlátos.*

Ekkor egy alkalmas nullamértékű $\mathcal{M} \subset [a,b]$ halmazzal

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) < +\infty \qquad (x \in [a,b]\setminus\mathcal{M}).$$

Bizonyítás. Nyugodtan feltehetjük, hogy a szóban forgó h_n-ek valamennyien nemnegatívok, ui. ellenkező esetben tekintsük a $(h_n - h_0)$ (már nyilván nem-negatív és C_0-beli) sorozatot. Világos, hogy ha egy nullamértékű $\mathcal{M} \subset [a,b]$ halmazzal

$$\lim_{n\to\infty} \Big(h_n(x) - h_0(x)\Big) < +\infty \qquad (x \in [a,b] \setminus \mathcal{M})$$

igaz, akkor ugyanez teljesül a (h_n) sorozatra is. Jegyezzük meg továbbá, hogy $\lim_{n\to\infty} h_n$ helyett (a monoton növekedés miatt) írhatunk $\sup_n h_n$-et is. Továbbá ugyanez igaz az integrálok $\left(\int_a^b h_n\right)$ sorozatára is, ti. a C_0-beli függvények integráljának a értelmezése alapján a most mondott integrál-sorozat is monoton növő.

Legyen

$$A := \{x \in [a,b] : \sup_n h_n(x) = +\infty\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A halmaz nullamértékű. Legyen ehhez $\delta > 0$ és

$$A_{n\delta} := \{x \in [a,b] : h_n(x) > \delta\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $A_{n\delta} \subset A_{n+1\delta}$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}.$$

Mivel minden h_n lépcsősfüggvény, ezért az $A_{n\delta}$ halmaz legfeljebb véges sok (egymásba nem nyúló) I_{nk} $(k = 0, 1, ...)$ intervallum és (osztó)pont egyesítése $(n \in \mathbf{N})$. Ha

$$q := \sup_n \int_a^b h_n,$$

akkor

$$q \geq \int_a^b h_n \geq \sum_k \int_{I_{nk}} h_n \geq \delta \cdot \sum_k |I_{nk}| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Más szóval

$$(*) \qquad \sum_k |I_{nk}| \leq \frac{q}{\delta} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen most már adott az $\varepsilon > 0$ szám, és fedjük le a h_n-ek osztópontjainak az egyesítését (ami egy legfeljebb megszámlálható, ezért nullamértékű halmaz) J_n $(n \in \mathbf{N})$ intervallumoknak egy $\varepsilon/2$-nél kisebb összhosszúságú sorozatával. Ha $n \in \mathbf{N}$ és I_{nk} egy, az $A_{n\delta}$ halmazt „alkotó" intervallum, akkor a (h_n) sorozat monoton növekedése miatt $I_{nk} \subset A_{n+1\delta}$. Így vagy az I_{nk} lesz egy, az $A_{n+1\delta}$-ban szereplő intervallum, vagy esetleg az I_{nk} egy hosszabb intervallummá bővül az $A_{n+1\delta}$-ban. Mindezt figyelembe véve oda jutunk, hogy az $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}$ halmazt (az osztópontoktól eltekintve) legfeljebb megszámlálható sok olyan I_n $(n = 0, 1, ...)$ intervallum alkotja, amelyeknek az összhosszára $(*)$ alapján

$$\sum_n |I_n| \leq \frac{q}{\delta}$$

teljesül. Ha itt a $\delta > 0$ számot úgy választjuk meg, hogy $q/\delta < \varepsilon/2$, akkor az $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}$ halmazt, és így az A-t lefedő $J_n, I_n \quad (n = 0, 1, ...)$ intervallumokra

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |I_n| < \varepsilon.$$

Ezért az A halmaz valóban nullamértékű. ■

Jelöljük ezek után C_1-gyel azoknak az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvényeknek a halmazát, amelyekre egy, a B. Lemmában szereplő $h_n \in C_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvény-sorozattal (és az ottani $\mathcal{M} \subset [a, b]$ nullamértékű halmazzal)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) < +\infty \qquad (x \in [a, b] \setminus \mathcal{M}).$$

Mivel (a B. Lemma feltételei szerint) minden ilyen (h_n) sorozatra az integrálok $\left(\int_a^b h_n\right)$ sorozata korlátos (és monoton növő), ezért $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n \in \mathbf{R}$. Megmutatható, hogy ez utóbbi határérték független a (h_n) sorozattól, csak az f függvénytől függ. Ezért van értelme az alábbi integrál-definíciónak:

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.$$

Nyilvánvaló, hogy ha itt $f \in C_0$, akkor a $h_n := f \quad (n \in \mathbf{N})$ választással a (h_n) sorozat egy, a B. Lemma feltételeinek eleget tevő lépcsősfüggvény-sorozat. Ezért $f \in C_1$, és az f függvény „C_1-beli"

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f = \int_a^b f$$

integrálja ugyanaz, mint a „C_0-beli" integrálja. Röviden: a C_1 „tér" (az integrállal együtt) kiterjesztése a C_0-nak. Így pl. a határátmenet és az integrál kapcsolatát taglaló előbbi pontban már említett

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0, 1],\ n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozatra (ahol az (r_k) sorozat a $[0, 1]$-beli racionális számok sorozata) nyilván $f_n \in C_0$, és $f_n \le f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel $\int_0^1 f_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért az (f_n) eleget tesz a B. Lemma feltételeinek. Továbbá az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0, 1])$$

határfüggvény a (nem Riemann-integrálható) Dirichlet-függvény. Következésképpen $f \in C_1$, és

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0.$$

Legyen végül

$$C_2 := \{g - h : g, h \in C_1\}.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha valamilyen $g, h, G, H \in C_1$ függvényekkel $g - h = G - H$, akkor

$$\int_a^b g - \int_a^b h = \int_a^b G - \int_a^b H.$$

Más szóval az előbbi $\int_a^b g - \int_a^b h$ különbség valójában nem függ a g, h függvényektől, csak az $f := g - h$-tól. Ezért az ilyen f függvény integrálját definiálhatjuk az alábbiak szerint:

$$\int_a^b f := \int_a^b g - \int_a^b h.$$

A C_2 függvényosztály elemei a *Lebesgue-integrálható* függvények, $f \in C_2$ esetén pedig az előbbi $\int_a^b f$ szám az f *Lebesgue-integrálja.*

Ha adott egy $A \subset [a, b]$ halmaz, akkor a

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in [a, b] \setminus A) \end{cases}$$

függvény az A *karakterisztikus függvénye.* Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Lebesgue-mérhető,* ha $\chi_A \in C_2$. Ez utóbbi esetben

$$|A| := \int_a^b \chi_A$$

az A halmaz *Lebesgue-mértéke.* (Könnyű meggondolni, hogy az így definiált $|A|$ mérték csak az A halmaztól függ, az őt „lefedő" $[a, b]$ intervallumtól nem.) Mivel itt az $[a, b]$ intervallum tetszőleges lehet, ezért világos, hogy bármilyen korlátos $A \subset \mathbf{R}$ halmaz esetén eldönthetjük, hogy az Lebesgue-mérhető-e, és ha igen, akkor értelmeztük az $|A|$ Lebesgue-mértékét. Ha az $A \subset \mathbf{R}$ nem korlátos, akkor az

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \cap [-n, n]\Big) =: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

felbontásra hivatkozva akkor mondjuk, hogy az A *Lebesgue-mérhető,* ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az A_n Lebesgue-mérhető. Ebben az esetben

$$|A| := \lim_{n \to \infty} |A_n|$$

az A *Lebesgue-mértéke.* Egyszerűen belátható, hogy bármilyen $I \subset \mathbf{R}$ intervallum Lebesgue-mérhető, és az $|I|$ Lebesgue-mértéke a „megszokott" $|I|$ intervallumhossz.

1.5. Megjegyzések

i) Világos, hogy ha az 1.2.2.5. Lemmában az $f_n \in R[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ kiegészítő feltételezéssel élünk, akkor az Arzelà-tételt (ld. 1.2.2.5. Tétel) kapjuk monoton fogyó, pontonként nullához tartó függvénysorozatra. Ebben az esetben az 1.2.2.5. Lemma (azaz az Arzelà-tétel) bizonyítása némileg leegyszerűsödik. Ekkor ui. a kulcsszerepet játszó

$$0 \le I_*(f_n) \le \int_a^b h_n + \varepsilon \cdot (2 - 1/2^n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőtlenséget $I_*(f_n) = \int_a^b f_n \ (n \in \mathbf{N})$ alapján a következőképpen „intézhetjük el":

$$f_n = \min\{f_0, ..., f_n\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt

$$0 \le f_n - h_n = \min\{f_0, ..., f_n\} - \min\{g_0, ..., g_n\} \le \sum_{i=0}^{n} (f_i - g_i) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért (mindkét oldalt integrálva)

$$0 \le \int_a^b f_n - \int_a^b h_n \le \sum_{i=0}^{n} \int_a^b (f_i - g_i) \le \sum_{i=0}^{n} \varepsilon/2^i = \varepsilon \cdot (2 - 1/2^n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

ii) Riesz Frigyes mutatta meg, hogy az (általános) Arzelà-tétel (ld. 1.2.2.2. Tétel) levezethető az előbbi megjegyzésben megfogalmazott (a monoton fogyólag nullához konvergáló függvénysorozatokra megfogalmazott) speciális esetéből.

iii) (Fatou-lemma.) Tegyük fel, hogy $0 \le f_n \in R[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$, és minden $x \in [a,b]$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R}$ határérték. Ha az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

határfüggvény $R[a,b]$-beli, akkor

$$\int_a^b f \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Ui. $f - f_n \le f$ és $f \ge 0$ miatt

$$(f - f_n)^+ \le f \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol egy $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre

$$g^+(x) := \begin{cases} g(x) & (g(x) \ge 0) \\ 0 & (g(x) < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{D}_g).$$

Könnyen belátható, hogy ha $g \in R[a,b]$, akkor $g^+ \in R[a,b]$ is igaz. Következésképpen $(f-f_n)^+ \in R[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel

$$\lim_{n\to\infty}(f-f_n)^+(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]),$$

így az Arzelà-tétel (ld. 1.2.2.2. Tétel) szerint

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^+ = 0.$$

Ugyanakkor

$$f = f - f_n + f_n \le (f-f_n)^+ + f_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\int_a^b f \le \int_a^b (f-f_n)^+ + \int_a^b f_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\int_a^b f \le \liminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f-f_n)^+ + \int_a^b f_n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^+ + \liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n$$

már következik.

iv) Ha az előző megjegyzésben azt is feltesszük, hogy az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, akkor nyilván $\int_a^b f \le \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ írható. Sőt, ha itt

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n,$$

akkor az „erősebb"

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-f_n| = 0$$

állítás is igaz.

Valóban, ha az előbbi megjegyzésben egy $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre bevezetett g^+ (a szóban forgó függvény *pozitív része*) mellett

$$g^-(x) := \begin{cases} -g(x) & (g(x) \le 0) \\ 0 & (g(x) > 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{D}_g)$$

a g függvény *negatív része,* akkor

$$g = g^+ - g^- \ , \ |g| = g^+ + g^-.$$

Az előbbi megjegyzésben megmutattuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^+ = 0.$$

Ezért az

$$(f-f_n)^- = (f-f_n)^+ - (f-f_n) \qquad (n\in\mathbf{N})$$

egyenlőségre tekintettel

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^- = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^+ - \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n) = 0,$$

következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-f_n| = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^+ + \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^- = 0.$$

v) W. Young az alábbi kiterjesztését adta az Arzelà-tételnek (ld. 1.2.2.2. Tétel): tegyük fel, hogy az

$$f_n, g_n, h_n \in R[a,b] \qquad (n\in\mathbf{N})$$

függvényekre

$$h_n(x) \le f_n(x) \le g_n(x) \qquad (x\in[a,b], n\in\mathbf{N}),$$

valamint az $f, g, h \in R[a,b]$ függvényekkel

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x),\ h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \qquad (x\in[a,b]).$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$\int_a^b g = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n,\ \int_a^b h = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n.$$

Ekkor

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

Megjegyezzük, hogy ha (az 1.2.2.2. Tétel jelöléseivel) az

$$|f_n(x)| \le C \qquad (x\in[a,b], n\in\mathbf{N})$$

egyenletes korlátosság feltétele teljesül, akkor a

$$h_n \equiv -C\ ,\ \ g_n \equiv C \qquad (n\in\mathbf{N})$$

választással a fenti Young-tétel az Arzelà-tételt jelenti.

A most megfogalmazott Young-tétel bizonyításához bocsássuk előre az alábbi, önmagában is érdekes állítást:

ha $0 \le G, F, H \in R[a,b]$ és $G \le F + H$, akkor alkalmas $0 \le G_1, G_2 \in R[a,b]$ függvényekkel $G = G_1 + G_2$, valamint $G_1 \le F$ és $G_2 \le H$. Legyen ui.

$$G_1 := \min\{G, F\},\ G_2 := G - G_1.$$

Ekkor nyilván $0 \le G_1, G_2 \in R[a,b]$, és $G_1 \le F$. Továbbá

$$G_2 = \min\{G, F + H\} - \min\{G, F\} \le F + H - F = H.$$

Mindezeket felhasználva a Young-tétel bizonyítását illetően a következőt mondhatjuk:

$$0 \le f_n - h_n \le g_n - h_n = g_n - h_n - (g - h) + (g - h) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol a $(g_n - h_n)$ sorozatra alkalmazható a iv) megjegyzés: az

$$u_n := |g_n - h_n - g + h| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$0 \le f_n - h_n = f_n - f - h_n + f \le$$
$$g_n - h_n - g + h + (g - h) \le u_n + |g - h| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$0 \le f_n - f - h_n + f = v_n + w_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol a $0 \le v_n, w_n \in R[a,b]$ függvényekre

$$0 \le v_n \le u_n\ ,\ \ 0 \le w_n \le |g - h| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]),$$

így $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$ $(x \in [a,b])$ és $\lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n = 0$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = f(x) - h(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Az Arzelà-tétel (ld. 1.2.2.2. Tétel) feltételei

$$0 \le w_n \le |g - h| \in R[a,b] \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt teljesülnek a (w_n) sorozatra, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b w_n = \int_a^b f - \int_a^b h.$$

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f_n - f) - \int_a^b h_n + \int_a^b f\right) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b v_n + \lim_{n\to\infty}\int_a^b w_n = \int_a^b f - \int_a^b h.$$

Feltettük, hogy $\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n = \int_a^b h$, ezért az előbbi egyenlőségből

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n - f) = 0,$$

azaz $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ adódik.

vi) A Riesz-féle felépítésnek (ld. 1.4.) már az „első lépéseiből" is látszik (ld. A. Lemma és B. Lemma), hogy a határátmenet és az integrálás (bizonyos feltételek melletti) felcserélhetőségének a biztosítása az egyik alapvető szempont az új integrálfogalom megalkotásakor. Az ezzel kapcsolatos (és az egész Lebesgue-elméletet illetően meghatározó) állítás lesz majd az ún. Lebesgue-féle konvergencia-tétel (amit itt csak egy speciális esetben fogalmazunk meg). Tegyük fel ehhez, hogy az $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ Lebesgue-integrálható függvényekből álló sorozat rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal: valamilyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényre és egy nullamértékű $Z \subset [a,b]$ halmazra

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b] \setminus Z),$$

továbbá egy Lebesgue-integrálható $F : [a,b] \to [0,+\infty)$ függvénnyel és nullamértékű $Z_n \subset [a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$|f_n(x)| \le F(x) \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in [a,b] \setminus Z_n).$$

Ekkor az f is Lebesgue-integrálható, a (Lebesgue-) integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, és

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

Az is igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n - f| = 0,$$

más szóval az (f_n) sorozat az ún. integrálmetrika értelmeében is konvergál az f-hez. Ez a helyzet speciálisan akkor, ha az f_n-ek egyenletesen korlátosak: az F-nek választható egy (alkalmas) konstansfüggvény. (Ez az ún. „kis" Lebesgue-tétel.)

vii) Kiderül majd, hogy minden $f \in R[a,b]$ (azaz Riemann-integrálható) függvény Lebesgue-integrálható is, és az f Lebesgue-integrálja megegyezik a Riemann-integráljával. Ezért az előbbi megjegyzésben szereplő (kis) Lebesgue-tétel megfogalmazható a Riemann-integrálható függvények körében, amikor is a következő állítást kapjuk: ha az $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények sorozata egyenletesen korlátos, és (pontonként) konvergál egy Riemann-integrálható $f \in R[a,b]$ függvényhez, akkor $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ (ahol most az integrálok Riemann-integrálok). Ez nem más, mint az Arzelà-tétel (ld. 1.2.2.2. Tétel).

viii) A fentiekben (pl. a Lebesgue-tételben, a Riesz-lemmákban) többször előfordult az a helyzet, hogy egy bizonyos tulajdonság esetleg egy nullamértékű halmaz pontjainak a kivételével igaz valamilyen halmaz pontjaiban. Erre a szituációra honosodott meg az alábbi terminológia, miszerint a szóban forgó tulajdonság (az illető halmaz pontjaira nézve) *majdnem mindenütt* igaz (röviden: m.m. igaz). Így pl. az A. Lemma 2° feltétele ebben a megfogalmazásban úgy szól, hogy a (h_n) sorozat az $[a,b]$ intervallum pontjaiban m.m. konvergál a 0-hoz. Hasonlóan, a B. Lemmában $\lim_{n\to\infty} h_n(x) < +\infty$ (m.m. $x \in [a,b]$). A Lebesgue-tételben (ld. vi) megjegyzés) az (f_n) sorozat m.m. $x \in [a,b]$ esetén konvergens, valamint $|f_n(x)| \le F(x)$ $(n \in \mathbf{N}$, m.m. $x \in [a,b])$.

ix) A Riemann-integrál egyik általánosításaként az alábbi módon jutunk el az ún. Riemann-Stieltjes-integrálhoz. Legyenek ehhez adottak az

$$f,\ g : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvények, és valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett vegyük az $[a,b]$ intervallumnak egy

$$\tau := \{x_0, ..., x_n\}$$

felosztását (ahol most $x_0 := a \le x_1 \le \ldots \le x_n := b$. A későbbiek érdekében technikai okokból az x_i-k között egyenlőket is megengedünk.) Legyenek továbbá (tetszőlegesen) adottak a $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, ..., n-1)$ pontok, és a $\xi_\tau := (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ jelöléssel definiáljuk az $S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)$ összeget a következőképpen:

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

(Az előbbi összegben nyilván szorítkozhatunk olyan i-kre, amelyekre $x_i < x_{i+1}$.) Tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, amivel a fenti τ és a ξ_i-k tetszőleges megválasztása mellett

$$|\alpha - S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)| < \varepsilon,$$

hacsak

$$\delta_\tau = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, ..., n-1\} < \delta.$$

Világos, hogy ekkor egyértelműen létezik ilyen α. Mindezt röviden így fogjuk jelölni:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \alpha.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az f függvény *Riemann-Stieltjes-integrálható* a g függvényre nézve, az

$$\int_a^b f\,dg := \alpha$$

szám pedig az f függvény *Riemann-Stieltjes-integrálja* a g függvényre vonatkozóan.

x) Ha az előbbi megjegyzésben $g(x) := x$ $(x \in [a,b])$, akkor

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvénynek a τ felosztásra vonatkozó Riemann-közelítő összege (ld. 1.1.). Így (ld. 1.1.2. Tétel) – feltételezve, hogy $f \in R[a,b]$ – létezik az $\int_a^b f\,dg$ Riemann-Stieltjes-integrál, és

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)\,dx$$

(az f „közönséges" Riemann-integrálja).

xi) A Cauchy-kritérium alapján az $\int f\,dg$ integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármelyik $\varepsilon > 0$ esetén legyen olyan $\delta > 0$, amivel

$$|S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g) - S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)| < \varepsilon$$

teljesül az $[a,b]$ intervallum minden olyan σ, τ felosztásaira, amelyekre δ_σ, $\delta_\tau < \delta$, mégpedig a ζ_σ, ξ_τ vektorok tetszőleges megadása mellett.

xii) Könnyen meggondolható, hogy ha $f, g, h : [a,b] \to \mathbf{R}$ és léteznek az $\int_a^b f\,dg$, $\int_a^b f\,dh$ integrálok, akkor minden $c \in \mathbf{R}$ konstanssal az $\int_a^n f\,d(g+ch)$ integrál is létezik, és

$$\int_a^b f\,d(g+ch) = \int_a^b f\,dg + c\cdot\int_a^b f\,dh.$$

Világos továbbá, hogy ha létezik az $\int_a^b f\,dg$ integrál, akkor minden $a < c < b$ esetén az

$$\int_a^c f\,dg := \int_a^c f_{|_{[a,c]}}\,dg_{|_{[a,c]}},\ \int_c^b f\,dg := \int_c^b f_{|_{[c,b]}}\,dg_{|_{[c,b]}}$$

integrálok is léteznek, és

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

Jegyezzük meg ugyanakkor, hogy mindez „fordítva" nem igaz. Legyen ui. $a < c < b$, és

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (a \le x \le c) \\ 1 & (c < x \le b) \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} 0 & (a \le x < c) \\ 1 & (c \le x \le b). \end{cases}$$

Ekkor eléggé nyilvánvaló, hogy léteznek az $\int_a^c f\,dg = 0$, $\int_c^b f\,dg = 0$ integrálok. Ha viszont a $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ olyan felosztás, hogy $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, és $x_j < c < x_{j+1}$ (valamilyen – egyértelműen létező – $j \in \{0, ..., n-1\}$ indexszel), akkor tetszőleges ξ_τ választással

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = f(\xi_j) = \begin{cases} 0 & (\xi_j < c) \\ 1 & (\xi_j > c). \end{cases}$$

Innen már világos, hogy nem létezik a $\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f, g)$ határérték, azaz az $\int f\,dg$ integrál.

xiii) A Riemann-Stieltjes-integrálokra is igaz marad a „közönséges" integrálokkal kapcsolatos parciális integrálás szabálya. Nevezetesen, ha létezik az $\int_a^b f\,dg$ integrál, akkor az $\int_a^b g\,df$ integrál is létezik, továbbá

$$\int_a^b g\,df = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f\,dg.$$

Legyen ui. adott a $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$ felosztás és a $\xi_\tau = (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ vektor (ld. ix)). Ha $\xi_{-1} := a$, $\xi_n := b$, akkor

$$S_{\tau,\xi_\tau}(g, f) = \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\cdot (f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\cdot f(x_{i+1}) - \sum_{i=-1}^{n-2} g(\xi_{i+1})\cdot f(x_{i+1}) =$$

$$g(\xi_n)\cdot f(x_n) - g(\xi_{-1})\cdot f(x_0) - \sum_{i=-1}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot (g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)) =$$

$$f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \sum_{i=-1}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot (g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)).$$

Nyilvánvaló, hogy $\xi_i \le x_{i+1} \le \xi_{i+1}$ $(i = -1, ..., n-1)$, így a $\sigma := \{\xi_{-1}, ..., \xi_n\} \subset [a, b]$ felosztással és az $x_\sigma := (x_0, ..., x_n)$ vektorral

$$S_{\tau,\xi_\tau}(g, f) = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - S_{\sigma,x_\sigma}(f, g).$$

Az is világos, hogy $\delta_\tau \to 0$ esetén $\delta_\sigma \to 0$, ezért valóban létezik a véges

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(g,f) = \int_a^b g\,df = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \lim_{\delta_\sigma \to 0} S_{\sigma,x_\sigma}(f,g) =$$

$$f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b g\,df$$

határérték.

xiv) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C[a,b]$, a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény pedig monoton növő, akkor létezik az $\int f\,dg$ Riemann-Stieltjes-integrál. Legyen ehhez

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\},\ \sigma = \{z_0, ..., z_m\}$$

az $[a,b]$ intervallum egy-egy felosztása, és jelöljük $\{y_0, ..., y_r\}$-rel a $\tau \cup \sigma$ felosztást. Ekkor minden $l = 0, ..., n-1$ indexre alkalmasan választott $\mathcal{I}_l \subset \{0, ..., r-1\}$ halmazzal az $[y_j, y_{j+1}]$ $(j \in \mathcal{I}_l)$ intervallumok az $[x_l, x_{l+1}]$-nek egy felosztását alkotják. Hasonlóan, ha $i = 0, ..., m-1$, akkor valamilyen $\mathcal{I}_i \subset \{0, ..., r-1\}$ mellett az $[y_j, y_{j+1}]$ $(j \in \mathcal{I}_i)$ intervallumok a $[z_i, z_{i+1}]$-nek egy felosztását adják. Világos, hogy tetszőleges ξ_τ, ζ_σ vektorok esetén

$$f(\xi_l)\cdot (g(x_{l+1}) - g(x_l)) = \sum_{j \in \mathcal{I}_l} f(\xi_l)\cdot (g(y_{j+1}) - g(y_j)) \qquad (l = 0, ..., n-1),$$

$$f(\zeta_i)\cdot (g(z_{i+1}) - g(z_i)) = \sum_{j \in \mathcal{I}_i} f(\zeta_i)\cdot (g(y_{j+1}) - g(y_j)) \qquad (i = 0, ..., m-1).$$

Következésképpen

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \sum_{k=0}^{r-1} f(\varrho_k)\cdot (g(y_{k+1}) - g(y_k)),$$

$$S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g) = \sum_{k=0}^{r-1} f(\gamma_k)\cdot (g(y_{k+1}) - g(y_k)),$$

ahol az itt szereplő ϱ_k-k és γ_k-k mindegyike vagy egy alkalmas ξ_l-lel $(l = 0, ..., n-1)$, vagy pedig egy ζ_i-vel $(i = 0, ..., m-1)$ egyezik meg. Az is eléggé nyilvánvaló, hogy

$$|\varrho_k - \gamma_k| \le 2\cdot \max\{\delta_\tau, \delta_\sigma\} \qquad (k = 0, ..., r-1).$$

Az f függvény egyenletes folytonossága miatt tetszőleges $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ mellett van olyan $0 < \delta \in \mathbf{R}$, hogy $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ $(u, v \in [a,b], |u - v| < \delta)$. Ha tehát $2\cdot \max\{\delta_\tau, \delta_\sigma\} < \delta$, akkor

$$\left|S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) - S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g)\right| \le \sum_{k=0}^{r-1} |f(\varrho_k) - f(\gamma_k)|\cdot (g(y_{k+1}) - g(y_k)) \le$$

$$\varepsilon\cdot\sum_{k=0}^{r-1}(g(y_{k+1})-g(y_k))=\varepsilon\cdot(g(b)-g(a)).$$

Teljesül tehát a Cauchy-kritérium, így létezik a (véges) $\lim_{\delta_\tau\to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)$ határérték, azaz az $\int_a^b f\,dg$ integrál.

xv) A fenti (ld. xiv)) monoton növő $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvénnyel az $[a,b]$ intervallum minden τ felosztására tetszőleges ξ_τ és $f\in C[a,b]$ mellett

$$|S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)|=\Big|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot(g(x_{i+1})-g(x_i))\Big|\le\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot(g(x_{i+1})-g(x_i))\le$$

$$\|f\|\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(g(x_{i+1})-g(x_i))=(g(b)-g(a))\cdot\|f\|$$

(ahol $\|f\|:=\max\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$). Ezért egyúttal

$$\left|\int_a^b f\,dg\right|\le(g(b)-g(a))\cdot\|f\|.$$

Ha még $f\ge 0$ is igaz, akkor (az előbbi paraméterekkel) nyilván $S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)\ge 0$, így $\int_a^b f\,dg\ge 0$. Sőt, ha $f_1,\,f_2\in C[a,b]$ és $f_1\ge f_2$, akkor

$$\int_a^b f_1\,dg\ge\int_a^b f_2\,dg.$$

Tehát bármilyen $f\in C[a,b]$ esetén az $f_1\equiv\min\mathcal{R}_f$, $f_2\equiv\max\mathcal{R}_f$ (konstans)függvényekkel az $f_1\le f\le f_2$ egyenlőtlenségekre tekintettel

$$\int_a^b f_1\,dg=\min\mathcal{R}_f\cdot(g(b)-g(a))\le\int f\,dg\le\int_a^b f_2\,dg=\max\mathcal{R}_f\cdot(g(b)-g(a)).$$

Az f függvény folytonossága miatt viszont létezik olyan $\xi\in[a,b]$, hogy

$$\int f\,dg=f(\xi)\cdot(g(b)-g(a)).$$

xvi) A fentiek szerint világos, hogy ha a

$$g_1,\,g_2:[a,b]\to[0,+\infty)$$

függvények monoton növők, és $h:=g_1-g_2$, akkor minden $f\in C[a,b]$ függvénnyel létezik az $\int_a^b f\,dg$ Riemann-Stieltjes-integrál. Az itt szereplő h függvényre és az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $\tau=\{x_0,...,x_n\}$ felosztására

$$\sum_{k=0}^{n-1}|h(x_{k+1})-h(x_k)|\le$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(g_1(x_{k+1})-g_1(x_k))+\sum_{k=0}^{n-1}(g_2(x_{k+1})-g_2(x_k))=g_1(b)-g_1(a)+g_2(b)-g_2(a).$$

Ezt szem előtt tartva általában azt mondjuk, hogy az $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény *korlátos változású,* ha alkalmas $C\geq 0$ konstanssal

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\leq C$$

teljesül az $[a,b]$ intervallum minden fent említett $\tau=\{x_0,...,x_n\}$ felosztására. Így az előbbi h függvény korlátos változású.

Minden korlátos változású $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény korlátos is. Legyen ui. $x\in[a,b]$, akkor az $\{a,x,b\}$ felosztásra is

$$C\geq|F(x)-F(a)|+|F(x)-F(b)|\geq|F(x)-F(a)|,$$

így

$$|F(x)|\leq|F(x)-F(a)|+|F(a)|\leq C+|F(a)|.$$

Ha az F függvény differenciálható, és

$$q:=\sup\{|F'(x)|:x\in[a,b]\}<+\infty,$$

akkor bármilyen $n\in\mathbf{N}$ és $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ esetén a Lagrange-tétel miatt alkalmas $\xi_k\in(x_k,x_{k+1})\quad(k=0,...,n-1)$ választással

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}|F'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)|\leq$$

$$C:=q\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=q\cdot(b-a).$$

Speciálisan ez a helyzet, ha az F folytonosan differenciálható.

Nyilván minden monoton $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény korlátos változású. Sőt, belátjuk, hogy igaz az alábbi Jordan-tétel: *az $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású, ha előállítható $F=F_1-F_2$ alakban, ahol az F_1, $F_2:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvények monoton növők.*

Valóban, az eddigiekre gondolva elegendő már csak a korlátos változású $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény jelzett alakú felbonthatóságát igazolnunk. Legyen ehhez $T_F(a):=0$, és az $a<x\leq b$ helyeken

$$T_F(x):=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\in\mathbf{R}:x_0=a<x_1<...<x_n=x\ \ (0<n\in\mathbf{N})\right\}.$$

A feltétel miatt

$$T_F : [a,b] \to [0,+\infty)$$

(az F *teljes változás függvénye*). Ha $a \le x < y \le b$, $n \in \mathbf{N}$ és

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,$$

akkor $\{x_0, x_1, ..., x_n, y\}$ egy felosztása az $[a,y]$ intervallumnak, ezért

$$\sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + |F(y) - F(x)| \le T_F(y)$$

(ahol $x = a$, azaz $n = 0$ esetén az előbbi $\sum_{k=0}^{n} ... := 0$). Az itt szereplő $x_0, ..., x_n$ pontok és $n \in \mathbf{N}$ szerint szuprémumot véve tehát

$$T_F(x) + |F(y) - F(x)| \le T_F(y).$$

Innen $T_F(x) \le T_F(y)$, más szóval a T_F monoton növekedése következik. Továbbá

$$T_F(y) \ge T_F(x) + F(y) - F(x),$$

azaz $T_F(y) - F(y) \ge T_F(x) - F(x)$ is igaz, ami meg azt jelenti, hogy a $T_F - F$ függvény is monoton növekedő. Ezért $F = T_F - (T_F - F)$ a kívánt felbontás.

Megjegyezzük, hogy – könnyen beláthatóan – tetszőleges $a \le u < v \le b$ esetén

$$\sup \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} |F(y_{j+1}) - F(y_j)| \in \mathbf{R} : y_0 = u < y_1 < \ldots < y_m = b \ \ (0 < m \in \mathbf{N}) \right\} =$$

$$T_F(v) - T_F(u).$$

xvii) Mutassuk meg, hogy a xvi)-beli T_F teljes változás függvényre

$$T_F(x+0) - T_F(x) = |F(x+0) - F(x)| \quad (a \le x < b),$$

$$T_F(z) - T_F(z-0) = |F(z) - F(z-0)| \quad (a < z \le b).$$

Ha ui. $a \le x < b$, akkor (a Jordan-tétel bizonyításában látottak szerint)

$$T_F(y) - T_F(x) \ge |F(y) - F(x)| \qquad (a < y \le b),$$

amiből

$$T_F(x+0) - T_F(x) \ge |F(x+0) - F(x)|$$

rögtön következik. A fordított irányú becsléshez legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám, amikor is van olyan $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztása az $[a, b]$-nek (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett), hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| > T_F(b) - \varepsilon = \sum_{k=0}^{n-1} (T_F(x_{k+1}) - T_F(x_k)) - \varepsilon,$$

ezért

$$\sum_{k=0}^{n-1} (T_F(x_{k+1}) - T_F(x_k) - |F(x_{k+1}) - F(x_k)|) < \varepsilon.$$

Itt az előbbiek miatt minden $k = 0, ..., n-1$ indexre

$$T_F(x_{k+1}) - T_F(x_k) - |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \geq 0,$$

így

$$T_F(x_{k+1}) - T_F(x_k) < |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + \varepsilon.$$

Ha $a \leq x < b$, akkor egyértelműen létezik olyan $j = 0, ..., n-1$, amivel $x_j \leq x < x_{j+1}$. Legyen $x < \xi < x_{j+1}$ és (valamilyen $m \in \mathbf{N}$ indexszel)

$$\tau^* := \tau \cup \{x, \xi\} = \{x_0^*, ..., x_m^*\}$$

(ahol tehát $x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b$). Mivel $\tau \subset \tau^*$, ezért

$$\sum_{i=0}^{m-1} |F(x_{i+1}^*) - F(x_i^*)| \geq \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| > T_F(b) - \varepsilon =$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} (T_F(x_{k+1}^*) - T_F(x_k^*)) - \varepsilon.$$

Következésképpen (a fentiekre tekintettel)

$$T_F(x_{i+1}^*) - T_F(x_i^*) < |F(x_{i+1}^*) - F(x_i^*)| + \varepsilon \qquad (i = 0, ..., m-1),$$

speciálisan (lévén a τ^*-ban az x, ξ szomszédos osztópontok)

$$T_F(\xi) - T_F(x) < |F(\xi) - F(x)| + \varepsilon.$$

Innen

$$T_F(x+0) - T_F(x) \leq |F(x+0) - F(x)| + \varepsilon,$$

és (az $\varepsilon \to 0$ határátmenettel) $T_F(x+0) - T_F(x) \leq |F(x+0) - F(x)|$ már adódik.

Analóg módon kapjuk a $T_F(z) - T_F(z-0) = |F(z) - F(z-0)|$ $(a < z \leq b)$ egyenlőséget.

Ha tehát valamilyen $t \in (a, b)$ helyen az F függvény folytonos, akkor a t-ben a T_F is folytonos. Speciálisan, minden $F \in C[a, b]$ függvényre $T_F \in C[a, b]$.

xviii) Tegyük fel, hogy a $h : [a, b] \to$ függvény korlátos változású, ekkor a xiv) megjegyzés és az előbbi Jordan-tétel (ld. xvi)) miatt minden folytonos $f \in C[a, b]$ függvényre létezik az $\int_a^b f\, dh$ Riemann-Stieltjes-integrál. Továbbá (ld. xv)) az $[a, b]$ intervallum minden $\tau = \{x_0, ..., x_n\}$ felosztására tetszőleges ξ_τ mellett (az előbbi Jordan-tétel bizonyításában használt jelöléssel)

$$|S_{\tau,\xi_\tau}(f, h)| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot (h(x_{i+1}) - h(x_i))\Big| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\cdot |h(x_{i+1}) - h(x_i)| \le$$

$$\|f\|\cdot \sum_{i=0}^{n-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)| \le V(h)\cdot \|f\|,$$

ahol

$$V(h) := T_h(b) =$$

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{k+1}) - h(x_k)| : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b \ \ (0 < n \in \mathbf{N})\right\}$$

a h függvény *teljes változása.* Következésképpen

$$\left|\int_a^b f\, dh\right| \le V(h)\cdot \|f\| \qquad (f \in C[a, b]).$$

xix) A korlátos változású függvényekkel kapcsolatban az alábbiakat jegyezzük még meg. Legyen adott ui. egy egyelőre tetszőleges, a kompakt $[a, b]$ intervallumon értelmezett $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény, és valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett tekintsük az $[a, b]$-nek egy $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztását. Ekkor az

$$\frac{u + v}{\sqrt{2}} \le \sqrt{u^2 + v^2} \le u + v \qquad (0 \le u, v \in \mathbf{R})$$

elemi egyenlőtlenségekre hivatkozva a követezőket mondhatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sum_{k=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i + |h(x_{i+1} - h(x_i)|) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \Big(b - a + \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{i+1} - h(x_i)|\Big) \le$$

$$\ell_h(\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (h(x_{i+1}) - h(x_i))^2} \le$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i + |h(x_{i+1} - h(x_i)|) = b - a + \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{i+1} - h(x_i)|.$$

Innen nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \Big(b - a + \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{i+1} - h(x_i)|\Big) \le$$

$$b - a + \sup_{\tau} \ell_h(\tau) \leq \sup_{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{i+1} - h(x_i)|.$$

Azt mondjuk, hogy a h függvény(görbe) *rektifikálható* (más szóval van ívhossza), ha

$$\ell_h := \sup_{\tau} \ell_h(\tau) < +\infty.$$

(Ekkor az ℓ_h szám a h *ívhossza.*) A most mondottakból tehát már világos, hogy a $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor rektifikálható, ha korlátos változású, és ekkor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (b - a + V(h)) \leq \ell_h \leq b - a + V(h).$$

2. fejezet

A mértékelmélet alapjai

Az absztrakt integrálfogalom felépítése során alapvetően a Riesz-féle szemléletet követjük: bizonyos értelemben „egyszerű" függvények természetes módon adódó „integráljából" kiindulva, a határátmenet és az integrálás minél „harmonikusabb" kapcsolatát biztosítandó jutunk el az egyszerű függvényektől a „bonyolultabb" integrálható függvényekhez. Az „egyszerű" függvények az (absztrakt) Riesz-féle lépcsősfüggvények lesznek: karakterisztikus függvények véges lineáris kombinációi. Ha tehát elvárjuk a majdani integráltól pl. a linearitást, akkor (valamilyen X alaphalmaz és $A \subset X$ esetén) a χ_A karakterisztikus függvény integráljából kell kiindulnunk. Ez (a geometriai szemléletnek is megfelelően) a Riesz-féle módszerben az $A \subset \mathbf{R}$ intervallum hossza volt. Ennek az absztrakt változatához tehát szükség van az A (absztrakt) halmaz mérésére, mértékére. Így nem meglepő, ha előzetesen ez utóbbi fogalmat kell kialakítanunk: tisztáznunk kell, hogy mit is értsünk egy halmaz *mérhetőségén,* ill. a *mértékén.* Az utóbbit egy $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ függvény segítségével definiáljuk, mérhetőnek nevezve majd egy $A \subset X$ halmazt akkor, ha $A \in \mathcal{D}_\varphi$, ill. a $\varphi(A)$ helyettesítési értéket nevezve majd az A mértékének. A φ függvényt illetően bizonyos elvárásokat (axiómákat) fogalmazunk meg, ezek egy része a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartománnyal (a mérhető halmazok halmazrendszerével) lesz kapcsolatos. Ezért nem meglepő, ha speciális halmazrendszerek vizsgálatával kezdjük a felépítést.

2.1. Halmazrendszerek

Ebben a pontban azokat a halmazstruktúrákat vesszük sorra, amelyek a későbbiekben fontos szerepet fognak játszani. Legyen ehhez (itt és a továbbiakban is) X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{P}(X)$ pedig jelentse az X hatványhalmazát (azaz az X részhalmazainak a halmazát).

Elsőként a majd mértékeknek nevezett halmazfüggvények értelmezési tartományaival, az ún. szigma-algebrákkal foglalkozunk.

2.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer (X-beli) *szigma-algebra* (σ-algebra), ha

i) $X \in \Omega$;

ii) bármely $A \in \Omega$ esetén $X \setminus A \in \Omega$;

iii) tetszőleges $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatra $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega$.

A definícióból (és elemi halmazelméleti azonosságokból) rögtön adódik az, hogy minden Ω szigma-algebra esetén:

a) $\emptyset \in \Omega$;

b) ha $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega$;

c) az Ω „zárt a véges unió- és metszet-képzésre" is, azaz, ha $\mathcal{A} \subset \Omega$ egy véges halmaz, akkor
$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \Omega, \quad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \Omega;$$

d) minden $A, B \in \Omega$ mellett $A \setminus B \in \Omega$ is igaz.

Valóban, a 2.1.1. Definíció ii) feltételében $A := X$-et írva az adódik, hogy $\emptyset = X \setminus X \in \Omega$. Mivel a jól ismert De Morgan-azonosságok miatt a b)-beli A_n halmazokra
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = X \setminus \Big(X \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus A_n)$$
teljesül, ezért a fent idézett ii) feltétel alapján $X \setminus A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát iii) szerint $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus A_n) \in \Omega$, azaz ismét a ii)-t felhasználva
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = X \setminus B \in \Omega.$$
Ha a c)-ben $\mathcal{A} := \{A_0, ..., A_n\}$ valamilyen $n \in \mathbf{N}$, $A_0, ..., A_n \in \Omega$ mellett, akkor az $A_k := A_n$ $(\mathbf{N} \ni k > n)$ jelöléssel
$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k,$$
így iii), ill. b) alapján c) is igaz. Végül, a d) állításhoz írjuk fel $A \setminus B$-t
$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$$
alakban, amiből az eddigiek szerint d) nyilvánvaló.

A későbbiek során alapvető fontosságú lesz a halmazrendszer által generált σ-algebra fogalma. Ennek a definíciójához legyen adott egy $Y \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer, és tekintsük a következő $\Omega(Y)$ halmazt:

$$\Omega(Y) := \bigcap_{\Omega \in \Sigma_Y} \Omega,$$

ahol

$$\Sigma_Y := \{\Omega \subset \mathcal{P}(X) : \Omega \text{ szigma-algebra, } Y \subset \Omega\}.$$

Mivel $\mathcal{P}(X) \in \Sigma$, ezért $\Sigma_Y \neq \emptyset$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\Omega(Y)$ halmazrendszer egy X-beli σ-algebra, amit az Y *halmazrendszer által generált σ-algebrának* nevezünk.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden olyan (X-beli) Ω szigma-algebrára, amelyre $Y \subset \Omega$, egyúttal $\Omega(Y) \subset \Omega$. Ezért szokták $\Omega(Y)$-t az Y halmazrendszert tartalmazó „legszűkebb" σ-algebrának is nevezni. Ha maga az Y rendszer σ-algebra, akkor nyilván $Y = \Omega(Y)$. Az egyik legegyszerűbb (és a későbbiekben gyakran idézett példa) a most bevezetett fogalomra a következő: legyen $A \in \mathcal{P}(X)$ és $Y := \{A\}$. Ekkor

$$\Omega(Y) = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}.$$

Az $A := \emptyset$ választással adódó $\{\emptyset, X\}$ halmazrendszert *triviális σ-algebrának* fogjuk nevezni.

A szigma-algebra 2.1.1. Definíciója ugyan nagyon egyszerűnek tűnik, ezzel együtt azonban (a konkrét példákban) esetenként egyszerre mégis „túl sokat" akaró előírás. Ezért – enyhítve a kívánalmakat – egyelőre kevesebb megszorításnak eleget tevő halmazrendszereket vezetünk be. Ezek közül különösen fontosak lesznek számunkra azok, amelyek a σ-algebrák tulajdonságaiból valamivel már rendelkeznek. Az ilyen rendszereket illetően elsőként a gyűrű fogalmával ismerkedünk meg.

2.1.2. Definíció. A $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerről akkor mondjuk, hogy (X-beli) *gyűrű*, ha bármely $A, B \in \mathcal{G}$ esetén $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{G}$.

Mivel $\mathcal{G} \neq \emptyset$, ezért tetszőleges $A \in \mathcal{G}$ segítségével rögtön adódik az, hogy $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{G}$. Minden gyűrű „zárt a véges unió-képzésre", azaz, ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ véges halmaz, akkor

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{G}.$$

Ez rögtön adódik az $\mathcal{A}$ számossága szerinti teljes indukció segítségével. Továbbá minden $A, B \in \mathcal{G}$ esetén

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

ezért $A \cap B \in \mathcal{G}$. A szigma-algebrákkal kapcsolatban fentebb mondottakhoz hasonlóan akármilyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ véges halmazt is véve

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{G}.$$

A σ-algebrákkal kapcsolatban mondottakhoz hasonlóan X-beli gyűrűk metszete is gyűrű. Ennek alapján definiálhatjuk a valamely halmazrendszer által generált gyűrű fogalmát, nevezetesen: bármilyen $Y \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerhez egyértelműen megadható olyan $\mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrű, hogy $Y \subset \mathcal{G}(Y)$, és minden olyan X-beli $\mathcal{G}$ gyűrűre, amelyre $Y \subset \mathcal{G}$, az is igaz, hogy $\mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{G}$. Ha ui.

$$\mathcal{G}_Y := \{\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{G} \text{ gyűrű}, \ Y \subset \mathcal{G}\},$$

akkor

$$\mathcal{G}(Y) = \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}_Y} \mathcal{G}.$$

A $\mathcal{G}(Y)$ gyűrűt az Y *által generált gyűrűnek* fogjuk hívni. Ezzel kapcsolatban is használatos az Y-t tartalmazó „legszűkebb" gyűrű elnevezés. (Gondolja meg az Olvasó, hogy a $\mathcal{G}(Y)$ elemei vagy Y-beliek, vagy pedig ilyen halmazokból kiindulva az egyesítés és különbségképzés műveletének véges sokszori alkalmazásával adódnak.)

A gyűrű fogalmának a bevezetésekor mondottak szellemében tovább „enyhítjük" a szóban forgó halmazrendszerekkel szembeni elvárásainkat. A későbbi alkalmazásokban látni fogjuk, hogy a gyakorlat számára fontos speciális esetekben még a gyűrű axiómáinál is kevesebbel rendelkező halmazrendszerekből elegendő kiindulnunk. Ezek az ún. félgyűrűk eléggé természetes módon adódnak, amelyekből aztán standard kiterjesztési eljárásokkal jutunk el a bonyolultabb halmazstruktúrákhoz.

Legyen tehát adott továbbra is egy X halmaz, és vezessük be a következő definíciót:

2.1.3. Definíció. Egy $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert (X-beli) *félgyűrűnek* nevezünk, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ halmazpárra $A \cap B \in \mathcal{H}$, és alkalmas, páronként diszjunkt $Q_0, ..., Q_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$A \setminus B = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k.$$

Nyilván minden gyűrű egyúttal félgyűrű is, de pl. a számegyenes összes intervalluma egy olyan ($\mathbf{R}$-beli) félgyűrűt alkot, amelyik nem gyűrű. Könnyű belátni, hogy minden félgyűrű tartalmazza az üres halmazt. Ha ui. az előbbi definícióban $A = B$-t választunk (márpedig a $\mathcal{H} \neq \emptyset$ feltétel miatt ezt megtehetjük), akkor az $\emptyset = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k$ előállításhoz jutunk, amiből $\emptyset \in \mathcal{H}$ már triviálisan következik.

Tetszőleges félgyűrű egyúttal véges sok elemének a közös részét is tartalmazza. A korábbi halmazstruktúrákkal ellentétben azonban félgyűrűk metszete már nem feltétlenül lesz félgyűrű. Legyen pl. $B \neq \emptyset$, $B \subset A, B \neq A$, ekkor

$$\mathcal{H}_1 := \{\emptyset, A, B, A \setminus B\}$$

nyilván félgyűrű. Ha C, D olyan nem üres, diszjunkt halmazok, amelyekre $A \setminus B = C \cup D$, és

$$\mathcal{H}_2 := \{\emptyset, A, B, C, D\},$$

akkor $\mathcal{H}_2$ is félgyűrű, de $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ nem az.

A félgyűrű fogalmát gyakran a következőképpen értelmezik. Valamilyen X halmaz esetén a $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert X-beli félgyűrűnek nevezik, ha az tartalmazza bármely két elemének a metszetét, valamint minden $A, B \in \mathcal{H}$, $B \subset A$ választás mellett megadhatók olyan $C_0, ..., C_n \in \mathcal{H}$ halmazok (alkalmas $n \in \mathbf{N}$ mellett), hogy

$$C_0 = B \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = A,$$

és $C_k \setminus C_{k-1} \in \mathcal{H} \quad (k = 1, ..., n)$. Világos, hogy ekkor a fenti $\mathcal{H}$ halmazrendszer a 2.3.1. Definíció szerint is félgyűrű, ui. tetszőleges $A, D \in \mathcal{H}$ halmazokra $B := A \cap D \in \mathcal{H}$, $B \subset A$, és

$$A \setminus D = A \setminus B = \bigcup_{k=0}^{n} (C_k \setminus C_{k-1})$$

egy, a 2.3.1. Definíció által megkívánt felbontása az $A \setminus D$-nek. Fordítva a dolog nem igaz, azaz a 2.3.1. Definíció szerinti halmazrendszerek osztálya általában bővebb, mint a most idézett meghatározás szerintieké. Legyen ui. $X := \mathbf{R}$ és

$$\mathcal{H} := \{\emptyset, [0,1), [0,1/3), [1/3,2/3), [2/3,1)\}.$$

Ekkor $\mathcal{H}$ félgyűrű az X-ben. (Ehhez csupán a $[0,1) \setminus Y$ különbségeknek a 2.3.1. Definíció szerinti felbontásait kell ellenőrizni rendre az $Y := [0,1/3), [1/3,2/3), [2/3,1)$ intervallumokkal. Ez viszont triviálisan teljesül.) Ugyanakkor pl. a $B := [0,1/3)$, $A := [0,1)$ választással csak a $C_0 := B$, $C_1 := A \in \mathcal{H}$ halmazok felelnek meg a fenti $C_0 = B \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = A$ feltételnek, de

$$C_1 \setminus C_0 = A \setminus B = [1/3, 1) \notin \mathcal{H}.$$

Ugyanakkor olyan fontos félgyűrűk, mint pl. az $\mathbf{R}$-beli balról zárt, jobbról nyílt intervallumok félgyűrűje, eleget tesznek a szóban forgó megjegyzésben idézett értelmezésnek is.

A következő tételben megadjuk a félgyűrűk által generált gyűrűk szerkezetét.

2.1.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ félgyűrű X-ben, $Y \subset X$. Ekkor $Y \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ azzal ekvivalens, hogy alkalmas $A_0, ..., A_n \in \mathcal{H} \quad (n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokkal*

$$Y = \bigcup_{k=0}^{n} A_k.$$

Bizonyítás. Jelöljük $\mathcal{G}$-vel az állításban szereplő $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ halmazok által által alkotott halmazrendszert. Mivel $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ gyűrű és $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$, ezért $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$. Belátjuk, hogy a $\mathcal{G}$ gyűrű. Ha ui. $U, V \in \mathcal{G}$ és

$$U = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \ , \ V = \bigcup_{i=0}^{m} B_i$$

a tételben szereplő előállítások – azaz $n, m \in \mathbf{N}$, és az $A_0, ..., A_n \in \mathcal{H}$ halmazok is, valamint a $B_0, ..., B_m \in \mathcal{H}$ halmazok is páronként diszjunktak, – akkor

$$U \cap V = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{i=0}^{m} A_k \bigcap B_i$$

egy véges sok, páronként diszjunkt $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló felbontása az $U \cap V$ halmaznak. Ezért $U \cap V \in \mathcal{G}$. Ezt felhasználva lássuk most be, hogy $U \setminus V \in \mathcal{G}$. Vegyük észre ehhez, hogy

$$U \setminus V = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcap_{i=0}^{m} (A_k \setminus B_i) =: \bigcup_{k=0}^{n} X_k.$$

A félgyűrű axiómái és a $\mathcal{G}$ halmaz definíciója miatt az előbbi felbontásban szereplő összes $A_k \setminus B_i$ halmaz eleme a $\mathcal{G}$-nek, ezért az előbbiekre tekintettel $X_k \in \mathcal{G} \quad (k = 0, ..., n)$. Innen a $\mathcal{G}$ értelmezése miatt már triviális, hogy $U \setminus V \in \mathcal{G}$.

Az eddigiekből már nem nehéz belátni, hogy $U, V \in \mathcal{G}$ esetén $U \cup V \in \mathcal{G}$. Valóban, $U \cup V = (U \setminus V) \cup V$ egy diszjunkt, $\mathcal{G}$-beli halmazokból álló felbontása az $U \cup V$-nek, így a fentiek alapján $U \cup V \in \mathcal{G}$.

Mivel $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ nyilván igaz, ezért – lévén a $\mathcal{G}$ gyűrű, és $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$-t lefedő „legszűkebb" gyűrű – $\mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$. Következésképpen a fenti $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$ tartalmazást is figyelembe véve $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \mathcal{G}$. ■

2.2. Megjegyzések

i) Amint azt fentebb, a halmazrendszer által „generált" σ-algebrát illetően már kihasználtuk, (a valamely halmaz részhalmazaiból álló) σ-algebrák metszete is σ-algebra. Érdemes megjegyezni ezzel kapcsolatban azt, hogy az analóg állítás már két σ-algebra egyesítésére vonatkozóan sem igaz. Legyen ugyanis pl. $X := \{0, 1, 2\}$, és

$$\Omega := \{\emptyset, X, \{0\}, \{1, 2\}\} \ , \quad \widetilde{\Omega} := \{\emptyset, X, \{0, 1\}, \{2\}\}.$$

Ekkor $\Omega, \widetilde{\Omega}$ triviális módon σ-algebrák X-ben, de

$$\Omega \cup \widetilde{\Omega} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$$

nem az, mert pl. $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \notin \Omega \cup \widetilde{\Omega}$.

ii) $\mathcal{P}(X)$ nyilván σ-algebra.

iii) Legyen X_0 az X legfeljebb megszámlálható részhalmazainak a halmaza, és

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in X_0 \text{ vagy } X \setminus A \in X_0\}.$$

Világos, hogy Ω egy σ-algebra.

iv) Ha Ω szigma-algebra az X-ben és $\emptyset \neq Y \subset X$, akkor

$$\Omega_Y := \{A \cap Y \in \mathcal{P}(Y) : A \in \Omega\}$$

egy Y-beli σ-algebra (az Ω ún. *nyoma (spurja)* Y-ban). Nyilvánvaló, hogy amennyiben $Y \in \Omega$, akkor

$$\Omega_Y = \{A \in \Omega : A \subset Y\} = \Omega \cap \mathcal{P}(Y).$$

v) Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq Y$ halmazzal adott egy $T : X \to Y$ leképezés. Ekkor tetszőleges Y-beli Ω szigma-algebra esetén a

$$\{T^{-1}[A] \in \mathcal{P}(X) : A \in \Omega\}$$

halmazrendszer szigma-algebra az X-ben. (Emlékeztetünk arra, hogy

$$T^{-1}[A] = \{x \in X : T(x) \in A\}$$

jelöli az A halmaznak a T leképezés által létesített ősképét.)

vi) Ha az előbbi megjegyzésben Ω egy X-beli σ-algebra, és „$T^{-1}[A]$" helyett $T[A]$-t írunk (azaz az A halmaznak a T által létesített képét, a

$$T[A] = \{T(x) \in Y : x \in A\}$$

halmazt), akkor az így kapott

$$\{T[A] \in \mathcal{P}(Y) : A \in \Omega\}$$

halmazrendszer nem minden T függvény mellett lesz σ-algebra az Y-ban. Az Olvasóra bízzuk annak a meggondolását, hogy ha a szóban forgó T bijektív leképezés, akkor az előbb említett halmazrendszer σ-algebra.

vii) Tegyük fel, hogy a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűre még $X \in \mathcal{G}$ is teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ *algebra*. Nyilván minden σ-algebra egyúttal algebra is. Pl. az

$$\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ vagy } X \setminus A \text{ véges}\}$$

halmazrendszer algebra. Elemi halmazműveleti meggondolásokkal látható be az alábbi ekvivalencia: a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra akkor és csak akkor σ-algebra, ha tetszőleges $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokra $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

viii) Az $\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ véges}\}$ halmazrendszer gyűrű. A „véges" kitétel helyett „legfeljebb megszámlálható"-t írva is gyűrűt kapunk.

ix) Minden $A \in X$ mellett $\{\emptyset, A\}$ nyilván gyűrű. Speciálisan, az $A := \emptyset$ választással kapott $\{\emptyset\}$ halmazrendszer is gyűrű.

x) Az $\mathbf{R}$ összes korlátos részhalmazainak a halmaza $\mathbf{R}$-beli gyűrű, de nyilván nem szigma-algebra.

xi) Minden gyűrű tartalmazza bármely két elemének a különbségét is és a metszetét is. Fordítva a dolog nem igaz, azaz, ha egy halmazrendszer rendelkezik a most mondott tulajdonsággal, akkor nem feltétlenül gyűrű. Ugyanez mondható el akkor is, ha a szóban forgó halmazrendszer a két halmaz egyesítésének és metszetének képzésére nézve zárt, azaz egy ún. *háló*. (Nem nehéz idevágó ellenpéldákat konstruálni.)

xii) Könnyű belátni, hogy egy X-beli $\mathcal{G}$ halmazrendszer akkor és csak akkor algebra, ha $X \in \mathcal{G}$, és minden $A, B \in \mathcal{G}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{G}$, $X \setminus A \in \mathcal{G}$. Ui. az állítás egyik fele triviális, a másikhoz pedig elég csak annyit megjegyezni, hogy bármelyik $A, B \in \mathcal{P}(X)$ halmazpárra

$$A \setminus B = X \setminus [(X \setminus A) \cup B].$$

xiii) Legyen $Y \subset \mathcal{P}(X)$ egy halmazrendszer, és tekintsük az $E := \bigcup_{A \in Y} A$ halmazt. Amennyiben $E \in Y$, úgy bármely $A \in Y$ esetén $E \cap A = A$. Általában, ha valamilyen $E \in Y$ halmazzal ez utóbbi egyenlőség minden $A \in Y$ mellett fennáll, akkor (algebrai analógiával élve) azt mondjuk, hogy az E az Y *egységeleme,* ill., hogy az Y egy *egységelemes* halmazrendszer. (Tehát az Y-ban parciális rendezésként a szokásos tartalmazás relációt vezetve be, a jelzett feltétel az Y maximumának a létezését követeli meg.) Ha $\mathcal{G}$ egy X-beli egységelemes gyűrű, akkor világos, hogy $\mathcal{G}$ egy $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$-beli algebra és fordítva: minden algebra egységelemes gyűrű.

xiv) Ha a gyűrű definíciójában az „$A \cup B \in \mathcal{G} \quad (A, B \in \mathcal{G})$" feltétel helyett azt követeljük meg, hogy tetszőleges $A_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatra $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$ teljesüljön, akkor $\mathcal{G}$-t *szigma-gyűrűnek* nevezzük. Nyilván minden σ-algebra egyúttal σ-gyűrű is, ill. egy $\mathcal{G}$ szigma-gyűrű pontosan akkor σ-algebra, ha van olyan $Y \in \mathcal{G}$ halmaz, amelynek a $\mathcal{G}$ összes eleme részhalmaza: $A \subset Y \quad (A \in \mathcal{G})$. Ez más szóval azt jelenti, hogy $\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{G}$, azaz $\mathcal{G}$-nek van egységeleme.

xv) Legyen adott az $X \neq \emptyset$ halmaz és egy $\emptyset \neq Y \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer. Az $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazt Y-ra nézve *σ-halmaznak* nevezzük, ha alkalmas $A_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ elemekkel $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ alakban állítható elő. Ha Λ_Y-nal jelöljük az összes ilyen A halmazból álló halmazrendszert, akkor Λ_Y-ra az alábbi tulajdonságok triviálisan igazak:

a) $Y \subset \Lambda_Y$;

b) $X_n \in \Lambda_Y \ \ (n \in \mathbf{N}) \Longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in \Lambda_Y$.

A Λ_Y halmazrendszer nem feltétlenül σ-gyűrű. Ha viszont Y gyűrű, akkor könnyen belátható módon Λ_Y szigma-gyűrű.

xvi) Egy σ-gyűrű is zárt a legfeljebb megszámlálható sok elemének a metszetére nézve, azaz, ha $\mathcal{G}$ szigma-gyűrű és $A_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. Valóban, legyen $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ekkor egyrészt $A \in \mathcal{G}$, másrészt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n), \ A \setminus A_n \in \mathcal{G} \ \ (n \in \mathbf{N}), \ \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n) \in \mathcal{G}$$

miatt $A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n) \in \mathcal{G}$. Innen az is következik, hogy a fenti (A_n) halmazsorozat limesz szuperiorja, ill. limesz inferiorja is $\mathcal{G}$-beli:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \ \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}.$$

Továbbá σ-gyűrűk metszete is σ-gyűrű, ami lehetővé teszi a valamely halmazrendszer által generált (az őt tartalmazó legszűkebb) σ-gyűrű bevezetését.

xvii) A σ-gyűrű fogalmához kapcsolódik a δ-gyűrű értelmezése, miszerint egy $\mathcal{G}$ gyűrűt *δ-gyűrűnek* nevezünk, ha $A_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$ esetén $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. A fentiek szerint minden σ-gyűrű egyúttal δ-gyűrű is, de ugyanez fordítva nem mondható el. Például az $\mathbf{R}$-beli korlátos halmazok δ-gyűrűt alkotnak, de nyilvánvaló módon nem alkotnak σ-gyűrűt. Megmutatható azonban, hogy bármilyen egységelemes δ-gyűrű σ-gyűrű (és az egységelem létezése miatt persze σ-algebra is). (A részletek meggondolását az Olvasóra bízzuk.)

xviii) Legyen (ld. xi) megjegyzés)pl. $\emptyset \neq Y \subset \mathcal{P}(X)$ háló (azaz $A \cup B$, $A \cap B \in Y$ bármelyik $A, B \in Y$ mellett), és tekintsük a

$$\mathcal{H} := \{A \setminus B \in \mathcal{P}(X) : A, B \in Y, \ B \subset A\}$$

halmazrendszert. Mivel $Y \neq \emptyset$, ezért tetszőleges $A \in Y$ halmazzal $A \subset A$, tehát egyúttal $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{H}$. Továbbá

$$A \setminus B, \ C \setminus D \in \mathcal{H} \qquad (A, B, C, D \in Y, \ B \subset A, \ D \subset C)$$

esetén

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus [(B \cup D) \cap (A \cap C)],$$

amiből

$$A \cap C, \ B \cup D, \ (B \cup D) \cap (A \cap C) \in Y,$$

és $(B \cup D) \cap (A \cap C) \subset A \cap C$ miatt

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) \in \mathcal{H}$$

következik. Az $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$ halmaz kiszámításához nyugodtan feltehetjük, hogy $C \setminus D \subset A \setminus B$, sőt azt is, hogy $C \subset A$. Ekkor viszont

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = [A \setminus (B \cup C)] \cup [(D \cup B) \setminus B],$$

ahol a jobb oldalon a [...]-ben álló halmazok $\mathcal{H}$-beliek és diszjunktak. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{H}$ félgyűrű.

xix) Egy halmazrendszer által generált gyűrű tényleges megadása esetenként (a szóban forgó halmazrendszertől függően) eléggé bonyolult is lehet. A félgyűrű által generált gyűrű „szerkezete" viszont az 2.1.4. Tétel szerint teljesen áttekinthető.

xx) Ha $\widetilde{\mathcal{G}}$ jelöli a $\mathcal{H}$ félgyűrűből az összes lehetséges módon kiválasztott véges sok halmaz egyesítéseinek a halmazát, akkor a 2.1.4. Tétel bizonyításában használt jelölésekkel $\mathcal{G} \subset \widetilde{\mathcal{G}}$, és $\widetilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$ miatt $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}}$. Tehát a 2.1.4. Tételben akár el is hagyhatjuk az ottani véges sok $\mathcal{H}$-beli halmaz páronkénti diszjunktivitását kimondó feltételt.

xxi) Legyen valamilyen X halmaz esetén adott a $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, és tekintsük az általa meghatározott $\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{H})$ gyűrűt. Ekkor

$$\Omega(\mathcal{G}) = \Omega(\mathcal{H}).$$

Valóban, mivel $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, ezért egyúttal $\mathcal{H} \subset \Omega(\mathcal{G})$. Következésképpen a „generált" σ-algebra értelmezése szerint $\Omega(\mathcal{H}) \subset \Omega(\mathcal{G})$. Ugyanakkor a 2.1.4. Tétel miatt minden $A \in \mathcal{G}$ halmazra $A \in \Omega(\mathcal{H})$, így $\mathcal{G} \subset \Omega(\mathcal{H})$. Ezért $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega(\mathcal{H})$ is igaz.

2.3. Mérték

Amint azt már a jelen fejezet bevezető részében megjegyeztük, az (absztrakt) halmazok mérését (a mértéküknek az értelmezését) egy $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ függvény segítségével végezzük, ahol az X adott („alap")halmaz. Azt is jeleztük, hogy a φ függvényt illetően bizonyos elvárásokat (axiómákat) fogalmazunk meg, amelyeknek egy része a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartománnyal (a mérhető halmazok halmazrendszerével) lesz kapcsolatos. Ezt tettük meg a 2.1., 2.2. pontokban, bevezetve a σ-algebra, a gyűrű és a félgyűrű fogalmát.

2.3.1. Halmazfüggvények

Folytassuk most a további függvénytulajdonságokkal.

2.3.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a fenti φ függvény

i) *additív,* ha a
$$\varphi\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k)$$
egyenlőség teljesül minden olyan $A_k \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ választással, amelyre az $A_0, ..., A_n$ halmazok páronként diszjunktak, és $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{D}_\varphi$;

ii) *szigma-additív* (σ-additív), ha
$$\varphi\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(A_k)$$
minden olyan esetben, amikor az $A_k \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}_\varphi$.

Megjegyezzük, hogy ha a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$ függvényre $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\emptyset) < +\infty$ fennáll, valamint a φ additív, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$. Valóban, az $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ egyenlőség (és a φ additivitása) miatt
$$\varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset),$$
amiből $\varphi(\emptyset) < +\infty$ alapján az állításunk (egyszerűsítés után) már nyilvánvaló. A
$$\varphi(A) = \varphi(A) + \varphi(\emptyset)$$
egyenlőségre utalva mindez elmondható akkor is, ha (az additivitás és $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$ mellett) a $\varphi(\emptyset) < +\infty$ feltétel helyett valamilyen $A \in \mathcal{D}_\varphi$ halmazzal $\varphi(A) < +\infty$ teljesül. Világos, hogy mindez igaz akkor is, az előbbiekben a φ additivitása helyett annak a σ-additivitását tesszük fel. Speciálisan ez a helyzet, ha a φ függvény *véges,* azaz az $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészletére $\mathcal{R}_\varphi \subset \mathbf{R}$ teljesül, $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$, és a φ additív (σ-additív).

Könnyű meggondolni, hogy ha a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ függvény σ-additív, $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$, és $\varphi(\emptyset) = 0$, akkor a φ additív is. Ui. tetszőlegesen választott, páronként diszjunkt $A_0, ...A_n \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokra, amelyekre $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{D}_\varphi$, egyúttal
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k,$$
ahol $A_k := \emptyset \ (n < k \in \mathbf{N})$. Ezért (a σ-additivitás alapján)
$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k).$$

Az egyik legfontosabb példaként legyen $\mathcal{D}_\varphi$ az $\mathbf{R}$-beli intervallumok által meghatározott halmazrendszer, és

$$\varphi(I) := |I| \qquad (I \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ekkor elég egyszerűen adódik az, hogy a φ additív. Később megmutatjuk (ez már nem annyira könnyű), hogy ez a φ nem csupán additív, hanem σ-additiív is.

Minden készen áll ahhoz, hogy a halmazrendszerekre, ill. a halmazfüggvényekre megfogalmazott speciális tulajdonságok együttesével definiálhassuk a mérték (ill. az „enyhébb" változatainak) a fogalmát.

2.3.1.2. Definíció. Legyen X halmaz, $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$. Azt mondjuk, hogy a μ halmazfüggvény

i) *előmérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány gyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ additív;

ii) *kvázimérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány gyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;

iii) *mérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív.

A fentebb mondottak alapján világos, hogy minden kvázimérték egyúttal előmérték is, ill. minden mérték kvázimérték is. Az alábbi példa azt mutatja, hogy nem minden előmértékről mondható el, hogy az egyúttal kvázimérték lenne. Legyen ui. valamilyen X megszámlálható halmaz esetén

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ vagy } X \setminus A \text{ véges}\}.$$

Ekkor a $\mathcal{G}$ gyűrű, sőt (ld. 2.2. vii) megjegyzés) $\mathcal{G}$ algebra X-ben, a

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ véges}) \\ +\infty & (X \setminus A \text{ véges}) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{G})$$

leképezés pedig egy olyan előmérték, amelyik nem kvázimérték. Ha ui. az X halmaz elemeit x_k-val $(k \in \mathbf{N})$ jelöljük, akkor $X = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{x_k\}$ egy páronként diszjunkt, $\mathcal{G}$-beli halmazokból álló felbontása az $X \in \mathcal{G}$ halmaznak, de

$$\mu(X) = +\infty \neq 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

A következő állításban (már) előmértékekre bebizonyítunk néhány, a későbbiekben fontos szerepet játszó tulajdonságot.

2.3.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* μ *leképezés előmérték a* $\mathcal{G}$ *gyűrűn. Ekkor minden* $A, B, A_i \in \mathcal{G} \quad (i \in \mathbf{N})$ *mellett*

1° $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;

2° *a* μ *monoton, azaz* $A \subset B$ *esetén* $\mu(A) \leq \mu(B)$;

3° *ha* $A \subset B$ *és* $\mu(A) < +\infty$, *akkor* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

4° $\mu(\bigcup_{i=0}^n A_i) \leq \sum_{i=0}^n \mu(A_i) \quad (n \in \mathbf{N})$;

5° *ha az* $A_i \quad (i \in \mathbf{N})$ *halmazok páronként diszjunktak és* $\bigcup_{i=0}^\infty A_i \in \mathcal{G}$, *akkor*

$$\sum_{i=0}^\infty \mu(A_i) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=0}^\infty A_i\Big).$$

Bizonyítás. Legyen $A \subset B$. Mivel $B = A \cup (B \setminus A)$ egy diszjunkt felbontása a B-nek és $\mu \geq 0$, ezért

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Innen $\mu(A) < +\infty$ esetén az is következik, hogy $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$. Ezzel a második és a harmadik állítást beláttuk.

Az első igazolásához legyen először $\mu(A \cap B) = +\infty$. Ekkor a 2°-ből rögtön adódik az, hogy $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$, azaz ekkor az 1° állítás triviális. Ha viszont $\mu(A \cap B) < +\infty$, akkor

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus (A \cap B)) \cup B) =$$

$$\mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B),$$

amiből az 1° egyenlőség átrendezéssel következik.

A 4° állítást a teljes indukcióra való hivatkozással elegendő $n = 1$-re belátni, amikor is 1° alapján a dolog nyilvánvaló.

Végül az 5° igazolásához legyen $A := \bigcup_{i=0}^\infty A_i$ és $n \in \mathbf{N}$. Ekkor

$$\sum_{i=0}^n \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=0}^n A_i\Big) \leq \mu(A).$$

(Az utolsó becslésben $\bigcup_{i=0}^n A_i \subset A$-ra hivatkozva a már bebizonyított 2° egyenlőtlenséget használtuk fel.) ■

A továbbiakban (az eddigi jelöléseket megtartva) egy előmértéket illetően adunk szükséges, ill. elégséges feltételeket arra nézve, hogy ez az előmérték kvázimérték legyen.

2.3.1.4. Tétel. *Legyen a μ előmérték a $\mathcal{G}$ gyűrűn, és tekintsük a következő tulajdonságokat:*

a) *μ kvázimérték;*

b) *bármilyen $A_n \in \mathcal{G}, A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatra az $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$ feltételből $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ következik;*

c) *tetszőleges $B_n \in \mathcal{G}, B_{n+1} \subset B_n$, $\mu(B_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat mellett a $B := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$ tartalmazás esetén $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$;*

d) *minden $C_n \in \mathcal{G}, C_{n+1} \subset C_n$, $\mu(C_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatra igaz, hogy a $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$ egyenlőségből $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$ következik.*

Ekkor

1° *a) $\iff$ b) $\Longrightarrow$ c) $\iff$ d);*

2° *ha a μ véges, akkor a) $\iff$ b) $\iff$ c) $\iff$ d).*

Bizonyítás. Az 1° állításban az *a)* $\Longrightarrow$ *b)* következtetéshez legyen

$$A_{-1} := \emptyset,\ D_n := A_n \setminus A_{n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így definiált D_n halmazok $\mathcal{G}$-ben vannak, páronként diszjunktak, továbbá $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} D_k$ $(n \in \mathbf{N})$, és $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$. Ezért (most a μ feltételezett kvázimérték volta miatt)

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(D_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu(D_k) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \mu(D_k) \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

A *b)* $\Longrightarrow$ *a)* bizonyításához csak a μ szigma-additivitását kell igazolni. Legyen ehhez az $Y_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ egy páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, és tegyük fel, hogy

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n \in \mathcal{G}.$$

Mivel az $A_n := \bigcup_{k=0}^{n} Y_k$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton nőve tart az A halmazhoz (azaz $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$), ezért a b)-beli feltételt alkalmazva

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu(Y_k) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(Y_k).$$

A *b)* $\Longrightarrow$ *c)* irányban a következőt mondhatjuk: az $A_n := B_0 \setminus B_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton nőve tart a $B_0 \setminus B \in \mathcal{G}$ halmazhoz, ezért a b) és a 2.3.3. Tétel szerint

$$\mu(B_0 \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_0 \setminus B_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mu(B_0) - \mu(B_n) \Big) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Mivel $B \subset B_0$ és $\mu(B_0) < +\infty$ miatt (ld. 2.3.3. Tétel) $\mu(B) < +\infty$, így (az előző egyenlőséget is figyelembe véve)

$$\mu(B_0 \setminus B) = \mu(B_0) - \mu(B) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Tehát ($\mu(B_0)$-val egyszerűsítve) valóban igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$.

A $c) \Longrightarrow d)$ állítás triviális, a fordított irányú $d) \Longrightarrow c)$ következtetéshez pedig vegyük észre, hogy a $C_n := B_n \setminus B \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton fogyva tart az üres halmazhoz (azaz $C_{n+1} \subset C_n \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$). Innen viszont a d) feltételezés miatt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) - \mu(B),$$

azaz $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$.

A 2° igazolásához nyilván elegendő belátni azt, hogy $d) \Longrightarrow b)$. Ez az előzőekhez hasonló gondolatmenettel adódik abból, hogy a $\mathcal{G}$-beli $C_n := A \setminus A_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat monoton fogyólag tart az $\emptyset$-hoz, tehát a d) és a 2.3.1.3. Tétel szerint

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mu(A) - \mu(A_n)\Big) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

■

Most megmutatjuk, hogy egy gyűrűn értelmezett előmértéket hogyan lehet kiterjeszteni kvázimértékké. Sőt, ennél egy kissé általánosabb kiterjesztési eljárást tárgyalunk: félgyűrűn adott, alkalmas tulajdonságoknak eleget tevő halmazfüggvényt fogunk kiterjeszteni a félgyűrű által generált gyűrűn kvázimértékké.

Legyen ehhez (mint eddig) X valamilyen halmaz, $\mathcal{H}$ pedig X-beli félgyűrű. Tegyük fel továbbá, hogy adott egy $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ additív leképezés. Emlékeztetünk egy korábbi észrevételünkre, miszerint $\emptyset \in \mathcal{H}$. Feltesszük még, hogy $m(\emptyset) = 0$. Az m halmazfüggvény monoton is, azaz $A, B \in \mathcal{H}$, $B \subset A$ esetén igaz az $m(B) \le m(A)$ egyenlőtlenség. Ugyanis

$$A = (A \setminus B) \cup B = \left(\bigcup_{k=0}^{n} Q_n\right) \bigcup B,$$

ahol $\bigcup_{k=0}^{n} Q_n$ a 2.1.3. Definíció szerinti felbontása az $A \setminus B$-nek. Az m additivitásából tehát

$$m(A) = m(B) + \sum_{k=0}^{n} m(Q_k) \ge m(B)$$

valóban következik.

Az alábbi, önmagában is érdekes lemmát bocsátjuk előre.

2.3.1.5. Lemma. *Ha* $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H}$ *és* $Q_0, ..., Q_p \in \mathcal{H}$ $(n, p \in \mathbf{N})$, *a* $H_0, ..., H_n$ *halmazok is és a* $Q_0, ..., Q_p$ *halmazok is páronként diszjunktak, valamint*

$$\bigcup_{k=0}^{n} H_k = \bigcup_{j=0}^{p} Q_j,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{j=0}^{p} m(Q_j).$$

Bizonyítás. Elég annyit megjegyezni, hogy tetszőleges H_k $(k = 0, ..., n)$, valamint Q_i $(i = 0, ..., p)$ esetén

$$H_k = H_k \bigcap \Big(\bigcup_{j=0}^{p} Q_j \Big) = \bigcup_{j=0}^{p} \Big(H_k \cap Q_j \Big),$$

$$Q_i = Q_i \bigcap \Big(\bigcup_{s=0}^{n} H_s \Big) = \bigcup_{s=0}^{p} \Big(H_s \cap Q_i \Big)$$

páronként diszjunkt, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló felbontások, ezért

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} m(H_k \cap Q_j) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} m(H_k \cap Q_j) = \sum_{j=0}^{p} m(Q_j).$$

■

Az előbbi lemma szerint értelmezhetünk egy

$$\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$$

leképezést az alábbi utasítással: legyen $Y \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, ekkor a 2.1.4. Tétel szerint alkalmas $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokkal $Y = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$. Definiáljuk ezek után a $\mu(Y)$-t a következőképpen:

$$(*) \qquad \mu(Y) := \sum_{k=0}^{n} m(H_k).$$

2.3.1.6. Tétel. *A fentiekben definiált* μ *olyan előmérték, aminek a* $\mathcal{H}$*-ra vett leszűkítése egyenlő* m*-mel. Ha a* $\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$ *előmértéknek a* $\mathcal{H}$*-ra való leszűkítése megegyezik az* m*-mel, akkor* $\lambda = \mu$*. Amennyiben az* m *szigma-additív, akkor a* μ *leképezés kvázimérték.*

Bizonyítás. A μ definíciója és a 2.3.1.5. Lemma alapján a tételünk első két állítása nyilvánvaló.

Tegyük most fel, hogy az m halmazfüggvény σ-additív. Azt kell megmutatni, hogy a μ is σ-additív. Ha viszont az $A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és

$$Y := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}),$$

akkor a 2.1.4. Tétel miatt alkalmasan választott, páronként diszjunkt $H_0, ..., H_p \in \mathcal{H}$ halmazokkal (ahol $p \in \mathbf{N}$)

$$Y = \bigcup_{k=0}^{p} H_k.$$

Ugyanez igaz minden $n \in \mathbf{N}$ mellett az Y helyett az A_n halmazra:

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj},$$

ahol $p_n \in \mathbf{N}$, és a $H_{n0}, ..., H_{np_n} \in \mathcal{H}$ halmazok páronként diszjunktak. Mindezt egybevetve adódik az

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj}$$

előállítás. Nyilván minden H_k $(k = 0, ..., p)$ halmazra a

$$H_k = H_k \cap Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj} \cap H_k$$

egy páronként diszjunkt, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló felbontása a H_k-nak. Az m függvény σ-additivitása alapján tehát

$$m(H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k),$$

így

$$\mu(Y) = \sum_{k=0}^{p} m(H_k) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} \sum_{k=0}^{p} m(H_{nj} \cap H_k) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj}) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

2.3.2. A Lebesgue-féle kvázimérték

Alkalmazzuk most az előbbiekben mondott általános (halmazfüggvényekre vonatkozó) eredményeket a gyakorlat szempontjából legfontosabb Lebesgue-struktúrára. Legyen ehhez $1 \leq p \in \mathbf{N}$ rögzített természetes szám, és állapodjunk meg a következő jelölésekben: $x = (x_1, ..., x_p)$, $y = (y_1, ..., y_p) \in \mathbf{R}^p$ esetén $x \leq y$ jelentse azt, hogy

$$x_i \leq y_i \qquad (i = 1, ..., p).$$

Hasonlóan, ha

$$x_i < y_i \qquad (i = 1, ..., p),$$

akkor röviden azt írjuk, hogy $x < y$.

Legyen $x, y \in \mathbf{R}^p$ és $x < y$. Ekkor

$$[x, y) := \{z \in \mathbf{R}^p : x \leq z < y\}$$

az x, y végpontú, balról zárt és jobbról nyílt (p-dimenziós) *intervallum.* Könnyű meggondolni, hogy az

$$\mathbf{I}^p := \{\emptyset,\ [a, b) \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) : a, b \in \mathbf{R}^p,\ a < b\}$$

halmaz félgyűrű. Ezért az általa generált $\mathcal{I}^p$ gyűrű (ld. 2.1.4. Tétel) a következő:

$$\mathcal{I}^p := \mathcal{G}(\mathbf{I}^p) = \{\textstyle\bigcup_{I \in \mathcal{T}} I : \mathcal{T} \subset \mathbf{I}^p,\ \mathcal{T} \text{ véges}\}$$

(ahol – ha szükséges – az is feltehető, hogy a fenti $\mathcal{T}$-ben lévő intervallumok páronként diszjunktak). Az $\mathcal{I}^p$ gyűrű elemeire szokásos az *elemi halmazok* elnevezés.

Definiáljuk az $m_p : \mathbf{I}^p \to [0, +\infty)$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$m_p(\emptyset) := 0 \ \ , \ \ m_p([x, y)) := \prod_{i=1}^{p} (y_i - x_i) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^p,\ x < y).$$

Könnyű belátni azt a ($p \leq 3$ esetén igen szemléletes) tényt, hogy az m_p leképezés additív. Jelöljük μ_p-vel az m_p által generált halmazfüggvényt (ld. 2.3.1.6. Tétel), ekkor a μ_p olyan előmérték az $\mathcal{I}^p$ gyűrűn, ami az egyetlen ilyen kiterjesztése az m_p-nek. Megmutatjuk, hogy a μ_p szigma-additív is, azaz igaz a

2.3.2.1. Tétel. *Az előbb definiált $\mu_p : \mathcal{I}^p \to [0, +\infty)$ függvény kvázimérték.*

Bizonyítás. Mivel a μ_p véges, ezért a 2.3.1.4. Tételt figyelembe véve elegendő azt belátni, hogy minden olyan $A_n \in \mathcal{I}^p$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat esetén, amelyre $A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbf{N})$ és $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ teljesül, egyúttal az is igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu_p(A_n) = 0$. Tegyük fel

ennek az érdekében indirekt módon azt, hogy valamilyen, az előbbi kikötéseknek eleget tevő (A_n) halmazsorozatra

$$\delta := \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf\{\mu(A_n) : n \in \mathbf{N}\} > 0.$$

(Emlékeztetünk a 2.3.1.3. Tételre, miszerint a $(\mu_p(A_n)$ sorozat monoton fogyó.) Az $\mathcal{I}^p$ „szerkezetét" leíró 2.1.4. Tételből minden $n \in \mathbf{N}$ mellett könnyen adódik olyan $B_n \in \mathcal{I}^p$ halmaz, amelyre $\overline{B}_n \subset A_n$, és

$$\mu_p(A_n) - \mu_p(B_n) \le \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

(Itt $\overline{B}_n$ a B_n halmaz lezárását jelöli az $\mathbf{R}^p$ tér „szokásos" topológiája szerint. A most mondottak különösen egyszerűek akkor, ha $p = 1$ és $A_n = [a, b)$ valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ számokkal. Ekkor ui. legyen $B_n := [a, c)$ – amikor is $\overline{B}_n = [a, c]$, – ahol $a < c < b$ és $b - c \le \delta\cdot 2^{-n-1}$.) Ha

$$C_n := \bigcap_{i=0}^{n} B_i \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor ezek a halmazok is nyilván egy monoton fogyó sorozatot alkotnak az $\mathcal{I}^p$-ben, továbbá

$$\overline{C}_{n+1} \subset \overline{C}_n \subset \overline{B}_n \subset A_n \subset A_0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

is igaz. Következésképpen a $\overline{C}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok mindegyike kompakt, és

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Elég tehát azt belátni, hogy egyetlen $\overline{C}_n$ halmaz sem üres. Innen már (az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetére vonatkozó jól ismert „Cantor-szerű" tétel miatt) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \neq \emptyset$ adódik, ami az A_n-ekre tett előbbi feltétel miatt nem lehet.) Ennél nyilván „erősebb" állítás a következő:

$$(*) \qquad C_n \neq \emptyset \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ehhez először is bebizonyítjuk, hogy

$$(**) \qquad \mu_p(C_n) \ge \mu_p(A_n) - \delta\cdot(1 - 2^{-n-1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, a teljes indukció módszerét követve egyrészt

$$\mu_p(C_0) = \mu_p(B_0) \ge \mu_p(A_0) - \delta/2,$$

azaz a $(**)$ becslés igaz $n = 0$ esetén. Ha viszont valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett a $(**)$ fennáll, akkor a 2.3.1.3. Tételt alkalmazva

$$\mu_p(C_{n+1}) = \mu_p(C_n \cap B_{n+1}) = \mu_p(C_n) + \mu_p(B_{n+1}) - \mu_p(C_n \cup B_{n+1}) \ge$$

$$\mu_p(A_n) - \delta\cdot(1-2^{-n-1}) + \mu_p(A_{n+1}) - \delta\cdot 2^{-n-2} - \mu_p(A_n) =$$
$$\mu_p(A_{n+1}) - \delta\cdot(1-2^{-n-2}),$$

így a $(**)$ egyenlőtlenség igaz $(n+1)$-re is. Ezzel a $(**)$-ot beláttuk, amiből már egyúttal

$$\mu_p(C_n) \geq \delta - \delta\cdot(1-2^{-n-1}) = \delta\cdot 2^{-n-1} > 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és ezért a $(*)$ állítás is következik. ■

A fenti tételben szereplő μ_p-t *Lebesgue-féle kvázimértéknek* nevezzük.

2.3.3. A Stieltjes-féle kvázimérték

Legyen most $\mathbf{I} := \mathbf{I}^1$, $\mathcal{I} := \mathcal{I}^1$ (ld. 2.3.2.), és tegyük fel, hogy adott egy $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növő függvény. A φ segítségével értelmezzük az $m_\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ leképezést az alábbiak szerint:

$$m_\varphi(\emptyset) := 0 \ , \ \ m_\varphi([a,b)) := \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (a, b \in \mathbf{R},\ a < b).$$

Az így definiált m_φ halmazfüggvény nyilván nemnegatív és additív, ezért a 2.3.1.6. Tétel szerint egyértelműen kiterjeszthető egy $\mathcal{I}$-n értelmezett μ_φ előmértékké.

Pl. a $\varphi(x) := x \quad (x \in \mathbf{R})$ speciális esetben a μ_φ nem más, mint a μ_1 Lebesgue-féle kvázimérték (ld. 2.3.2.). Igaz-e vajon tetszőleges φ mellett, hogy a μ_φ kvázimérték (vagy ami ezzel ekvivalens, hogy a μ_φ szigma-additív)? A következő példa azt mutatja, hogy a fenti kérdésre nem mindig lehet igennel válaszolni. Legyen ui.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Ekkor minden $[a,b] \subset (-\infty, 0)$ intervallumra nyilván igaz, hogy $\mu_\varphi([a,b)) = 0$, de pl. $\mu_\varphi([-1,0)) = 1$. Mivel az

$$I_n := [-2^{-n}, -2^{-n-1}) \in \mathbf{I} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

intervallumok páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = [-1,0)$, ezért a μ_φ szigma-additivitása esetén fenn kellene állnia a

$$\mu_\varphi([-1,0)) = \mu_\varphi\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\varphi(I_n)$$

egyenlőségnek. Ez viszont az előbbiek szerint nem igaz, lévén a bal oldala 1, a jobb oldala pedig $\mu_\varphi(I_n) = 0 \ (n \in \mathbf{N})$ miatt 0.

A következő tételben azt vizsgáljuk meg, hogy a φ-ről mit kell feltenni ahhoz, hogy a μ_φ kvázimérték legyen.

2.3.3.1. Tétel. *A μ_φ akkor és csak akkor kvázimérték, ha a φ függvény minden pontban balról folytonos, azaz* $\lim_{x-0}\varphi = \varphi(x) \quad (x \in \mathbf{R})$.

Bizonyítás. A bal oldali folytonosság szükségességét a tétel megfogalmazása előtti példa általánosításával könnyen igazolhatjuk. Valóban, tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $x \in \mathbf{R}$ pontban $\lim_{x-0}\varphi \neq \varphi(x)$, és legyen az $x_n \in (-\infty, x) \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, amire $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Az indirekt feltevés (és a határértékre vonatkozó átviteli elv miatt) miatt $\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \lim_{x-0}\varphi \neq \varphi(x)$. Ugyanakkor

$$[x_0, x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1})$$

egy páronként diszjunkt intervallumokból álló felbontása az $[x_0, x)$-nek, ezért (a μ_φ feltételezett kvázimérték voltára tekintettel)

$$\mu_\varphi([x_0, x)) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\varphi([x_n, x_{n+1})) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\Big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) - \varphi(x_0),$$

ami nyilván ellentmond az előbbieknek.

Az elégségesség igazolásához azt kell csak belátni (ld. 2.3.1.6. Tétel), hogy a szóban forgó, a μ_φ-t „generáló" m_φ függvény σ-additív. Legyen ehhez $I_n \in \mathbf{I} \quad (n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt intervallumoknak egy olyan sorozata, amelyikre

$$I := \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \in \mathbf{I}.$$

Ekkor a 2.3.1.3. Tétel 5° állítása szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_\varphi(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\varphi(I_n) \leq \mu_\varphi(I) = m_\varphi(I).$$

Megmutatjuk, hogy az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz, ha

$$I = [a, b),\ I_n = [a_n, b_n) \qquad (n \in \mathbf{N}, a, b, a_n, b_n \in \mathbf{R}, a < b, a_n < b_n),$$

akkor

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big).$$

Ehhez elegendő már csak azt igazolni, hogy $m_\varphi(I) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_\varphi(I_n)$, azaz

$$\varphi(b) - \varphi(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big).$$

Válasszunk ehhez egy tetszőleges $c \in (a,b)$ számot. A φ függvény monotonitása és a bal oldali folytonossága miatt bármilyen $\varepsilon > 0, n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $\tilde{a}_n < a_n$, hogy

$$\varphi(a_n) - \varphi(\tilde{a}_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\varphi(b_n) - \varphi(\tilde{a}_n) = \varphi(b_n) - \varphi(a_n) + \varphi(a_n) - \varphi(\tilde{a}_n) < \varphi(b_n) - \varphi(a_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n-1}.$$

Az $(\tilde{a}_n, b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ nyílt intervallumokból álló rendszer nyilván lefedi a kompakt $[a,c]$ intervallumot, ezért egy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ véges halmazzal

$$[a,c] \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} (\tilde{a}_n, b_n).$$

Egyúttal nyilván az is igaz, hogy

$$[a,c) \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} [\tilde{a}_n, b_n).$$

Ezért megint csak a 2.3.1.3. Tétel alapján

$$\varphi(c) - \varphi(a) = \mu_\varphi([a,c)) \leq \mu_\varphi\Big(\bigcup_{n \in \mathcal{N}} [\tilde{a}_n, b_n)\Big) \leq$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \mu_\varphi([\tilde{a}_n, b_n)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} m_\varphi([\tilde{a}_n, b_n)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(\tilde{a}_n)\Big).$$

Ebből a becslésből az előbbiek szerint

$$\varphi(c) - \varphi(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(\tilde{a}_n)\Big) \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big) + \varepsilon$$

következik, ahonnan – figyelembe véve, hogy az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt –

$$\varphi(c) - \varphi(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big)$$

adódik. Ha az előbbi becslésben elvégezzük a $c \to b$ határátmenetet, akkor (a φ bal oldali folytonossága alapján) $\lim_{b-0} \varphi = \varphi(b)$ miatt a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. ■

Az előbbi tételben szereplő μ_φ-t a φ függvény által meghatározott *Stieltjes-féle kvázimértéknek* nevezzük.

2.4. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer gyűrű (szigma-algebra), és egy adott $a \in X$ pont segítségével tekintsük a következő $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ függvényt:

$$\mu_a(A) := \begin{cases} 1 & (a \in A) \\ 0 & (a \notin A) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Nem nehéz ellenőrizni azt, hogy a μ (az a pontban „koncentrált") kvázimérték (mérték). Ui. a σ-additivitástól eltekintve a kvázimérték (mérték) minden axiómája (ld. 2.3.1.2. Definíció) nyilván teljesül a μ-re. Ha az $A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, akkor két eset lehetséges: $a \notin A$, amikor is $a \notin A_n$ és $\mu(A_n) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, így $\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. Ha viszont $a \in A$, akkor pontosan egy $N \in \mathbf{N}$ esetén $a \in A_N$, ezért $\mu(A) = \mu(A_N) = 1$ és $\mu(A_n) = 0$ $(N \neq n \in \mathbf{N})$. Tehát újfent csak $\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

ii) Legyen most az X halmaz legalább kontinuum számosságú, és jelöljük Ω-val az X azon A részhalmazai által alkotott halmazrendszert, amelyekre vagy az A, vagy pedig az $X \setminus A$ halmaz legfeljebb megszámlálható. Ekkor (ld. 2.2. iii) megjegyzés) az Ω egy X-beli σ-algebra, a

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ legfeljebb megszámlálható}) \\ +\infty & (X \setminus A \text{ legfeljebb megszámlálható}) \end{cases} \qquad (A \in \Omega)$$

módon definiált $\mu : \Omega \to \mathbf{R}$ függvény pedig mérték. Valóban, a mérték axiómái (ld. 2.3.1.2. Definíció) közül nyilván csak a μ szigma-additivitása „kérdéses". Ezt igazolandó legyenek az $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Amennyiben itt minden $A_n \quad (n \in \mathbf{N})$ legfeljebb megszámlálható, akkor az A halmaz is legfeljebb megszámlálható, így $\mu(A_n) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ha viszont valamilyen $N \in \mathbf{N}$ esetén az $X \setminus A_N$ halmaz legfeljebb megszámlálható, akkor $X \setminus A \subset X \setminus A_N$ miatt ugyanez igaz az A halmazra is, tehát az $X \setminus A$ is legfeljebb megszámlálható. Ezért $\mu(A) = +\infty$. Ugyanakkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A_N) = +\infty$$

becslést figyelembe véve $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$, és így megint csak

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

iii) Ha $\Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N})$, és az $\alpha_k \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$ számokkal

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} \alpha_k \qquad (A \in \Omega),$$

akkor világos, hogy a μ mérték. Az $\alpha_k := 1 \quad (k \in \mathbf{N})$ esetben a $\mu(A)$ nem más, mint az $A \subset \mathbf{N}$ halmaz számossága. Az i) megjegyzésben szereplő μ_a mértékekkel most nyilván igaz a $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu_n$ előállítás.

iv) Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz és X-beli Ω szigma-algebra mellett legyen

$$\mu(A) := \begin{cases} +\infty & (A \text{ nem véges}) \\ [A] & (A \text{ véges}) \end{cases} \qquad (A \in \Omega).$$

($[A]$ jelöli az A halmaz számosságát.) Könnyű belátni, hogy a μ mérték (*számosság-mérték*).

v) A Lebesgue-féle kvázimérték (ld. 2.3.2.) nem mérték, ui. az $\mathcal{I}^p$ halmazrendszer nem σ-algebra.

vi) Tegyük fel, hogy az X halmaz, és egy X-beli $\mathcal{A}$ szigma-algebra (gyűrű) esetén a μ_k $(k \in \mathbf{N})$ függvények valamennyien mértékek (kvázimértékek, ill. előmértékek) az $\mathcal{A}$-n. Ekkor tetszőlegesen adott $\alpha_k \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$ számokkal a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \mu_k$ leképezés is nyilván mérték (kvázimérték, ill. előmérték) az $\mathcal{A}$-n.

vii) Ha a μ halmazfüggvény kvázimérték a $\mathcal{G}$ gyűrűn, és az $A, A_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

akkor

$$\mu(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ui. a μ monotonitása (ld. 2.3.1.3. Tétel) és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap A_n)$ miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Legyen továbbá

$$B_0 := A_0,\ B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \quad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a B_n-ek páronként diszjunkt $\mathcal{G}$-beli halmazok, és

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}.$$

Így

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

azaz a μ *szigma-szubadditív.*

viii) Nem nehéz belátni, hogy az előző pontban értelmezett szigma-szubadditivitási tulajdonság jellemzi is a kvázimértékeket a következő értelemben: ha a $\mathcal{G}$ gyűrűn értelmezett μ előmérték szigma-szubadditív, akkor σ-additív, azaz kvázimérték. Legyenek ui. ekkor az $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazok olyanok, hogy $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. A szigma-szubadditivitás miatt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

a 2.3.1.3. Tétel 5° állítása alapján pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big),$$

tehát

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

ix) A 2.3.1.4. Tételbeli c) tulajdonságot másképp úgy mondjuk, hogy a μ *felülről félig folytonos*, a b)-t pedig úgy, hogy a μ *alulról félig folytonos.*

x) Emlékeztetünk a 2.3.1.2. Definíció után már tárgyalt példára: valamilyen X megszámlálható halmaz esetén a

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \ \text{ vagy } \ X \setminus A \ \text{ véges}\}$$

gyűrűn definiált

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \ \text{ véges}) \\ +\infty & (X \setminus A \ \text{ véges}) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{G})$$

leképezés olyan előmérték, amelyik nem kvázimérték. Ugyanakkor erre a μ-re a 2.3.1.4. Tételbeli d) tulajdonság teljesül: ha $C_n \in \mathcal{G}, C_{n+1} \subset C_n$, $\mu(C_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$, és $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$ (ti. $\mu(C_n) < +\infty$ miatt $\mu(C_n) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$). Ez a példa is azt mutatja, hogy a most említett tétel 2° állításában szereplő, az illető μ végességét megkövetelő feltétel lényeges.

xi) Minden monoton növő, folytonos $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre alkalmazható a 2.3.3.1. Tétel: a μ_φ kvázimérték az $\mathcal{I}$ gyűrűn (az $\mathbf{R}$-beli elemi halmazok gyűrűjén). Itt most nem részletezhető okoknál fogva a φ-t szokás a μ_φ „deriváltjának" nevezni.

xii) Tekintsük a 2.3.3.1. Tételbeli μ_φ Stieltjes-féle kvázimértéket. Nyilván minden $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\mu_{\varphi+c} = \mu_\varphi.$$

Továbbá nem nehéz belátni ez utóbbinak a megfordítását, nevezetesen: ha φ-n kívül adott egy ugyancsak monoton növő, minden pontban balról folytonos $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény is, és $\mu_\varphi = \mu_\psi$, akkor van olyan $c \in \mathbf{R}$ konstans, amellyel $\varphi = \psi + c$. Valóban, legyen $a \in \mathbf{R}$, ekkor tetszőleges $a < x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\mu_\varphi([a, x)) = \varphi(x) - \varphi(a) = \mu_\psi([a, x)) = \psi(x) - \psi(a),$$

ezért

$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(a) - \psi(a).$$

Hasonlóan kapjuk $x < a$ esetén, hogy

$$\mu_\varphi([x, a)) = \varphi(a) - \varphi(x) = \psi(a) - \psi(x),$$

amiből $\varphi - \psi \equiv c := \varphi(a) - \psi(a)$ már következik.

xiii) Legyen most a $\Delta \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges (nem egyelemű) intervallum, és (ld. 2.3.3.)

$$\mathbf{I}_\Delta := \{\emptyset, [a, b) \in \mathbf{I} : a, b \in \Delta, a < b\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{I}_\Delta$ halmazrendszer félgyűrű. Tegyük fel, hogy a $\varphi : \Delta \to \mathbf{R}$ monoton növekedő, a Δ minden pontjában balról folytonos függvény. (Ha a Δ balról nem nyílt, akkor előbb terjesszük ki a φ-t a $\varphi(x) := \varphi(\inf \Delta)$ $(\mathbf{R} \ni x < \inf \Delta)$ utasítással.) Világos, hogy a 2.3.3. pontban mondottak megfelelője elmondható $\mathbf{I}$ helyett $\mathbf{I}_\Delta$-ra. Ezzel az eljárással egy (ugyancsak Stieltjes-félének nevezett) kvázimértéket kapunk a Δ intervallumon. Speciálisan (a $\varphi(x) := x$ $(x \in \Delta)$ esetben) a Lebesgue-féle kvázimértéket a Δ-n.

xiv) A 2.3.3. pontbeli φ függvény által az ott meghatározott m halmazfüggvény és a φ közötti kapcsolat abban az értelemben is igen „szoros", hogy minden, az $\mathbf{I}$-n értelmezett, véges és additív halmazfüggvény egy alkalmas $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés segítségével

így állítható elő. Nevezetesen, ha $m : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ egy additív halmazfüggvény, akkor van olyan $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés, amellyel

$$m([a,b)) = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (a, b \in \mathbf{R}, a < b).$$

Valóban, legyen pl.

$$\varphi(0) := 0 \ , \ \ \varphi(x) := \begin{cases} m([0,x)) & (x > 0) \\ \\ -m([x,0)) & (x < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a most definiált φ függvény eleget tesz a mondottaknak. Például $a < 0 < b \quad (a, b \in \mathbf{R})$ esetén ez az

$$[a,b) = [a,0) \cup [0,b)$$

diszjunkt felbontást és az m additivitását figyelembe véve az

$$m([a,b)) = m([a,0)) + m([0,b)) = -\varphi(a) + \varphi(b)$$

egyenlőség szerint triviális. A többi eset hasonlóan kezelhető. Ha az m nemnegatív, akkor a fenti φ függvény nyilván monoton növekedő.

xv) Röviden vázoljuk a 2.3.3. pontbeli (Stieltjes-féle) konstrukció kiterjesztését magasabb dimenzióban, a részleteket csupán $\mathbf{R}^2$-ben megfogalmazva. Az első probléma rögtön az, hogy mi lehet a megfelelője „kétdimenzióban" a monoton növekedő $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek? Tegyük fel egy pillanatra, hogy már megtaláltuk a megfelelő függvényt, és az m az általa meghatározott $m : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{R}$ additív leképezés az $\mathbf{I}^2$ félgyűrűn. Ha $a, b \in \mathbf{R}$ és

$$I_{xy} := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : a \le u < x;\ b \le v < y\} \qquad (x, y \in \mathbf{R}, a < x;\ b < y),$$

akkor minden $I := [u,z) \times [v,w) \subset I_{xy}$ téglalap esetén

$$m(I) = m(I_{zw}) - m(I_{zv}) + m(I_{uv}) - m(I_{uw}) =$$

$$\Phi(z,w) - \Phi(z,v) + \Phi(u,v) - \Phi(u,w) \ge 0,$$

ahol $\Phi(x,y) := m(I_{xy})$.

Mindezt szem előtt tartva legyen általában a $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre

$$\Phi(z,w) - \Phi(z,v) + \Phi(u,v) - \Phi(u,w) \ge 0 \qquad (u, v, z, w \in \mathbf{R};\ u < z, v < w).$$

Az előbbiek szerint eléggé természetes módon ez a feltétel veszi át a monotonitás szerepét, azaz legyen $I := [u,z) \times [v,w) \in \mathbf{I}^2$ esetén most már

$$m(I) := \Phi(z,w) - \Phi(z,v) + \Phi(u,v) - \Phi(u,w).$$

Az így definiált $m : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{R}$ leképezés tehát nemnegatív, és (könnyen megmutatható, hogy) additív. Például, ha $\varphi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növekedő függvények, és

$$\Phi(x, y) := \varphi(x) \cdot \psi(y) \qquad \Big((x, y) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

akkor $m(I) = \Big(\varphi(z) - \varphi(u)\Big) \cdot \Big(\psi(w) - \psi(v)\Big)$. A $\varphi(x) := \psi(x) := x \quad (x \in \mathbf{R})$ esetben $m(I)$ nem más, mint az I téglalap területe.

Jelöljük most μ-vel az m függvény kiterjesztését az $\mathcal{I}^2$-re (ld. 2.3.1.6. Tétel). Megmutatható, hogy a μ pontosan akkor kvázimérték (ez az $\mathbf{R}^2$-beli *Stieltjes-féle kvázimérték*), ha tetszőleges $(a, b), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $(\alpha, \beta) < (a, b)$ mellett

$$\lim_{x \to a-0, y \to b-0} m([\alpha, x) \times [\beta, y)) = m([\alpha, a) \times [\beta, b)).$$

(A bizonyítás – amelyet nem részletezünk – a 2.3.3.1. Tétel bizonyításához hasonló módon végezhető.)

A Φ-re tett előbbi feltételnél nyilván „erősebb" a következő:

$$\lim_{x \to a-0, y \to b-0} \Phi(x, y) = \Phi(a, b) \qquad \Big((a, b) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Ha pl. a Φ folytonos, akkor ez nyilván igaz.

2.5. Kiterjesztési tételek

Ahogyan azt már korábban is jeleztük, viszonylag nem túl sok feltételnek eleget tevő (és a fontos „hétköznapi" esetekben eléggé természetes módon adódó) halmazfüggvényeket akarunk kiterjeszteni bonyolultabb feltételeknek megfelelő leképezésekké. Ezek a „végtermékként" megjelenő függvények a mértékek, amelyek az elemi tanulmányokból jól ismert hosszúság, terület, térfogat fogalmának messzemenő általánosításai. A kiterjesztés során eddig a kvázimértékekig jutottunk el (ld. 2.3.1.6. Tétel), amelyek már alkalmasak voltak arra, hogy (ld. 2.3.2.1., 2.3.3.1. Tételek) pl. az ($\mathbf{R}^p$-beli) elemi halmazokat mérni tudjuk a segítségükkel. Világos, hogy mondjuk az elemi halmazok struktúrája még eléggé „szegényes", számos fontos kérdésben van szükség (az $\mathbf{R}^p$-vel kapcsolatos analízisben) ezeknél jóval bonyolultabb halmazok mérésére. Ezért ebben a pontban a most említett kitejesztési eljárást tovább folytatva annak az utolsó lépését tesszük meg, aminek az eredményeként mértékeket állítunk elő.

Legyen tehát valamilyen X halmaz esetén adott a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn egy

$$\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$$

kvázimérték. Ha van olyan $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és olyan

$$\mu : \Omega \to [0, +\infty]$$

mérték, hogy

$$\mathcal{G} \subset \Omega \text{ és } \tilde{\mu}(A) = \mu(A) \quad (A \in \mathcal{G})$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a $\tilde{\mu}$ kvázimérték *kiterjeszthető* mértékké, és a μ mérték a $\tilde{\mu}$ egy *kiterjesztése*. Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{G}$-t lefedő bármilyen $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és az azon értelmezett $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték esetén a μ leszűkítése a $\mathcal{G}$-re nyilván kvázimérték. A továbbiakban éppen azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ez mennyiben megfordítható.

2.5.1. Tétel. *Minden kvázimérték kiterjeszthető mértékké.*

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni tehát, hogy ha az X tetszőleges halmaz és $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrű, valamint a $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ leképezés kvázimérték, akkor van olyan $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és olyan $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték, amelyik kiterjesztése a $\tilde{\mu}$-nak: $\mathcal{G} \subset \Omega$ és $\tilde{\mu} = \mu_{|\mathcal{G}}$.

Legyen ehhez egy tetszőleges $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén Σ_A az A-t „befedő" $\mathcal{G}$-beli halmazsorozatok halmaza, azaz

$$\Sigma_A := \Big\{(A_n, n \in \mathbf{N}) : A_n \in \mathcal{G} \ \ (n \in \mathbf{N}), A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big\},$$

és

$$\mu^*(A) := \begin{cases} +\infty \quad (\Sigma_A = \emptyset) \\ \\ \inf\{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) : (A_n, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_A\} \quad (\Sigma_A \neq \emptyset). \end{cases}$$

A most definiált $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}$ halmazfüggvényre a következők teljesülnek:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

b) $\mu^* \geq 0$;

c) tetszőleges $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B$ esetén $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

d) bármilyen $A_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatra $\mu^*(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

(A μ^* tehát egy nemnegatív, az $\emptyset$-on eltűnő, monoton és szubadditív halmazfüggvény. Érdemes megjegyezni, hogy a μ^* általában nem additív, pl. legyen

$$X := \mathbf{N}, \mathcal{G} := \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \ \tilde{\mu}(\emptyset) := 0, \ \tilde{\mu}(\{1, 2\}) := 1.$$

Ekkor $\mu^*(\{1\}) = \mu^*(\{2\}) = \mu^*(\{1,2\}) = 1 = \mu^*(\{1\} \cup \{2\}) \neq 2 = \mu^*(\{1\}) + \mu^*(\{2\})$, azaz a μ^* nem additív.)

A most mondott a) – d) tulajdonságok igazolásához vegyük észre, hogy $(\emptyset, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_\emptyset$, ezért az a) állítás $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ miatt triviális. A definíció alapján a b) nyilvánvalóan igaz, a c) állítás pedig az infimum értelmezéséből $\Sigma_B \subset \Sigma_A$ miatt rögtön következik.

A d)-beli egyenlőtlenség belátásához nyilván feltehető, hogy $\mu^*(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$. Ekkor viszont minden $\varepsilon > 0$ szám és $n \in \mathbf{N}$ index mellett az infimum értelmezése alapján megadható olyan $(A_{nm}, m \in \mathbf{N}) \in \Sigma_{A_n}$ sorozat, amellyel

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_{nm}) < \mu^*(A_n) + 2^{-n-1} \cdot \varepsilon.$$

Innen

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{nm}$$

miatt $(A_{nm}, n, m \in \mathbf{N}) \in \Sigma_{\cup_{n=0}^{\infty} A_n}$ következik (az $(A_{nm}, n, m \in \mathbf{N})$ kettős sorozat tagjainak valamilyen módon való sorozatbarendezése után). Így

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_{nm}) < \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért innen a d) kijelentés már nyilván adódik.

Most megmutatjuk, hogy minden $G \in \mathcal{G}$ esetén

$$(*) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \setminus G) \qquad (A \in \mathcal{P}(X)),$$

és

$$\mu^*(G) = \tilde{\mu}(G).$$

Itt nyilván feltehető, hogy $\mu^*(A) < +\infty$ (különben a $(*)$ becslés triviális), ezért egyúttal $\Sigma_A \neq \emptyset$. Ekkor azonban minden $(A_n, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_A$ esetén a $\tilde{\mu}$ additivitása alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\tilde{\mu}(A_n \cap G) + \tilde{\mu}(A_n \setminus G)\Big).$$

Világos továbbá, hogy $(A_n \bigcap G, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_{A \cap G}$, $(A_n \setminus G, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_{A \setminus G}$, amiből a μ^* értelmezésére tekintettel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n \cap G) \geq \mu^*(A \cap G) \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n \setminus G) \geq \mu^*(A \setminus G)$$

következik. Más szóval azt kaptuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) \geq \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \setminus G).$$

Ezzel (a $\mu^*(A)$ definícióját figyelembe véve) a $(*)$-ot beláttuk.

A $\mu^*(G) = \tilde{\mu}(G)$ egyenlőség igazolásához egyrészt jegyezzük meg azt, hogy a „majdnem konstans" $(G, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ halmazsorozat nyilván eleme a Σ_G-nek, ezért ($\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ miatt) $\mu^*(G) \leq \tilde{\mu}(G)$. Másrészt (ld. 2.4. vii) megjegyzés) minden $(A_n, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_G$ halmazsorozat esetén $\tilde{\mu}(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n)$, ezért (ismét a μ^* definíciójára hivatkozva) $\tilde{\mu}(G) \leq \mu^*(G)$.

Legyen ezek után

$$\Omega := \{Y \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A \setminus Y) \ \ (A \in \mathcal{P}(X))\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az Ω szigma-algebra. Ehhez először is azt jegyezzük meg, hogy a tetszőleges $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mellett fennálló $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ egyenlőség és a már bebizonyított a) – d) becslések miatt $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$, ezért

$$\Omega = \{B \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \ \ (A \in \mathcal{P}(X))\}.$$

Tehát akármilyen $B \subset X$ halmazra a

$$(**) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha

$$(***) \qquad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

Az $X \in \Omega$ tartalmazás akár a $(**)$, akár a $(***)$ alapján nyilvánvaló. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy az Ω zárt a komplementer-képzésre, azaz minden $\Omega \ni B$-re $X \setminus B \in \Omega$ is igaz. Azt kell tehát már csak megmutatni, hogy legfeljebb megszámlálható sok Ω-beli halmaz egyesítése is az Ω-ban van.

Mutassuk meg ezt először két Ω-beli halmazra, legyenek ezek mondjuk $B_0, B_1 \in \Omega$. Ekkor minden $A \subset X$ esetén $B_0 \in \Omega$ miatt

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B_0) + \mu^*(A \setminus B_0),$$

amiből $B_1 \in \Omega$ alapján (az utóbbit most az $A \cap B_0$, $A \setminus B_0$ halmazokra alkalmazva)

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_0) \setminus B_1) + \mu^*((A \setminus B_0) \cap B_1) + \mu^*((A \setminus B_0) \setminus B_1) =$$

$$\mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_0) \setminus B_1) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0) + \mu^*(A \setminus (B_0 \cup B_1))$$

következik. Vegyük észre, hogy

$$\Big(A \cap B_0 \cap B_1\Big) \bigcup \Big((A \cap B_1) \setminus B_0\Big) \bigcup \Big((A \cap B_0) \setminus B_1\Big) = A \cap (B_0 \cup B_1),$$

ezért a μ^* fenti d) tulajdonsága alapján

$$\mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_0) \setminus B_1) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0) \geq \mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1)).$$

Mindezeket egybevetve oda jutunk, hogy

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1)) + \mu^*(A \setminus (B_0 \cup B_1)),$$

azaz $B_0 \cup B_1 \in \Omega$ valóban igaz. Ez (az Ω-val kapcsolatos előzetes észrevételeinkre utalva) egyúttal azt jelenti, hogy

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1)) + \mu^*(A \setminus (B_0 \cup B_1)) \qquad (A \in \mathcal{P}(A)).$$

Ebből az egyenlőségből viszont az is következik, hogy az ide vezető fenti becsléseinkben „végig" egyenlőség van. Speciálisan tetszőleges $A \in \mathcal{P}(A))$ halmazra

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_0) \setminus B_1) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0) + \mu^*(A \setminus (B_0 \cup B_1)).$$

Ha itt $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, akkor (A helyett $A \cap (B_0 \cup B_1)$-et írva)

$$\mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1)) = \mu^*(A \cap B_0) + \mu^*(A \cap B_1) \qquad (A \in \mathcal{P}(A)).$$

Legyen most $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat. Ekkor az előzőek szerint minden $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén

$$\mu^*(A \cap (A_0 \cup A_1)) = \mu^*(A \cap A_0) + \mu^*(A \cap A_1),$$

amiből teljes indukcióval adódik az előbbi A-ra és minden $\mathbf{N} \ni n$-re az, hogy

$$\mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big)\Big) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap A_i).$$

A $C_n := \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok a fentiek alapján egyrészt valamennyien az Ω-ban vannak, másrészt

$$A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) \subset A \setminus C_n \qquad (A \in \mathcal{P}(X), n \in \mathbf{N})$$

miatt (ld. c) tulajdonság)

$$\mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) \leq \mu^*(A \setminus C_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen tetszőleges $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra azt kapjuk, hogy

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap C_n) + \mu^*(A \setminus C_n) \geq \mu^*(A \cap C_n) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \mu^*(A \cap A_i) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel ez a becslés minden $n \in \mathbf{N}$ természetes számra igaz, ezért bármilyen $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén az

$$A \bigcap \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A \cap A_i)$$

egyenlőség és a μ^* d) tulajdonsága szerint

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_i) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) \geq \mu^*\Big(A \bigcap \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big).$$

Ez tehát azt jelenti, hogy $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \Omega$, és így minden $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra az előbbi egyenlőtlenségekben mindenütt egyenlőség van:

$$(****) \qquad \mu^*(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_i) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) = \mu^*\Big(A \bigcap \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\Big).$$

A 2.2. vii) megjegyzést is figyelembe véve tehát az Ω egy X-beli σ-algebra. Ha a $(****)$-ban $A := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, akkor

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

azaz a μ^*-nak az Ω-ra való leszűkítése σ-additív, így (az előzményekre is tekintettel) mérték, amire a fenti $(*)$ és a $\mu^*(G) = \tilde{\mu}(G) \quad (G \in \mathcal{G})$ egyenlőség szerint $\mathcal{G} \subset \Omega$, valamint $\mu^*_{|\mathcal{G}} = \tilde{\mu}$ teljesül. ■

Egy $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}$ leképezést *külső mértéknek* nevezünk, ha a fenti, a 2.5.1. Tétel bizonyításában szereplő a) – d) tulajdonságokkal rendelkezik. Tehát a külső mérték olyan, a $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmazt az $\overline{\mathbf{R}}$ kibővített valós számhalmazba képező halmazfüggvény, amelyik az *üres halmazhoz nullát rendel* (ld. a)), *nemnegatív* (ld. b)), *monoton* (ld. c)) és *σ-szubadditív* (ld. d)). Azt mondjuk továbbá, hogy az $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz *μ^*-mérhető*, ha minden $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazra

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

(azaz egy frappáns megfogalmazás szerint „*a mérhető halmaz olyan éles kés, amelyik minden halmazt morzsa nélkül vág szét*").

A 2.5.1. Tétel bizonyítása során a $\mathcal{G}$ gyűrűn értelmezett $\tilde{\mu}$ kvázimérték segítségével egy külső mértéket definiáltunk, és egyúttal a következő tételt is bebizonyítottuk:

2.5.2. Tétel (Carathèodory). *Legyen az X tetszőleges halmaz, a*

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

halmazfüggvény pedig külső mérték. Ekkor a μ^*-mérhető $\mathcal{P}(X)$-beli halmazok Ω halmazrendszere σ-algebra, a μ^*-nak az Ω-ra való leszűkítése pedig mérték.

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy egy kvázimértéknek a 2.5.1. Tételben garantált kiterjesztését illetően mit mondhatunk az egyértelműség szempontjából? Az említett tétel jelöléseivel minden, a $\mathcal{G}$ gyűrűt lefedő $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebára $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega$. Így a $\tilde{\mu}$ kvázimérték bármilyen $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ (mérték) kiterjesztését illetően a μ „legalább" az $\Omega(\mathcal{G})$ generált σ-algebrán értelmezve van. Ezért világos, hogy csak a szóban forgó gyűrű által generált σ-algebrára való kiterjesztés egyértelműségéről lehet legfeljebb szó.

A következő nagyon egyszerű példa azt mutatja, hogy minden további nélkül még ilyen értelemben sem egyértelmű a kiterjesztés. Legyen ui. $X \neq \emptyset$, $\mathcal{G} := \{\emptyset\}$, és

$$\mu_1(\emptyset) := \mu_2(\emptyset) := 0, \ \mu_1(X) := 1, \mu_2(X) := 0.$$

Ekkor $\Omega(\mathcal{G}) = \{\emptyset, X\}$ (ld. triviális σ-algebra), és világos, hogy a μ_1, μ_2 két olyan különböző mérték az $\Omega(\mathcal{G})$-n, amelyeknek a $\mathcal{G}$-re vonatkozó leszűkítései megegyeznek.

Az alábbi definícióban – amint az a későbbiekben kiderül – egy elégséges feltételt fogalmazunk meg az említett kiterjesztés egyértelműségére vonatkozóan.

2.5.3. Definíció. Tekintsük az X halmazt, a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ pedig legyen egy, az X részhalmazainak valamilyen rendszerén értelmezett halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy a φ *szigma-véges*, ha a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartományában megadható olyan $A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, hogy

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \ \text{ és } \ \mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a μ véges ($\mathcal{R}_\varphi \subset \mathbf{R}$), akkor a φ szigma-végessége ekvivalens a fenti definícióban szereplő (páronként diszjunkt mérhető halmazokra való) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ felbonthatósággal. A definíció megfogalmazás előtti példa ugyanakkor azt mutatja, hogy a végességből önmagában még nem következik a σ-végesség. Ti. az említett példában világos, hogy nem létezik a σ-végesség által megkövetelt $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ előállítás. Könnyű meggondolni viszont, hogy a Lebesgue-féle kvázimérték (ld. 2.3.2.), vagy ugyanígy a Stieltjes-féle kvázimérték (ld. 2.3.3.) egyaránt véges és σ-véges. Hasonlóan, ha egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra (ld. 2.4. iv) megjegyés)

$$\varphi(A) := \begin{cases} +\infty & (A \text{ nem véges}) \\ [A] & (A \text{ véges}), \end{cases}$$

akkor a φ pontosan abban az esetben lesz σ-véges, ha az X legfeljebb megszámlálható.

2.5.4. Tétel. *Legyen valamilyen X halmaz esetén adott a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrű, a $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ kvázimérték pedig legyen σ-véges. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mu : \Omega(\mathcal{G}) \to [0, +\infty]$ mérték, amelyik kiterjesztése a $\tilde{\mu}$-nak.*

Bizonyítás. A 2.5.1. Tétel miatt már csak az egyértelműséget kell bebizonyítani. Legyen ehhez (a $\tilde{\mu}$ szigma-végessége miatt létező) $A_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan, páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, hogy

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \ \tilde{\mu}(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Tegyük fel továbbá, hogy a $\mu_1, \mu_2 : \Omega(\mathcal{G}) \to [0, +\infty]$ mértékekre

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \tilde{\mu}(A) \qquad (A \in \mathcal{G})$$

teljesül. Ekkor bármilyen $A \in \Omega(\mathcal{G})$ mellett az $A = \bigcup_{n=0}^{\infty}(A \cap A_n)$ egy diszjunkt felbontása az A-nak, így

$$\mu_i(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_i(A \cap A_n) \qquad (i = 1, 2).$$

Elég tehát azt belátni, hogy tetszőleges $A \in \Omega(\mathcal{G})$ mellett

$$\mu_1(A \cap A_n) = \mu_2(A \cap A_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez nyilván következni fog abból az („erősebb") állításból, hogy minden $G \in \mathcal{G}$, $\tilde{\mu}(G) < +\infty$ halmazzal

$$\mu_1(A \cap G) = \mu_2(A \cap G) \qquad (A \in \Omega(\mathcal{G})).$$

Tekintsük ennek az érdekében a következő halmazrendszert:

$$\Omega := \{A \in \Omega(\mathcal{G}) : \mu_1(A \cap G) = \mu_2(A \cap G)\}.$$

Erről a rendszerről először is megmutatjuk, hogy

i) $X \in \Omega$;

ii) minden $A, B \in \Omega, A \subset B$ esetén $B \setminus A \in \Omega$;

iii) megszámlálható sok, páronként diszjunkt Ω-beli halmaz egyesítése is Ω-ban van;

iv) $\mathcal{G} \subset \Omega$.

Ui. az i) állítás triviális, a ii) pedig következik a

$$\mu_1(G \cap (B \setminus A)) = \mu_1((G \cap B) \setminus (G \cap A)) = \mu_1(G \cap B) - \mu_1(G \cap A) =$$

$$\mu_2(G \cap B) - \mu_2(G \cap A) = \mu_2(G \cap (B \setminus A))$$

egyenlőségekből. (Emlékeztetünk arra (ld. 2.3.1.3. Tétel), hogy a nyilvánvaló $G \cap A \subset G$ tartalmazás miatt $\mu_1(G \cap A) \leq \mu_1(G) < +\infty$, és ugyanígy $\mu_2(G \cap A) < +\infty$.)

A iii) bizonyításához legyen $B_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ a szóban forgó halmazsorozat, ekkor

$$\mu_1\Big(G \bigcap \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big)\Big) = \mu_1\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \cap G)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1(B_n \cap G) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_2(B_n \cap G) = \mu_2\Big(G \bigcap \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big)\Big),$$

azaz valóban $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega$.

Mivel $A \in \mathcal{G}$ esetén $A \cap G \in \mathcal{G}$, ezért

$$\mu_1(A \cap G) = \tilde{\mu}(A \cap G) = \mu_2(A \cap G),$$

így a iv) állítás is igaz.

Könnyű meggondolni, hogy ha valamilyen $\widetilde{\Omega} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer is rendelkezik az előbbi i) – iv) tulajdonságokkal, akkor ugyanez igaz az $\Omega \cap \widetilde{\Omega}$ metszethalmaz-rendszerre is (és kettő helyett akárhány ilyen halmazrendszer metszetére is). Ezt figyelembe véve jelöljük Ω^*-gal az i) – iv) tulajdonságoknak eleget tevő $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerek metszetét. Ekkor egyrészt Ω^* is rendelkezik az i) – iv) tulajdonságokkal, másrészt az Ω^* „metszet-stabil", azaz

$$A \cap B \in \Omega^* \qquad (A, B \in \Omega^*).$$

Valóban, ha egy $A \in \Omega^*$ mellett

$$\Omega_A := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap A \in \Omega^*\},$$

akkor az Ω_A-ra is triviális módon igazak az i) – iii) tulajdonságok. Továbbá $A \in \mathcal{G}$ esetén $\mathcal{G} \subset \Omega_A$, ui. bármelyik $G \in \mathcal{G}$ halmazra $A \cap G \in \mathcal{G} \subset \Omega^*$. Innen az Ω^* definíciója alapján rögtön adódik az, hogy $\Omega^* \subset \Omega_A$, azaz

$$A \cap B \in \Omega^* \qquad (A \in \mathcal{G},\ B \in \Omega^*).$$

Így tetszőleges $B \in \Omega^*$ választással $\mathcal{G} \subset \Omega_B$ következik, ami azt jelenti, hogy $\Omega^* \subset \Omega_B$. Ha tehát $C \in \Omega^*$, akkor $C \in \Omega_B$, azaz $C \cap B \in \Omega^*$.

A fentiekből már egyszerűen következik, hogy az Ω^* algebra (ld. 2.2. vii) megjegyzés). Ui. egyrészt i) és ii) alapján $X \setminus A \in \Omega^*$ $(A \in \Omega^*)$, másrészt minden $A, B \in \Omega^*$ halmazra

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \Omega^* \ , \ A \cup B = X \setminus \Big((X \setminus A) \cap (X \setminus B)\Big) \in \Omega^*.$$

Ha viszont már tudjuk, hogy az Ω^* algebra, akkor a 2.2. vii) megjegyzés értelmében az Ω^* szigma-algebra is.

Összefoglalva az eddigieket azt kapjuk, hogy Ω^* egy, a $\mathcal{G}$-t lefedő σ-algebra. Ezért $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega^* \subset \Omega$, tehát az Ω definíciójából nyilvánvaló $\Omega \subset \Omega(\mathcal{G})$ reláció miatt

$$\Omega^* = \Omega = \Omega(\mathcal{G}).$$

Ez éppen az, amit be kellett bizonyítani. ■

Legyen továbbra is az X egy halmaz, az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ pedig szigma-algebra. Az (X, Ω) rendezett párt *mérhető térnek* nevezzük. Az $A \subset X$ halmaz *mérhető,* ha $A \in \Omega$. Tegyük fel, hogy a $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ leképezés mérték. Ekkor az (X, Ω, μ) rendezett hármas egy *mértéktér.*

Tekintsük az

$$\Omega_0 := \{A \in \Omega : \mu(A) = 0\}$$

halmazrendszert (a μ-nulla-mértékű (μ-nulla-) halmazok rendszerét). A μ mérték (az (X, Ω, μ) mértéktér) *teljes*, ha tetszőleges $A \in \Omega_0$ esetén $\mathcal{P}(A) \subset \Omega_0$. Más szóval a szóban forgó μ mérték akkor és csak akkor teljes, ha bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz akármilyen $B \subset A$ részhalmazára a B is mérhető, azaz $B \in \Omega$. Ekkor (a μ monotonitása miatt) $0 \le \mu(B) \le \mu(A)$, így egyúttal $\mu(B) = 0$.

A továbbiakban egy kvázimérték és a 2.5.1. (kiterjesztési) Tételben kapott mérték viszonyát vizsgáljuk.

2.5.5. Tétel. *Legyen az X halmaz és a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrű, valamint a*

$$\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$$

kvázimérték esetén a μ^* a $\tilde{\mu}$ által indukált külső mérték (ld. 2.5.1. Tétel bizonyítása), μ pedig a μ^* leszűkítése az $\Omega(\mathcal{G})$-re. Ekkor minden $A \subset X$ halmazhoz létezik olyan $\tilde{A} \in \Omega(\mathcal{G})$, hogy $A \subset \tilde{A}$, és

$$\mu^*(A) = \mu(\tilde{A}).$$

Ha a μ mérték σ-véges , akkor az előbbi $\tilde{A}$ halmazról az is feltehető, hogy

$$\mu(B) = 0 \qquad (\Omega(\mathcal{G}) \ni B \subset \tilde{A} \setminus A).$$

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $A_\varepsilon \in \Omega(\mathcal{G})$ halmaz, amelyikre $A \subset A_\varepsilon$ és

$$\mu(A_\varepsilon) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ha ui. $\mu^*(A) = +\infty$, akkor az $A_\varepsilon := X$ választás nyilván megfelelő, hiszen $A \subset X$ és a μ^* monotonitása miatt ekkor $\mu^*(X) = +\infty$. Különben pedig a μ^* definíciója alapján egy alkalmas $B_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ezért (ld. 2.4. vii) megjegyzés)

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n)$$

miatt az $A_\varepsilon := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ a kívánt tulajdonságú halmaz.

Legyen ezek után

$$\tilde{A} := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \in \Omega(\mathcal{G}).$$

Az világos, hogy $A \subset \tilde{A}$ és $\mu^*(A) \le \mu^*(\tilde{A}) = \mu(\tilde{A})$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\mu^*(A) < \mu(\tilde{A})$. Ekkor $\mu^*(A) < +\infty$, és

$$\mu(\tilde{A}) \le \mu(A_1) \le \mu^*(A) + 1 < +\infty.$$

Ha $\varepsilon := \mu(\tilde{A}) - \mu^*(A)$, akkor egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ számmal $1/n < \varepsilon$, ezért

$$\mu(\tilde{A}) \le \mu(A_{1/n}) \le \mu^*(A) + 1/n = \mu(\tilde{A}) - \varepsilon + 1/n < \mu(\tilde{A}),$$

ami nyilván nem lehet.

Ha az előbbiekben $\mu^*(A) < +\infty$, akkor a tételben szereplő $B \in \Omega(\mathcal{G})$, $B \subset \tilde{A} \setminus A$ halmazra $\mu(B) \le \mu(\tilde{A}) = \mu^*(A) < +\infty$ teljesül, ezért (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu^*(A) \le \mu^*(\tilde{A} \setminus B) = \mu(\tilde{A} \setminus B) = \mu(\tilde{A}) - \mu(B) = \mu^*(A) - \mu(B),$$

amiből $0 \le \mu(B) \le 0$, azaz $\mu(B) = 0$ már következik.

Ha viszont $\mu^*(A) = +\infty$ (és a μ szigma-véges), akkor legyen $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ a σ-végesség definíciójában szereplő felbontása az X-nek páronként diszjunkt, véges mértékű halmazokra. Innen egyúttal az A-ra is kapunk egy

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n =: \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap X_n)$$

felbontást, amelyre $\mu^*(A_n) \le \mu^*(X_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$. Alkalmazzuk minden A_n-re a „véges" esetben az előbb már bebizonyított állítást, ekkor olyan $\tilde{A}_n \in \Omega(\mathcal{G})$ halmazokat kapunk, amelyekre

$$A_n \subset \tilde{A}_n,\ \mu^*(A_n) = \mu(\tilde{A}_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

igaz. Legyen $\tilde{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n$, amikor is $A \subset \tilde{A}$, ezért $\mu(\tilde{A}) = \mu^*(\tilde{A}) \geq \mu^*(A) = +\infty$. Más szóval $\mu(\tilde{A}) = +\infty = \mu^*(A)$.

Ha $\Omega(\mathcal{G}) \ni B \subset \tilde{A} \setminus A$ és $B_n := B \cap \tilde{A}_n$ $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n, \; B_n \subset \tilde{A}_n \setminus \Big(\bigcup_{m=0}^{\infty} A_m \Big) \subset \tilde{A}_n \setminus A_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így $\mu(B_n) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, tehát $\mu(B) = 0$. ■

Megjegyezzük, hogy ha az előbbi tételben a kiindulási $\tilde{\mu}$ kvázimérték σ-véges, akkor nyilván a kiterjesztéséül kapott μ mérték is σ-véges. Ekkor a 2.5.5. Tételben kapott $\tilde{A}$ halmaz az A halmaz ún. *mérhető fedése.*

A következő tételben a teljesség kérdésével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy minden mérték „teljessé tehető", azaz kiterjeszthető teljes mértékké. Sőt, ezek között a kiterjesztések között van egy ún. legszűkebb.

2.5.6. Tétel. *Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér esetén egyértelműen létezik olyan $(X, \tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ teljes mértéktér, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

i) a $\tilde{\mu}$ kiterjesztése a μ-nek;

ii) *ha az (X, Ω', μ') olyan teljes mértéktér, hogy a μ' kiterjesztése a μ-nek, akkor a μ' kiterjesztése a $\tilde{\mu}$-nak is.*

Bizonyítás. Legyen

$$\tilde{\Omega} := \{A \cup N \in \mathcal{P}(X) : A \in \Omega, \, N \subset B \in \Omega, \, \mu(B) = 0\},$$

és

$$\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \qquad (A \cup N \in \tilde{\Omega}).$$

Mutassuk meg először is azt, hogy a $\tilde{\mu}$ halmazfüggvény „jól definiált", azaz, ha

$$A \cup N = A_1 \cup N_1 \quad (A, A_1 \in \Omega, \, N \subset B, \, N_1 \subset B_1, \, B, \, B_1 \in \Omega, \mu(B) = \mu(B_1) = 0),$$

akkor $\mu(A) = \mu(A_1)$. Ui. $A \subset A_1 \cup N_1 \subset A_1 \cup B_1$, ezért

$$\mu(A) \leq \mu(A_1 \cup B_1) \leq \mu(A_1) + \mu(B_1) = \mu(A_1),$$

továbbá hasonlóan kapjuk, hogy $\mu(A_1) \leq \mu(A)$.

Az $\tilde{\Omega}$ definíciójában nyilván feltehető, hogy $A \cap N = \emptyset$. Belátjuk, hogy az $\tilde{\Omega}$ szigma-algebra. Az $X \in \tilde{\Omega}$ tartalmazás nyilvánvaló, ugyanígy az is, hogy $\tilde{\Omega}$ megszámlálható sok

elemével együtt azok egyesítését is tartalmazza. Ha pedig (az $\tilde{\Omega}$ definíciója szerinti A, N, $A \cap N = \emptyset$ halmazokkal) $A \cup N \in \tilde{\Omega}$, $N \subset B \in \Omega$, valamint $\mu(B) = 0$, akkor

$$X \setminus (A \cup N) = (X \setminus A) \setminus N = \Big((X \setminus A) \setminus B\Big) \bigcup \Big((X \setminus A) \cap B) \setminus N\Big) =$$
$$\Big((X \setminus A) \setminus B\Big) \cup \tilde{N},$$

ahol

$$\tilde{N} := \Big((X \setminus A) \cap B\Big) \setminus N \subset (X \setminus A) \cap B \in \Omega.$$

Itt $(X \setminus A) \setminus B \in \Omega$ és $\mu\Big((X \setminus A) \cap B\Big) \leq \mu(B) = 0$, ezért $X \setminus (A \cup N) \in \tilde{\Omega}$.

Az $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ tartalmazás és a $\tilde{\mu}$ mérték teljessége, valamint a $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) \quad (A \in \Omega)$ egyenlőség triviálisan teljesül.

Legyen most (X', Ω', μ') a tételben szereplő teljes mértéktér,

$$A \cup N \in \tilde{\Omega} \qquad (A \in \Omega,\ N \subset B \in \Omega,\ A \cap N = \emptyset,\ \mu(B) = 0).$$

Mivel $A, B \in \Omega$, ezért $A, B \in \Omega'$ is igaz, és $\mu'(B) = 0$. A μ' mérték teljes, ezért $N \in \Omega'$, és $\mu'(N) = 0$. Innen $A \cup N \in \Omega'$, így $\tilde{\Omega} \subset \Omega'$, és

$$\mu'(A \cup N) = \mu'(A) + \mu'(N) = \mu'(A) = \mu(A) = \tilde{\mu}(A)$$

adódik.

A tételben jelzett egyértelműség az eddigiekből már nyilván következik. ■

2.6. Megjegyzések

i) A 2.5.1. Tétel bizonyításában (az ottani jelölésekkel) kulcsszerepet játszó $B_0 \cup B_1 \in \Omega$ $(B_0, B_1 \in \Omega)$ tartalmazás bizonyításában a következőképpen is eljárhattunk volna: egyrészt $B_0 \in \Omega$ miatt

$$\mu^*(A \cap B_1) = \mu^*(A \cap B_1 \cap B_0) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0),$$
$$\mu^*(A \setminus B_1) = \mu^*((A \setminus B_1) \cap B_0) + \mu^*((A \setminus B_1) \setminus B_0),$$

így $B_1 \in \Omega$ alapján

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \setminus B_1) =$$
$$\mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0) + \mu^*((A \setminus B_1) \cap B_0) + \mu^*((A \setminus B_1) \setminus B_0).$$

Az előbbi egyenlőséget A helyett az $A \cap (B_0 \cup B_1)$ halmazra alkalmazva

$$\mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1) = \mu^*(A \cap B_0 \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_0) + \mu^*((A \cap B_0) \setminus B_1).$$

Innen már minden $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (B_0 \cup B_1)) + \mu^*(A \setminus (B_1 \cup B_0),$$

tehát $B_0 \cup B_1 \in \Omega$ következik.

ii) Azokat az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszereket, amelyek eleget tesznek a 2.5.4. Tétel bizonyításában szereplő i) – iii) tulajdonságoknak, *Dynkin-rendszereknek* nevezzük. Az említett bizonyításból az is kiderül, hogy

- egy Dynkin-rendszer akkor és csak akkor σ-algebra, ha metszet-stabil;
- bármely metszet-stabil $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ rendszert lefedő legszűkebb Dynkin-rendszer megegyezik $\Omega(\mathcal{T})$-vel.

iii) Adott $X \neq \emptyset$ halmaz és $\omega \in X$ mellett legyen az Ω olyan X-beli σ-algebra, hogy $\{\omega\} \in \Omega$, valamint $A \in \Omega$ esetén legyen

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (\omega \notin A) \\ \\ 1 & (\omega \in A). \end{cases}$$

Ez a μ mérték pontosan akkor teljes, ha $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Valóban, ha a mérhető halmazok rendszere megegyezik $\mathcal{P}(X)$-szel, akkor a rajta értelmezett bármilyen mérték nyilván teljes. Fordítva, a mondott példában $X \setminus \{\omega\} \in \Omega$, és $\mu(X \setminus \{\omega\}) = 0$, ezért a μ teljessége esetén tetszőleges $A \subset X \setminus \{\omega\}$ halmazra $A \in \Omega$. Mivel $\{\omega\} \in \Omega$, így az előbbi A halmazra $A \cup \{\omega\} \in \Omega$ is igaz. Nyilván bármilyen $\omega \in B \subset X$ halmaz előállítható ilyen alakban. Tehát valóban minden $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz Ω-ban van.

iv) Könnyű megmutatni, hogy a Carathèodory-tételben (ld. 2.5.2. Tétel) kapott (az ottani szereplőkkel) $\mu := \mu^*_{|\Omega}$ mérték teljes. Ui. legyen $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ és $B \subset A$. Ekkor a μ^* monotonitása miatt

$$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0,$$

ezért $\mu^*(B) = 0$. Viszont minden $D \subset X$ halmazra $0 \leq \mu^*(B \cap D) \leq \mu^*(B) = 0$, így $\mu^*(B \cap D) = 0$. Innen rögtön adódik az, hogy az előbbi D-re

$$\mu^*(D \cap B) + \mu^*(D \cap (X \setminus B)) \leq \mu^*(D).$$

Ez azt jelenti, hogy a B halmaz μ^*-mérhető, azaz $B \in \Omega$.

v) A 2.5.6. Tételben szereplő $\tilde{\mu}$ mértéket (az $(X, \tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ mértékteret) a μ mérték (az (X, Ω, μ) mértéktér) *teljessé tételének* nevezzük.

vi) Ha az (X, Ω, μ) mértéktér teljes, akkor az $(X, \tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ nyilván megegyezik az (X, Ω, μ)-vel (ld. 2.5.6. Tétel bizonyítása).

vii) Tekintsük most az (X, Ω, μ) mértékteret, és alkalmazzuk a 2.5.2. Tételt, ill. annak a bizonyítását (ld. a 2.5.1. Tétel bizonyítása) a μ mértékre. Legyen tehát egy tetszőleges $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén most Σ_A az A-t „befedő" Ω-beli halmazsorozatok halmaza, azaz

$$\Sigma_A := \Big\{(A_n, n \in \mathbf{N}) : A_n \in \Omega \ \ (n \in \mathbf{N}), A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big\},$$

és

$$\mu^*(A) := \begin{cases} +\infty & (\Sigma_A = \emptyset) \\ \inf\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n, n \in \mathbf{N}) \in \Sigma_A\} & (\Sigma_A \neq \emptyset). \end{cases}$$

Tegyük fel azt is, hogy a μ szigma-véges, $(X, \widehat{\Omega}, \widehat{\mu})$ pedig legyen a μ^*-ból a 2.5.2. (Carathèodory-)Tételben kapott mértéktér. Ekkor az $(X, \widehat{\Omega}, \widehat{\mu})$ nem más, mint az (X, Ω, μ) teljessé tétele (ld. v) megjegyzés). Valóban, mivel $\widehat{\mu}$ teljes (ld. iv) megjegyzés), és a $\widehat{\mu}$ nyilván a μ kiterjesztése, ezért elegendő azt belátni, hogy $\widehat{\Omega} = \tilde{\Omega}$. Sőt, az $\tilde{\Omega}$ értelmezése (ld. 2.5.6. Tétel bizonyítása) miatt triviálisan fennálló $\tilde{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ reláció alapján csupán azt kell megmutatni, hogy $\widehat{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Legyen ehhez $A \in \widehat{\Omega}$, ekkor (ld. 2.5.5. Tétel) van olyan $\tilde{A} \in \Omega$, amelyre

$$A \subset \tilde{A},\ \mu^*(A) = \widehat{\mu}(A) = \widehat{\mu}(\tilde{A}) = \mu(\tilde{A}),$$

és

$$\widehat{\mu}(B) = 0 \qquad (\widehat{\Omega} \ni B \subset \tilde{A} \setminus A).$$

A μ szigma-végessége miatt feltehető, hogy $\mu^*(A) < +\infty$ (a „technikát" illetően ld. 2.5.5. Tétel bizonyítása), ekkor

$$\mu^*(\tilde{A} \setminus A) = \widehat{\mu}(\tilde{A} \setminus A) = \widehat{\mu}(\tilde{A}) - \widehat{\mu}(A) = \mu(\tilde{A}) - \mu^*(A) = 0.$$

Vegyük most a mérhető fedést az $\tilde{A} \setminus A$ halmazra, azaz legyen $C \in \Omega$ olyan halmaz, amelyik lefedi az $\tilde{A} \setminus A$-t, $\mu^*(\tilde{A} \setminus A) = 0 = \mu(C)$. Ekkor

$$A = (\tilde{A} \setminus C) \cup (A \cap C).$$

Mivel $\tilde{A} \setminus C \in \Omega$, $A \cap C \subset C$, $\mu(C) = 0$, ezért $A \in \tilde{\Omega}$.

viii) Lássuk be, hogy az előző megjegyzés nem igaz, ha ott elhagyjuk a feltételek közül a „σ-véges" kikötést. Legyen ui. az X kontinuum számosságú halmaz, Ω az X azon A részhalmazainak a σ-algebrája, amelyekre vagy az A, vagy az $X \setminus A$ legfeljebb megszámlálható (ld. 2.4. ii) megjegyzés), az előbbi esetben $\mu(A)$ legyen az A elemeinek a száma, az utóbbiban pedig $\mu(A) := +\infty$. Az (X, Ω, μ) hármas egy mértéktér, a μ nem σ-véges, de nyilván teljes, azaz $\tilde{\Omega} = \Omega$. Könnyű meggyőződni arról, hogy $\mu^*(A) = +\infty$, ha az A nem véges, különben pedig $\mu^*(A)$ az A elemeinek a számával egyenlő $(A \in \mathcal{P}(X))$, ezért $\widehat{\Omega} = \mathcal{P}(X) \neq \tilde{\Omega}$.

ix) Az eddigi jelöléseket megtartva legyen valamilyen X halmaz mellett a $\mathcal{G}$ egy X-beli gyűrű, a $\tilde{\mu}$ kvázimérték a $\mathcal{G}$-n, a μ^* pedig a $\tilde{\mu}$ által a 2.5.1. Tétel bizonyításában indukált külső mérték. Jelöljük μ-vel a $\tilde{\mu}$ Carathèodory-féle kiterjesztését (ld. 2.5.2. Tétel), azaz az előbbi μ^* külső mértékből a 2.5.2. Tétel szerint kapott (X, Ω, μ)

mértékteret. Ekkor $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega$ és $\tilde{\mu} = \mu_{|\mathcal{G}}$. Nem nehéz megmutatni továbbá a következőt: a μ és a $\nu := \mu_{|\Omega(\mathcal{G})}$ leszűkítés által indukált külső mérték megegyezik a μ^*-gal: tetszőleges $A \subset X$ halmazra

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) : A_n \in \mathcal{G} \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} A_n\Big\} =$$

$$\inf\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \Omega \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} B_n\Big\} =$$

$$\inf\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) : C_n \in \Omega(\mathcal{G}) \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} C_n\Big\}.$$

Innen az is egyszerűen adódik, hogy ha a $\tilde{\mu}$ szigma-véges, akkor az (X, Ω, μ) mértéktér nem más, mint az $(X, \Omega(\mathcal{G}), \nu)$ teljessé tétele (ld. v) megjegyzés).

x) Kiindulva az X halmaz esetén egy, a $\mathcal{P}(X)$-en értelmezett μ^* külső mértékből, a 2.5.2. Tételben kapott μ mérték is indukál egy külső mértéket (ld. ix), ill. 2.5.1. Tétel bizonyítása), legyen ez μ^{**}. Eléggé nyilvánvaló, hogy $\mu^* \leq \mu^{**}$. A következő példa azt mutatja, hogy ebben a becslésben a $\neq$ is előfordulhat. Legyen ui. $X := \mathbf{R}$, X_0 az X legfeljebb megszámlálható számosságú részhalmazainak a halmaza, az X_1 pedig azon $A \subset X$ halmazoknak a rendszere, amelyek nem megszámlálhatóan végtelen halmazok, de egy alkalmas korlátos $I \subset X$ intervallummal az $A \setminus I$ halmaz legfeljebb megszámlálható. Ha

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & (A \in X_0) \\ 1 & (A \in X_1) \\ +\infty & (A \in (\mathcal{P}(X) \setminus (X_0 \cup X_1)), \end{cases}$$

akkor az így definiált μ^* nyilván külső mérték, az $A \in \Omega$ tartalmazás pedig akkor és csak akkor igaz, ha az A vagy az $X \setminus A$ legfeljebb megszámlálható részhalmaza az X-nek. Továbbá rövid számolás után az adódik, hogy $\mu^{**}(A) = 0$, ha az $A \in \mathcal{P}(X)$ legfeljebb megszámlálható, de minden más $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz esetén $\mu^{**}(A) = +\infty$.

xi) Az előző megjegyzésre utalva a μ^* külső mértéket *regulárisnak* nevezzük, ha $\mu^* = \mu^{**}$. Az eddigiek szerint (ld. ix)) tehát azt mondhatjuk, hogy egy gyűrűn értelmezett kvázimérték által indukált külső mérték reguláris. Például bármilyen X halmaz mellett a

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & (A = \emptyset) \\ 1 & (A \neq \emptyset) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

külső mérték könnyen láthatóan reguláris.

xii) Ha a μ^* a 2.5.1. Tétel bizonyításában a $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ kvázimértékből elkészített külső mérték, $\hat{\Omega}$ a μ^*-mérhető halmazok σ-algebrája, a $\mu = \mu^*_{|\Omega(\mathcal{G})}$, $\hat{\mu} = \mu^*_{|\hat{\Omega}}$ leszűkítések pedig az említett tétel szerinti kiterjesztései a $\tilde{\mu}$-nak, akkor egy $A \in \Omega(\mathcal{G})$ (vagy $A \in \hat{\Omega}$) halmaz esetén $\mu(A) = 0$ (vagy $\hat{\mu}(A) = 0$) a következőt jelenti: $\mu^*(A) = 0$, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok, amelyekkel

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Speciálisan tegyük fel, hogy a $\mathcal{G}$ gyűrűt egy $\mathcal{H}$ félgyűrű „generálja": $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{H})$. Ha az $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ szigma-additív halmazfüggvény eleget tesz a 2.3.1.6. Tételhez vezető feltételeknek, $\tilde{\mu}$ pedig az említett tételben szereplő kvázimérték, akkor a 2.1.4. Tételt is figyelembe véve a következőket mondhatjuk: ha $A \subset X$ és (ld. 2.5.1. Tétel bizonyítása) $\Sigma_A \neq \emptyset$, akkor

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} m(H_n) : H_n \in \mathcal{H} \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} H_n \Big\}.$$

Így pl. az $A \in \Omega(\mathcal{G})$ (vagy az $A \in \hat{\Omega}$) halmazra $\mu(A) = 0$ (vagy $\hat{\mu}(A) = 0$) azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén megadhatók a $H_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok úgy, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} m(H_n) < \varepsilon.$$

xiii) Kiindulva az (X, Ω, μ) mértéktérből legyen

$$\rho(A, B) := \mu\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \qquad (A, B \in \Omega).$$

Megmutatható, hogy ha Ω^o jelöli az Ω véges mértékű elemeinek a halmazát, akkor az Ω^o az előbbi ρ-val (azt az $\Omega^o \times \Omega^o$-ra leszűkítve) egy teljes félmetrikus tér. Ha a szóban forgó mértéktér egy X-beli $\mathcal{G}$ gyűrűn értelmezett kvázimérték segítségével a 2.5.1. Tételnek megfelelő módon jött létre, akkor tetszőleges véges mértékű $A \in \Omega(\mathcal{G})$ halmazhoz és minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $B \in \mathcal{G}$, hogy $\rho(A, B) < \varepsilon$. Ui. a ix) megjegyzést figyelembe véve

$$\mu(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{G} \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \Big\}.$$

Ezért tetszőleges $0 < \delta$-hoz van olyan $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat, amellyel $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, és (egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \mu(A) + \delta, \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta.$$

Legyen $B := \bigcup_{n=0}^{N} A_n$, ekkor $B \in \mathcal{G}$, és a nyilvánvaló $A \setminus B \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$, valamint a $B \setminus A \subset \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \setminus A$ tartalmazások miatt (ld. 2.3.1.3. Tétel, 2.4. vii) megjegyzés)

$$\mu(A \setminus B) \le \mu\Big(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta,$$

$$\mu(B \setminus A) \le \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) - \mu(A) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) < \delta.$$

Tehát $\rho(A, B) < 2 \cdot \delta$, azaz adott $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \varepsilon/2$-t választva a kívánt becslést kapjuk.

xiv) Az Olvasóra bízzuk annak a bizonyítását, hogy ha az $(X, \tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ mértéktér az $(X, \Omega(\mathcal{G}), \mu)$ teljessé tétele (ld. iv)), akkor az előbbi megjegyzésben „$A \in \Omega(\mathcal{G})$" helyett $A \in \tilde{\Omega}$ is írható.

xv) *Borel-Cantelli-lemma* néven ismert (pl. a valószínűségszámításban) az alábbi, két részből álló állítás. Legyen ehhez (X, Ω, μ) egy mértéktér, $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty \implies \mu(A) = 0.$$

Valóban, mivel minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $A \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, ezért (ld. 2.3.1.3. Tétel, 2.4. vii) megjegyzés)

$$\mu(A) \le \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Azt mondjuk továbbá, hogy a fenti A_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok *függetlenek*, ha bármilyen $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ véges halmaz esetén

$$\mu\Big(\bigcap_{k \in \mathcal{N}} A_k\Big) = \prod_{k \in \mathcal{N}} \mu(A_k).$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ekkor tetszőleges A_k $(k \in \mathbf{N})$ halmazt az $(X \setminus A_k)$ komplementerére kicserélve, az így kapott halmazok is függetlenek. Speciálisan, az $X \setminus A_k$ $(k \in \mathbf{N})$ halmazok is függetlenek.

Független halmazokra – az előbbi állítás mintegy ellenpontjaként – igaz a következő: ha $\mu(X) = 1$, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = +\infty,$$

akkor $\mu(A) = 1$. Ugyanis $\mu(A) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\mu(X \setminus A) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\Big) = 0,$$

ami nyilván következik a

$$\mu\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\Big) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

állításból. Ez utóbbi igazolásaként elegendő hivatkoznunk a minden $\mathbf{N} \ni m \geq n$ esetén fennálló

$$\mu\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\Big) \leq \mu\Big(\bigcap_{k=n}^{m} (X \setminus A_k)\Big) = \prod_{k=n}^{m} \Big(1 - \mu(A_k)\Big) <$$

$$< e^{-\sum_{k=n}^{m} \mu(A_k)} \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

becslésre.

xvi) A valószínűségszámítás nyelvén megfogalmazva tehát a Borel-Cantelli-lemma jelentése a következő: legyen $\mu(X) = 1$, azaz az (X, Ω, μ) egy *valószínűségi mértéktér* (vagy más néven *Kolmogorov-mező*), az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig független *események* sorozata. Az A_n esemény *bekövetkezésének a valószínűsége* a $\mu(A_n)$ nem-negatív szám. Ezzel a terminológiával élve a

$$\mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)$$

annak a valószínűsége, hogy az A_n-ek közül végtelen sok bekövetkezik. Ez a valószínűség tehát (ld. xv)) vagy nulla, vagy pedig egy, pontosan akkor, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ összeg véges vagy sem.

2.7. A Lebesgue-mérték

Ebben a pontban az eddig mondottakat alkalmazzuk a gyakorlat számára az egyik legfontosabb speciális esetben, amikor is valamilyen $1 \leq p \in \mathbf{N}$ „kitevővel" $X := \mathbf{R}^p$, a „kiindulási" gyűrű az $\mathbf{R}^p$-beli elemi halmazok gyűrűje, az utóbbin értelmezett kvázimérték pedig az intervallumok elemi mértékéből felépített Lebesgue-féle (ill. Lebesgue-Stieltjes-féle) kvázimérték (ld. 2.3.2., 2.3.3.). Speciális esetként tárgyaljuk az $\mathbf{R}^p$-beli euklideszi gömbök Lebesgue-mértékét, ill. az alkalmazások szempontjából fontos szerepet játszó ún. Vitali-féle kiválasztási lemmát.

2.7.1. A Lebesgue (-Stieltjes)-mérték értelmezése

Alkalmazzuk tehát az előző pontbeli kiterjesztési tételeket az ún. Borel-Lebesgue-féle mértékstruktúra felépítéséhez. Ehhez elöljáróban emlékeztetünk a 2.3.2. pontban mondottakra, nevezetesen legyen a továbbiakban az $1 \leq p \in \mathbf{N}$ „kitevő" rögzítve, és tekintsük az $\mathbf{R}^p$-beli $\mathbf{I}^p$ félgyűrűt (a p-dimenziós, balról zárt és jobbról nyílt intervallumok félgyűrűjét), valamint az általuk meghatározott $\mathcal{I}^p = \mathcal{G}(\mathbf{I}^p)$ gyűrűt (a p-dimenziós elemi halmazok gyűrűjét). Legyen továbbá

$$\Omega_p := \Omega(\mathcal{I}^p),$$

ekkor egyúttal (ld. 2.2. xxi) megjegyzés) $\Omega_p = \Omega(\mathbf{I}^p)$ is igaz. Ha most $\tilde{\mu}_p$ jelöli az $\mathcal{I}^p$-n értelmezett Lebesgue-féle kvázimértéket (ld. 2.3.2.1. Tétel), akkor (ld. 2.5.4. Tétel) a $\tilde{\mu}_p$ egyértelműen terjeszthető ki az Ω_p-re, legyen ez a kiterjesztés μ_p.

2.7.1.1. Definíció. Az Ω_p szigma-algebra elemeit $\mathbf{R}^p$-beli *Borel-halmazoknak* (vagy *Borel-mérhető halmazoknak*), a μ_p mértéket *Borel-Lebesgue-mértéknek* nevezzük. Egy $A \in \Omega_p$ halmaz esetén $\mu_p(A)$ az A ún. *Lebesgue-mértéke.*

Mivel a továbbiakban a Borel-halmazok központi szerepet játszanak majd a vizsgálódásainkban, ezért elöljáróban (a jobb megismerésük céljából is) azok egyfajta topologikus jellemzését adjuk meg. Ennek az érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{T}_p := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) : A \text{ nyílt}\},\ \mathcal{C}_p := \{B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) : B \text{ zárt}\},$$
$$\mathcal{K}_p := \{C \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) : C \text{ kompakt}\}.$$

(Az itt szereplő topológiai fogalmakat az $\mathbf{R}^p$ téren bevezetett $\|\cdot\|$ euklideszi norma értelmében alkalmazzuk.)

2.7.1.2. Tétel. *Tetszőleges $1 \leq p \in \mathbf{N}$ esetén a p-dimenziós Borel-halmazok Ω_p rendszerére az alábbi egyenlőségek állnak fenn:*

$$\Omega_p = \Omega(\mathcal{T}_p) = \Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{K}_p).$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{K}_p \subset \mathcal{C}_p \subset \Omega(\mathcal{C}_p)$, ezért $\Omega(\mathcal{K}_p) \subset \Omega(\mathcal{C}_p)$. Továbbá minden $A \in \mathcal{C}_p$ halmazhoz van olyan $A_n \in \mathcal{K}_p$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat, hogy $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. (Ilyen pl. az

$$A_n := \{x \in A : \|x\| \leq n\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat). Innen rögtön adódik az $A \in \Omega(\mathcal{K}_p)$, azaz a $\mathcal{C}_p \subset \Omega(\mathcal{K}_p)$, és ezért az $\Omega(\mathcal{C}_p) \subset \Omega(\mathcal{K}_p)$ tartalmazás. Ezzel beláttuk, hogy $\Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{K}_p)$.

A nyílt és a zárt halmazok jól ismert kapcsolata miatt tetszőleges $A \in \mathcal{T}_p$ halmaz esetén $\mathbf{R}^p \setminus A \in \mathcal{C}_p$, tehát $A \in \Omega(\mathcal{C}_p)$, más szóval $\mathcal{T}_p \subset \Omega(\mathcal{C}_p)$. Ezért $\Omega(\mathcal{T}_p) \subset \Omega(\mathcal{C}_p)$, továbbá hasonlóan: $\Omega(\mathcal{C}_p) \subset \Omega(\mathcal{T}_p)$, így $\Omega(\mathcal{T}_p) = \Omega(\mathcal{C}_p)$.

Azt kell már csupán belátnunk, hogy

$$\Omega(\mathcal{T}_p) = \Omega_p.$$

Legyen ehhez $[a,b) \in \mathbf{I}^p$ $(a,b \in \mathbf{R}^p,\ a<b)$, $a_n := a - \dfrac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ (az $a_n \in \mathbf{R}^p$ vektor minden koordinátájában elvégezve a kivonást), ekkor

$$[a,b) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (a_n, b) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^p : a_n < x < b\}$$

és $(a_n, b) \in \mathcal{T}_p$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt $[a,b) \in \Omega(\mathcal{T}_p)$, így $\mathbf{I}^p \subset \Omega(\mathcal{T}_p)$. Innen máris következik az, hogy $\Omega_p \subset \Omega(\mathcal{T}_p)$.

A „fordított" irányú tartalmazáshoz tekintsünk egy (a,b) $(a,b \in \mathbf{R}^p,\ a<b)$ nyílt intervallumot, és legyen (a fentiekhez hasonlóan) $a_n := a + \dfrac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel $a<b$, ezért egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel $a_n < b$ $(N \le n \in \mathbf{N})$, és

$$(a,b) = \bigcup_{n=N}^{\infty} [a_n, b),$$

amiből $(a,b) \in \Omega_p$ következik. Ismert továbbá, hogy minden $A \in \mathcal{T}_p$ halmaz előállítható

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

alakban alkalmas $I_n \subset \mathbf{R}^p$ $(n \in \mathbf{N})$ nyílt intervallumokkal, ezért az előbbieket is figyelembe véve $A \in \Omega_p$ adódik, tehát $\mathcal{T}_p \subset \Omega_p$. Ez viszont azt is jelenti egyúttal, hogy $\Omega(\mathcal{T}_p) \subset \Omega_p$. ■

A Borel-Lebesgue-mérték néhány fontos tulajdonságát tárgyaljuk a továbbiakban. Ehhez előzetesen szükségünk lesz egy-két általános érvényű megjegyzésre.

Tegyük fel, hogy adottak az (X_i, Θ_i) $(i=1,2)$ mérhető terek (ld. 2.5.), ahol $X_i \neq \emptyset$ $(i=1,2)$. Az $f : X_1 \to X_2$ leképezést *mérhetőnek* (bővebben (Θ_1, Θ_2)-mérhetőnek) nevezzük, ha bármilyen $B \in \Theta_2$ halmaznak az f által létesített $f^{-1}[B]$ ősképe a Θ_1-ben van: $f^{-1}[B] \in \Theta_1$. Nem nehéz megmutatni, hogy igaz a

2.7.1.3. Lemma. *Ha $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X_2)$ és $\Theta_2 = \Omega(\mathcal{X})$, akkor az f mérhetősége pontosan abban az esetben igaz, ha*

$$f^{-1}[A] \in \Theta_1 \qquad (A \in \mathcal{X}).$$

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló, az elégségesség igazolásához pedig tekintsük az alábbi halmazt:

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}(X_2) : f^{-1}[A] \in \Theta_1\}.$$

Könnyen belátható, hogy az Ω egy X_2-beli σ-algebra. Mivel $\mathcal{X} \subset \Omega$, ezért (a „legszűkebb" σ-algebra értelmezése miatt) $\Theta_2 = \Omega(\mathcal{X}) \subset \Omega$. Más szóval minden $B \in \Theta_2$ halmazra egyúttal $f^{-1}[B] \in \Theta_1$, ami az f mérhetőségét jelenti. ■

Ha például $1 \leq p, q \in \mathbf{N}$ és az $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ folytonos függvény, akkor az f leképezés (Ω_p, Ω_q)-mérhető. Ui. a 2.7.1.2. Tétel és a 2.7.1.3. Lemma alapján elegendő az f mérhetőségének a definíciójában $\mathbf{R}^q$-beli nyílt halmazokra szorítkoznunk. Ha viszont $A \in \mathcal{T}_q$, akkor a folytonos függvények jól ismert tulajdonsága alapján $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}_p$, így egyúttal $f^{-1}[A] \in \Omega_p$.

Ha $X_3 \neq \emptyset$ és az (X_3, Θ_3) is mérhető tér, az $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ függvények pedig mérhető leképezések, akkor a $g \circ f : X_1 \to X_3$ leképezés is mérhető.

Legyen az előbbi (X_i, Θ_i) $(i = 1, 2)$ mérhető terek mellett a $\nu_1 : \Theta_1 \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény mérték a Θ_1-en. Ekkor minden $f : X_1 \to X_2$ mérhető leképezés esetén az

$$f[\nu_1](A) := \nu_1(f^{-1}[A]) \qquad (A \in \Theta_2)$$

utasítással értelmezett függvény mérték a Θ_2-n (a ν_1 mértéknek az f által létesített *képe*).

Vizsgáljuk meg a most mondottakat az

$$X_i := \mathbf{R}^p \ , \quad \Theta_i := \Omega_p \quad (1 \leq p \in \mathbf{N},\, i = 1, 2)$$

esetben. Ha $a \in \mathbf{R}^p$ és

$$f_a(x) := x + a \qquad (x \in \mathbf{R}^p),$$

akkor az f_a függvény (folytonos lévén) mérhető. Legyen $\mu := f_a[\mu_p]$. Mivel az f_a bijekció és $f_a^{-1} = f_{-a}$, ezért bármilyen $[x, y) \in \mathbf{I}^p$ intervallumra

$$f_a^{-1}\Big[[x, y)\Big] = [x - a, y - a),$$

így

$$\mu([x, y)) = \mu_p([x - a, y - a)) = \mu_p([x, y)).$$

Ez tehát azt is jelenti (ld. 2.1.4. Tétel), hogy a μ és a μ_p mérték az $\mathcal{I}^p$ gyűrűn megegyezik. Viszont a μ_p szigma-véges is, ezért (ld. 2.5.4. Tétel) az említett két mérték egyenlő, azaz

$$\mu_p = f_a[\mu_p].$$

Az f_a leképezés (geometriai interpretációban) egy eltolás, ezért az előbbi egyenlőség alapján azt mondhatjuk, hogy a μ_p Borel-Lebesgue-mérték *eltolásinvariáns*: tetszőleges $A \in \Omega_p$ és $a \in \mathbf{R}^p$ esetén

$$a + A := \{a + x \in \mathbf{R}^p : x \in A\} = f_{-a}^{-1}[A] \in \Omega_p \quad \text{és} \quad \mu_p(a + A) = \mu_p(A).$$

Hasonlóan látható be az, hogy egyrészt minden $A \in \Omega_p$ és $0 < c \in \mathbf{R}$ esetén

$$cA := \{cx \in \mathbf{R}^p : x \in A\} \in \Omega_p \quad \text{és} \quad \mu_p(cA) = c^p \cdot \mu_p(A).$$

Másrészt a μ_p *tükrözésinvariáns* is, azaz tetszőleges $A \in \Omega_p$ halmazra

$$-A := \{-x \in \mathbf{R}^p : x \in A\} \in \Omega_p \quad \text{és} \quad \mu_p(-A) = \mu_p(A).$$

Ha tehát az előbbiekben szereplő $c \in \mathbf{R}$ szám negatív, azaz $c < 0$, akkor a szóban forgó $A \in \Omega_p$ halmazra

$$cA := \{cx \in \mathbf{R}^p : x \in A\} = -(-cA).$$

Mivel $-c > 0$, így az előbbiek szerint $-cA \in \Omega_p$, következésképpen a tükrözésinvariancia miatt $cA \in \Omega_p$ és

$$\mu_p(cA) = \mu_p(-cA) = |c|^p \cdot \mu_p(A).$$

Alkalmazzuk most a Carathèodory-tételt (ld. 2.5.2. Tétel) a $\tilde{\mu}_p$ $(1 \leq p \in \mathbf{N})$ Lebesgue-féle kvázimérték által indukált külső mértékre. Az így kapott

$$(\mathbf{R}^p, \hat{\Omega}_p, \hat{\mu}_p)$$

mértéktér nem más (ld. 2.5.6. Tétel, 2.6. v), vii), ix) megjegyzések), mint az $(\mathbf{R}^p, \Omega_p, \mu_p)$ teljessé tétele,

$$\Omega_p \subset \hat{\Omega}_p \quad \text{és} \quad \mu_p = \hat{\mu}_{p_{|\Omega_p}}.$$

Megmutatható, hogy a teljessé tétel során tényleges bővítés történik, nevezetesen, az Ω_p halmazrendszer kontinuum számosságú, míg a teljessé tett $\hat{\Omega}_p$ számossága ennél nagyobb (ld. 2.8. xvi) megjegyzés).

Ennek fényében vezessük be a következő definíciót.

2.7.1.4. Definíció. Az $\hat{\Omega}_p$ halmazrendszer elemeit $\mathbf{R}^p$-beli *Lebesgue-mérhető halmazoknak,* a $\hat{\mu}_p$ teljes mértéket *Lebesgue-mértéknek* nevezzük. Egy $A \in \hat{\Omega}_p$ halmaz esetén $\hat{\mu}_p(A)$ az A ún. *Lebesgue-mértéke.*

A 2.5.5. Tétel alapján azt kapjuk, hogy tetszőleges $A \in \hat{\Omega}_p$ Lebesgue-mérhető halmazhoz létezik olyan $\tilde{A} \in \Omega_p$ Borel-mérhető („fedő") halmaz, amelyre $A \subset \tilde{A}$, és

$$\mu_p(\tilde{A}) = \hat{\mu}_p(A) \ , \quad \mu_p(B) = 0 \quad (\Omega_p \ni B \subset \tilde{A} \setminus A) = 0.$$

Továbbá (ld. a 2.5.6. Tétel bizonyítását) $\tilde{A} \setminus A = X \cup Y$, ahol $X \cap Y = \emptyset$, és $X \in \Omega_p$, $Y \subset Z \in \Omega_p$, $\mu_p(Z) = 0$. Következésképpen $X \subset \tilde{A} \setminus A$ miatt $\mu_p(X) = 0$, és

$$\hat{\mu}_p(\tilde{A} \setminus A) = \hat{\mu}_p(X) + \hat{\mu}_p(Y) = \hat{\mu}_p(X) = \mu_p(X) = 0.$$

Hasonlóan, az $\hat{A}, B \in \Omega_p$ halmazok megválaszthatók úgy, hogy $\mu_p(B) = 0$, és egy alkalmas $N \subset B$, $\hat{A} \cap N = \emptyset$ részhalmazzal $A = \hat{A} \cup N$. Tehát az $\hat{A} \in \Omega_p$ halmazra $\hat{A} \subset A$, és

$$\mu_p(\hat{A}) = \hat{\mu}_p(A), \ \hat{\mu}_p(A \setminus \hat{A}) = 0.$$

A következő tételekben a μ_p, ill. a $\hat{\mu}_p$ $(1 \le p \in \mathbf{N})$ Borel-Lebesgue-, ill, Lebesgue-mérték „topologikus" jellemzését adjuk meg. Vezessük be ennek érdekében az alábbi jelölést: az $A \subset \mathbf{R}^p$ halmazra legyen

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu_p(B) : B \in \mathcal{C}_p,\ B \subset A\}.$$

A „$B \in \mathcal{C}_p$" feltétel helyett a $\mu_*(A)$ definíciójában nyugodtan lehet „$B \in \mathcal{K}_p$"-t is írni, azaz

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu_p(B) : B \in \mathcal{K}_p,\ B \subset A\}.$$

Ugyanis bármilyen $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ esetén a kompakt

$$K_n := \{x \in \mathbf{R}^p : \|x\| \le n\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazokkal $K_n \cap B$ $(n \in \mathbf{N})$ is kompakt, $K_n \cap B \subset K_{n+1} \cap B \subset A$ $(n \in \mathbf{N})$, és (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu_p(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_p(K_n \cap B).$$

Világos, hogy $A \in \Omega_p$ esetén minden $B \in \mathcal{C}_p$, $B \subset A$ halmazra $\mu_p(B) \le \mu_p(A)$, ezért $\mu_*(A) \le \mu_p(A)$. Továbbá, ha μ^* jelenti a Lebesgue-féle $\tilde{\mu}_p$ kvázimérték által indukált külső mértéket (ld. 2.5.1. Tétel bizonyítása), akkor könnyen adódik a

$$\mu_* \le \mu^*$$

egyenlőtlenség. Valóban, tetszőleges $A \subset \mathbf{R}^p$, $B \in \mathcal{C}_p$, $B \subset A$ halmazok és bármilyen $A_n \in \mathcal{I}^p$ $(n \in \mathbf{N})$, $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ halmazsorozat esetén (ld. 2.4. vii) megjegyzés)

$$\mu_p(B) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu_p(A_n).$$

Ezért

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu_p(B) : B \in \mathcal{C}_p,\ B \subset A\} \le$$

$$\inf\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_p(A_n) : A_n \in \mathcal{I}^p\ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big\} =$$

$$\inf\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_p(I_n) : I_n \in \mathbf{I}^p\ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\Big\} = \mu^*(A).$$

Az említett topologikus jellemzést először a μ^* külső mértékre bizonyítjuk be, nevezetesen igaz a

2.7.1.5. Tétel. *Tetszőleges* $A \subset \mathbf{R}^p$ *halmazra*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu_p(B) \in [0, +\infty] : B \in \mathcal{T}_p,\ A \subset B\}.$$

Bizonyítás. Mivel minden $B \in \mathcal{T}_p$ $(\subset \Omega_p)$, $A \subset B$ mellett a μ^* monotonitása miatt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \mu_p(B)$, ezért

$$\mu^*(A) \leq \inf\{\mu_p(B) \in [0, +\infty] : B \in \mathcal{T}_p,\ A \subset B\}.$$

Ha tehát $\mu^* A) = +\infty$, akkor a kívánt egyenlőség nyilván igaz, ezért feltehető a továbbiakban, hogy $\mu^*(A) < +\infty$. Legyen $\varepsilon > 0$, amikor is egy alkalmas $I_n \in \mathbf{I}^p$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_p(I_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Válasszuk most az $n \in \mathbf{N}$ indexekre a $J_n \subset \mathbf{R}^p$ nyílt intervallumokat úgy, hogy $I_n \subset J_n$, és

$$\mu_p(J_n) < \mu_p(I_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n-1}.$$

(A μ_p, ill. a $\tilde{\mu}_p$ értelmezését (ld. 2.3.2.) figyelembe véve ilyen J_n-ek valóban léteznek (ld. még 2.8. iv), v) megjegyzések).) Ha $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$, akkor $B \in \mathcal{T}_p$, $A \subset B$, és (ld. 2.4. vii) megjegyzés)

$$\mu_p(B) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_p(J_n) < \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért (tekintettel az infimum definíciójára) a tételben mondott egyenlőség valóban igaz. ■

2.7.1.6. Tétel. *Legyen adott egy tetszőleges* $A \subset \mathbf{R}^p$ *halmaz. Ekkor*

1° $A \in \hat{\Omega}_p$ *esetén* $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \hat{\mu}_p(A)$;

2° *ha* $\mu_*(A) = \mu^*(A) < +\infty$, *akkor* $A \in \hat{\Omega}_p$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az 1°-beli A halmaz korlátos. Ekkor nyilván megadható olyan $B \in \mathbf{I}^p$ intervallum, amelyik az A-t a belsejében $(B^\circ \in \mathcal{T}_p)$ tartalmazza: $A \subset B^\circ$. Így az előző tétel miatt

$$\hat{\mu}_p(B^\circ \setminus A) = \mu^*(B^\circ \setminus A) = \inf\{\mu_p(D) : D \in \mathcal{T}_p,\ B^\circ \setminus A \subset D\},$$

ahol (az előbbi szereplőkkel) nyilván

$$B^o \setminus A \subset D \cap B^o \in \mathcal{T}_p \ ,\ \ D \cap B^o \subset B^o,$$

és (ld. 2.3.1.3. Tétel) $\hat{\mu}_p(D \cap B^o) \leq \hat{\mu}_p(D)$. Ezért

$$\hat{\mu}_p(B^o \setminus A) = \inf\{\mu_p(D) : D \in \mathcal{T}_p,\ D \subset B^\circ,\ B^\circ \setminus A \subset D\} =$$

$$\inf\{\mu_p(B^\circ \setminus P) : P \in \mathcal{C}_p, P \subset A\}.$$

Az utolsó egyenlőséghez elég annyit megjegyeznünk, hogy $D \in \mathcal{T}_p,\ B^\circ \setminus A \subset D,\ D \subset B^\circ$ esetén $P := B^\circ \setminus D \in \mathcal{C}_p$, és $P \subset A$, valamint $Q \in \mathcal{C}_p,\ Q \subset A$ mellett az is igaz, hogy $D := B^\circ \setminus Q \in \mathcal{T}_p,\ B^\circ \setminus A \subset D$.

A fentiekből tehát azt kapjuk, hogy

$$\hat{\mu}_p(B^\circ \setminus A) = \hat{\mu}_p(B^\circ) - \mu_p(A) = \inf\{\hat{\mu}_p(B^\circ) - \hat{\mu}_p(P) : P \in \mathcal{C}_p,\ P \subset A\} =$$

$$\hat{\mu}_p(B^\circ) - \sup\{\hat{\mu}_p(P) : P \in \mathcal{C}_p,\ P \subset A\} = \hat{\mu}_p(B^\circ) - \mu_*(A),$$

ezért $\mu^*(A) = \hat{\mu}_p(A) = \mu_*(A)$.

Ha az A nem korlátos, akkor az $\mathbf{R}^p$-t felbontva megszámlálható sok, páronként diszjunkt $\mathbf{I}^p$-beli $B_n \quad (n \in \mathbf{N})$ halmaz egyesítésére, egyúttal az A-t is felbontottuk

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap B_n) =: \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

alakban, ahol minden $A_n \in \Omega_p$ halmaz korlátos, és $A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n, m \in \mathbf{N},\ n \neq m)$. Az előzőek szerint tehát $\mu_*(A_n) = \hat{\mu}_p(A_n) \quad (n \in \mathbf{N})$, így minden $n \in \mathbf{N}$ indexre (az $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ halmaz korlátos lévén)

$$\mu_*(A) = \mu_*\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) \geq \mu_*\Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big) = \hat{\mu}_p\Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \hat{\mu}_p(A_i),$$

amiből

$$\mu_*(A) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mu}_p(A_i) = \hat{\mu}_p(A)$$

is következik. Mivel $\mu_*(A) \leq \hat{\mu}_p(A)$, ezért $\mu_*(A) = \hat{\mu}_p(A)$.

Legyen most $A \subset \mathbf{R}^p$ olyan halmaz, hogy

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) < +\infty.$$

Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók a $P \in \mathcal{C}_p$ és $B \in \mathcal{T}_p$ halmazok úgy, hogy $P \subset A \subset B,\ \hat{\mu}_p(B \setminus P) < \varepsilon$ teljesül. Ha tehát $D \subset \mathbf{R}^p,\ \mu^*(D) < +\infty$, akkor

$$\mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A) \leq \mu^*(D \cap B) + \mu^*(D \setminus P) =$$

$$\Big[\mu^*(D \cap B) + \mu^*(D \setminus B)\Big] + \Big[\mu^*(D \setminus P) - \mu^*(D \setminus B)\Big].$$

A B halmaz $\mathcal{T}_p \subset \Omega_p$ alapján (ld. 2.7.2. Tétel) μ^*-mérhető (ld. 2.5.1. Tétel bizonyítása), ezért

$$\mu^*(D \cap B) + \mu^*(D \setminus B) \leq \mu^*(D).$$

Következésképpen

$$\mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A) \leq \mu^*(D) + \Big[\mu^*(D \setminus P) - \mu^*(D \setminus B)\Big],$$

és itt $\mu^*(D \setminus P) - \mu^*(D \setminus B) < \varepsilon$. Ui. $D \setminus P = (D \setminus B) \cup \Big((B \setminus P) \cap D\Big)$, amiből pedig azt kapjuk, hogy

$$\mu^*(D \setminus P) \leq \mu^*(D \setminus B) + \mu^*(B \setminus P) = \mu^*(D \setminus B) + \hat{\mu}_p(B \setminus P) < \mu^*(D \setminus B) + \varepsilon.$$

Így $\mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A) < \mu^*(D) + \varepsilon$. Mivel itt az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A).$$

Mindez azt jelenti, hogy az A halmaz μ^*-mérhető, tehát $A \in \hat{\Omega}_p$. ■

Ebben a pontban tárgyaljuk még röviden a Lebesgue-Stieltjes-mértéket (ld. 2.3.3. pont, ill. 2.4. xv) megjegyzés). Legyen ehhez $\Phi : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ a (2.3.3. pontban ($p = 1$), ill. a 2.4. xv) megjegyzésben csak $p = 2$-re megfogalmazott) feltételeknek eleget tevő függvény, $\tilde{\mu}_\Phi$ a Φ által meghatározott kvázimérték, μ^*_Φ pedig a $\tilde{\mu}_\Phi$-ből a 2.5.1. Tétel bizonyításában elkészített külső mérték. Alkalmazzuk a Carathèodory-tételt (ld. 2.5.2. Tétel) a μ^*_Φ-ra:

2.7.1.7. Definíció. A μ^*_Φ-mérhető $\mathbf{R}^p$-beli halmazok Ω_Φ rendszerét *Lebesgue-Stieltjes-mérhető halmazoknak,* a $\mu_\Phi := \mu_{\Phi^*_{|\Omega_\Phi}}$ mértéket *Lebesgue-Stieltjes-mértéknek* nevezzük. Egy $A \in \Omega_\Phi$ halmaz esetén $\mu_\Phi(A) := \mu^*_\Phi(A)$ az A halmaz *Lebesgue-Stieltjes-mértéke.*

A μ_Φ egy σ-véges teljes mérték. Nyilvánvaló, hogy $\Omega_p \subset \Omega_\Phi$. A

$$\Phi(x_1, ..., x_p) := \prod_{i=1}^{p} x_i \qquad \Big((x_1, ..., x_p) \in \mathbf{R}^p\Big)$$

esetben $\Omega_\Phi = \Omega_p$, $\mu_\Phi = \mu_p$.

Legyen $p = 1$ (azaz ekkor $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növő, minden pontban balról folytonos függvény). Tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett $\{\alpha\} \in \Omega_\Phi$, és (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu_\Phi(\{\alpha\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_\Phi([\alpha, \alpha + 1/n)) = \lim_{n\to\infty} \Big(\Phi(\alpha + 1/n) - \Phi(\alpha)\Big) = \Phi(\alpha + 0) - \Phi(\alpha).$$

Innen bármilyen α, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$ esetén az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\mu_\Phi([\alpha, \beta)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \ , \ \mu_\Phi((\alpha, \beta)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha + 0),$$

$$\mu_\Phi((\alpha,\beta]) = \Phi(\beta+0) - \Phi(\alpha+0) \ , \ \mu_\Phi([\alpha,\beta]) = \Phi(\beta+0) - \Phi(\alpha).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy – szemben a Lebesgue-mértékkel – az 1-elemű halmazok Lebesgue-Stieltjes-mértéke lehet 0-tól különböző is. Egy $a \in \mathbf{R}$ esetén ez az $\{a\}$ halmazra pontosan akkor igaz, ha a Φ függvénynek az a-ban szakadása van. Tehát $\mu_\Phi(\{a\}) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha a Φ folytonos az a-ban.

Hasonlóan számíthatók ki a végtelen intervallumok Lebesgue-Stieltjes-mértékei is.

Legyen most a $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tetszőleges monoton növekedő függvény, és

$$\Phi(x) := \Psi(x-0) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Nem nehéz megmutatni, hogy a Φ monoton növő, minden pontban balról folytonos, és $\Phi(x+0) = \Psi(x+0) \quad (x \in \mathbf{R})$. A

$$\mu_\Psi := \mu_\Phi$$

megállapodással ezért minden $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növekedő függvény esetén értelmezhető a Ψ által generált Lebesgue-Stieltjes-mérték.

Az előbbi egyenlőségek a következőképpen módosulnak: $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett

$$\mu_\Psi(\{\alpha\}) = \Psi(\alpha+0) - \Psi(\alpha-0),$$

valamint tetszőleges α, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$ esetén

$$\mu_\Psi([\alpha,\beta)) = \Psi(\beta-0) - \Psi(\alpha-0), \ \mu_\Psi((\alpha,\beta)) = \Psi(\beta-0) - \Psi(\alpha+0),$$

$$\mu_\Psi((\alpha,\beta]) = \Psi(\beta+0) - \Psi(\alpha+0), \ \mu_\Psi([\alpha,\beta]) = \Psi(\beta+0) - \Psi(\alpha-0).$$

2.7.2. Euklideszi gömbök Lebesgue-mértéke

Legyen továbbra is $1 \le p \in \mathbf{N}$, az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^p$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^p \setminus A) \end{cases}$$

az A karakterisztikus függvénye. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető,* ha a χ_A függvény Riemann-integrálható, és ekkor a

$$\nu_p(A) := \int_A \chi_A$$

nem-negatív szám (Riemann-integrál) az A halmaz *Jordan-mértéke.* Nyilvánvaló, hogy minden $I \subset \mathbf{R}^p$ intervallum Jordan-mérhető, és

$$\nu_p(I) = |I| := \mu_p(I),$$

valamint tetszőleges véges $A \subset \mathbf{R}^p$ halmaz is Jordan-mérhető, és $\nu_p(A) = 0$. Felidézve a Riemann-integrálhatóság, ill. a Riemann-integrál fogalmát, könnyen eljutunk a Jordan-mérhetőség és a Jordan-mérték „topologiai" jellemzéséhez. Legyen ui. $\mathcal{B}_A$ az összes olyan U halmaz alkotta halmazrendszer, ahol az U véges sok, páronként „lényegében diszjunkt" $J \subset A$ intervallumból áll, ahol az utóbbin azt értjük, hogy

$$(\operatorname{int} J) \cap (\operatorname{int} L) = \emptyset \qquad (J, L \in U, J \neq L).$$

Minden ilyen U esetén legyen

$$|U| := \sum_{J \in U} |J|,$$

és

$$\nu_*(A) := \sup\{|U| : U \in \mathcal{B}_A\}$$

az A halmaz ún. (Jordan-szerinti) *belső mértéke.* (Ha $\mathcal{B}_A = \emptyset$, akkor $\nu_*(A) := 0$).

Hasonlóan, legyen $\mathcal{K}_A$ az összes olyan V halmaz alkotta halmazrendszer, ahol a V halmaz véges sok $\mathbf{R}^p$-beli intervallum egyesítése, és $A \subset \bigcup_{K \in V}$. Ha $V \in \mathcal{K}_A$, akkor legyen

$$|V| := \sum_{K \in V} |K|,$$

és

$$\nu^*(A) := \inf\{|V| : V \in \mathcal{K}_A\}$$

az A halmaz ún. (Jordan-szerinti) *külső mértéke.* Világos, hogy általában minden korlátos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^p$ halmazra

$$0 \leq \nu_*(A) \leq \nu^*(A).$$

Továbbá egyszerűen belátható, hogy az A halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha $\nu_*(A) = \nu^*(A)$. Az utóbbi esetben

$$\nu_p(A) = \nu_*(A) \ (= \nu^*(A)).$$

Speciálisan $\nu^*(A) = 0$ esetén $\nu_*(A) = 0$, így ekkor az A Jordan-mérhető, és $\nu_p(A) = 0$. Mindez azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható véges sok $I_0, ..., I_m$ ($m \in \mathbf{N}$) intervallum $\mathbf{R}^p$-ben, amelyekre $A \subset \bigcup_{k=0}^m I_k$ és $\sum_{k=0}^m |I_k| < \varepsilon$. Így nyilvánvaló, hogy minden Jordan-szerint mérhető és nulla Jordan-mértékű halmaz Lebesgue-értelemben is nullamértékű halmaz. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy míg az előbbiekben véges sok I_k ($k = 0, ..., m$) intervallum szerepel, addig a Lebesgue-szerint 0-mértékű halmazok esetén megszámlálható sok (ld. 2.8. iii) megjegyzés).)

A Jordan-mérhetőség, ill. a Jordan-mérték karakterisztikus tulajdonsága a következő: ha valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett az $A_0, ..., A_k \subset \mathbf{R}^p$ halmazok valamennyien Jordan-mérhetők,

akkor az $A := \bigcup_{i=0}^{k} A_i$ halmaz is Jordan-mérhető. Ha még az A_i-k lényegében páronként diszjunktak, akkor

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu(A_i)$$

(azaz a Jordan-mérték additív). Jegyezzük meg, hogy ha $A \subset \mathbf{R}^p$ Jordan-mérhető, akkor a belseje, $\operatorname{int} A$ is az, és

$$\nu_p(\operatorname{int} A) = \nu_p(A).$$

A Jordan-mérhető A, B, $A_0, ..., A_k \subset \mathbf{R}^p$ $(k \in \mathbf{N})$ halmazok esetén az

$$A \setminus B, \ \bigcap_{i=0}^{k} A_i$$

halmazok is Jordan-mérhetők. Ha itt $A \subset B$, akkor

$$\nu_p(A) \le \nu_p(B), \ \nu_p(B \setminus A) = \nu_p(B) - \nu_p(A).$$

A 2.7.1.6. Tétel alapján (az ottani jelöléseket használva) világos, hogy akármilyen korlátos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^p$ halmazra

$$\nu_*(A) \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) \le \nu^*(A),$$

ezért, ha az A Jordan-mérhető, akkor $A \in \hat{\Omega}_p$ és $\nu_p(A) = \hat{\mu}_p(A)$. Ugyanakkor legyen pl. $p := 1$ és

$$A := [0,1] \cap \mathbf{Q},$$

ekkor nyilván $\nu_*(A) = 0$. Ha viszont az $I_0, ..., I_m$ $(m \in \mathbf{N})$ intervallumok lefedik az A-t, azaz $A \subset \bigcup_{k=0}^{m} I_k$, akkor könnyen láthatóan $\sum_{k=0}^{m} |I_k| \ge 1$. Következésképpen $\nu^*(A) = 1$, így az A nem Jordan-mérhető, de $A \in \hat{\Omega}_1$ (és $\hat{\mu}_1(A) = 0$).

Nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $1 \le p \in \mathbf{N}$ mellett minden $G \subset \mathbf{R}^p$ euklideszi gömb Jordan-mérhető, tehát egyúttal $G \in \hat{\Omega}_1$, és így

$$\hat{\mu}_p(G) = \int_G 1.$$

A $\hat{\mu}_p$ Lebesgue-mérték eltolás-invarianciájára (ld. 2.7.) tekintettel itt feltehető, hogy

$$G = K_r := \Big\{(x_1, ..., x_p) \in \mathbf{R}^p : \sum_{i=1}^{p} x_i^2 < r^2\Big\}$$

az $\mathbf{R}^p$-beli, origó középpontú, r-sugarú gömb, amikor is legyen

$$V_p(r) := \hat{\mu}_p(K_r) \qquad (r > 0).$$

Ekkor $V_1(r) = |[-r,r]| = 2r$ (a $[-r,r]$ intervallum hossza), továbbá $2 \le p \in \mathbf{N}$ esetén a szukcesszív integrálás elve, ill. helyettesítés alapján

$$V_p(r) = \int_{K_r} 1 = \int_{-r}^{r} \Big(\int_{\{x_1^2+\ldots+x_{p-1}^2 < r^2 - x_p^2\}} 1\, dx_1 \ldots dx_{p-1} \Big) dx_p =$$

$$\int_{-r}^{r} V_{p-1}\Big(\sqrt{r^2-t^2}\Big) dt = \int_{-r}^{r} V_{p-1}\Big(r\sqrt{1-(t/r)^2}\Big) dt =$$

$$2\cdot \int_0^r V_{p-1}\Big(r\sqrt{1-(t/r)^2}\Big) dt = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_{p-1}(r\cos z)\cos z\, dz,$$

azaz

$$(*) \qquad V_p(r) = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_{p-1}(r\cos z)\cos z\, dz.$$

Tehát az

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n z\, dz \qquad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel $V_1(r) = 2r$,

$$V_2(r) = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_1(r\cos z)\cos z\, dz = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} 2r\cos z\cos z\, dz =$$

$$4r^2\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = (2r)^2 I_2,$$

$$V_3(r) = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_2(r\cos z)\cos z\, dz =$$

$$2r\cdot \int_0^{\pi/2} 4r^2 I_2 \cos^2 z\cos z\, dz = 8r^3 I_2\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 z\, dz = (2r)^3 I_2 I_3,$$

$$V_4(r) = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_3(r\cos z)\cos z\, dz = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} 8r^3 I_2 I_3 \cos^3 z\cos z\, dz =$$

$$16r^4 I_2 I_3\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 z\, dz = (2r)^4 I_2 I_3 I_4.$$

Innen teljes indukcióval azonnal adódik az, hogy bármelyik $1 \le p \in \mathbf{N}$ mellett

$$V_p(r) = (2r)^p\cdot \prod_{n=1}^{p} I_n.$$

Ui. $V_1(r) = 2r = 2rI_1$, ha pedig az állítás valamilyen $1 \le p \in \mathbf{N}$ esetén igaz, akkor $(*)$ alapján

$$V_{p+1}(r) = 2r\cdot \int_0^{\pi/2} V_p(r\cos\, z)\cos\, z\, dz =$$

$$2r\cdot\prod_{n=1}^{p} I_n\cdot\int_0^{\pi/2}(2r\cos\,z)^p\cos\,z\,dz=$$

$$=(2r)^{p+1}\cdot\prod_{n=1}^{p} I_n\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^{p+1}z\,dz=(2r)^{p+1}\cdot\prod_{n=1}^{p+1} I_n.$$

Könnyű rekurzív összefüggést találni a fenti (I_n) sorozat tagjai között. Ui. $I_0=\pi/2$, $I_1=1$, és $2\le n\in\mathbf{N}$ esetén parciális integrálással

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n z\,dz=\int_0^{\pi/2}\cos\,z\cos^{n-1}z\,dz=$$

$$\Big[\sin\,z\cos^{n-1}z\Big]_0^{\pi/2}+(n-1)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 z\cos^{n-2}z\,dz=$$

$$=(n-1)\cdot\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 z)\cos^{n-2}z\,dz=(n-1)\cdot(I_{n-2}-I_n).$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$(**)\qquad I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}\qquad(2\le n\in\mathbf{N}).$$

A $(**)$ formula segítségével az alábbi rekurzív összefüggésre jutunk:

$$(***)\qquad V_p(r)=\frac{2r^2\pi}{p}\cdot V_{p-2}(r)\qquad(3\le p\in\mathbf{N}).$$

Valóban, a $(*)$ összefüggés miatt ez következik abból, hogy

$$(****)\qquad I_{p-1}I_p=\frac{\pi}{2p}\qquad(1\le p\in\mathbf{N}).$$

Ha itt $p=1$, akkor $I_0I_1=\pi/2$. Feltéve, hogy valamilyen $1\le n\in\mathbf{N}$ esetén a $(***)$ fennáll a $p=1,2,...,n$ indexekre, a $(**)$ alapján

$$I_nI_{n+1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot I_{n-2}I_{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2(n-1)}=\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Tehát a $(***)$ igaz $p=n+1$ esetén is, így teljes indukcióval okoskodva minden $1\le p$ indexre.

Világos, hogy ha egy (a_n) számsorozatra igaz a $(**)$-nak megfelelő rekurzió, és $a_0=I_0$, $a_1=I_1$, akkor $a_n=I_n$ $(n\in\mathbf{N})$. Ilyen (a_n) sorozatot az ún. *gamma-függvény* (ld. 2.8. xviii) megjegyzés) segítségével könnyen elő tudunk állítani (azaz, ki tudjuk számolni az I_n $(n\in\mathbf{N})$ integrálokat). Legyen tehát

$$\Gamma(x):=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt\qquad(0<x\in\mathbf{R}).$$

Jól ismert, hogy

(i) $0 < \Gamma(x) < +\infty \ \ (x > 0)$;

(ii) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \ \ (x > 0)$;

(iii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$;

(iv) $\Gamma(n+1) = n! \ \ (n \in \mathbf{N})$.

A most idézett formulák alapján minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1+2}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

és

$$\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Az előbbi két egyenlőséget elosztva egymással, majd egyelőre tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ együtthatót választva az

$$a_n := \alpha \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatra

$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \alpha \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n-1}{n} \cdot a_{n-2} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N})$$

adódik. Az így definiált (a_n) sorozat tehát kielégíti az előbb említett $(**)$-nak megfelelő rekurziót. Válasszuk az α együtthatót úgy, hogy $a_0 = I_0$, $a_1 = I_1$ is igaz legyen:

$$I_0 = \frac{\pi}{2} = a_0 = \alpha \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \alpha \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \sqrt{\pi},$$

azaz $\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ezzel az α-val az $a_1 = I_1$ egyenlőség is fennáll:

$$a_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 = I_1.$$

Az előzetes megjegyzéseink alapján ezért az alábbi állítást láttuk be: tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n z \, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

A most kapott integrálok sorozatáról nem nehéz megmutatni, hogy az (I_n) sorozat nullasorozat. Legyen ui. valamilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$q_\varepsilon := \max\{\cos x \in \mathbf{R} : \varepsilon \le x \le \pi/2\} = \cos \varepsilon.$$

Nyilván $0 < q_\varepsilon < 1$, így $\lim_{n\to\infty} q_\varepsilon^n = 0$. Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x\, dx + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n x\, dx < \varepsilon + \frac{\pi}{2}\cdot q_\varepsilon^n.$$

Alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex mellett $q_\varepsilon^n \cdot \pi/2 < \varepsilon$, hacsak $N < n \in \mathbf{N}$, ezért az ilyen n-ekre $I_n < 2\varepsilon$. Ez éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

Az előbbi megjegyzésekre utalva tehát

$$V_p(r) = (2r)^p \cdot \prod_{n=1}^{p} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \right) = \frac{\left(r\cdot\sqrt{\pi}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} \qquad (1 \le p \in \mathbf{N},\ r > 0).$$

Más szóval igaz a következő

2.7.2.1. Tétel. *Bármilyen* $1 \le p \in \mathbf{N}$, $r > 0$ *mellett*

$$V_p(r) = \frac{(r\cdot\sqrt{\pi})^p}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}.$$

A fenti $(***)$ összefüggést rekurzív módon alkalmazva könnyen adódik a $V_p(r)$-re egy (a p-vel kifejezett) explicit formula. Legyen ehhez először a $4 \le p \in \mathbf{N}$ „kitevő" páros, azaz valamilyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ esetén $p = 2n$. Ekkor

$$V_p(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{2n}\cdot V_{2n-2}(r) = \frac{r^2\cdot\pi}{n}\cdot\frac{r^2\cdot\pi}{n-1}\cdot V_{2n-4}(r) = \ldots =$$

$$\frac{r^2\cdot\pi}{n}\cdot\frac{r^2\cdot\pi}{n-1}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{r^2\cdot\pi}{2}\cdot V_2(r) = \frac{(r^2\cdot\pi)^n}{n!} = \frac{r^{2n}\cdot\pi^n}{n!}.$$

Ha viszont $p = 2n+1$ valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$ mellett, akkor

$$V_p(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{2n+1}\cdot V_{2n-1}(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{2n+1}\cdot\frac{2r^2\pi}{2n-1}\cdot V_{2n-3}(r) = \ \ldots\ =$$

$$\frac{2r^2\cdot\pi}{2n+1}\cdot\frac{2r^2\cdot\pi}{2n-1}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2r^2\cdot\pi}{3}\cdot V_1(r) = \frac{(2r^2\cdot\pi)^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(2n+1-2k)}\cdot 2r = \frac{2^{n+1}\cdot r^{2n+1}\cdot\pi^n}{(2n+1)!!}.$$

Tehát (ami teljes indukcióval aztán egyszerűen belátható) fennáll a

2.7.2.2. Tétel. *Bármilyen* $1 \le p \in \mathbf{N}$ *esetén*

$$V_p(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{p/2}}{(p/2)!} \cdot r^p & \text{(ha a } p \text{ páros)} \\ \\ \dfrac{2(2\pi)^{(p-1)/2}}{p!!} \cdot r^p & \text{(ha a } p \text{ páratlan)} \end{cases} \qquad (1 \le p \in \mathbf{N}).$$

2.7.3. Vitali-lemma

Az alábbiakban a matematika különböző területein fontos szerepet játszó, „kiválasztási" jelzővel illetett számos állítás közül egyet idézünk, ami a mértékelméletben tölt be kulcsszerepet. Ez az állítás egyúttal a Lebesgue-mérték tulajdonságaira is rávilágít azzal, hogy euklideszi gömbök egyesítéseként előálló halmaz mértéke mindig „összemérhető" a szóban forgó gömbök közül alkalmasan kiválasztott véges sok, páronként diszjunkt gömb együttes mértékével.

2.7.3.1. Tétel (Vitali-lemma)*Legyen a* $\mathcal{J} \neq \emptyset$ *egy tetszőleges (index)halmaz, és tegyük fel, hogy adottak az*

$$U_j := K_{r_j}(x_j) = \{\xi \in \mathbf{R}^p : \|\xi - x_j\|_2 < r_j\} \qquad (j \in \mathcal{J})$$

euklideszi-gömbök az $\mathbf{R}^p$*-ben* $(1 \le p \in \mathbf{N})$ *(bármilyen* $x_j \in \mathbf{R}^p$, $0 < r_j \in \mathbf{R}$ $(j \in \mathcal{J})$ *választással). Tekintsük az*

$$U := \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j \in \mathcal{T}_p$$

halmazt. Ekkor tetszőleges $c \in \mathbf{R}$, $c < \mu_p(U)$ *számhoz van olyan véges* $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ *halmaz, amellyel az alábbiak igazak*:

$$U_j \cap U_k = \emptyset \quad (j, k \in \mathcal{J}_0, j \neq k) \quad \text{és} \quad \textstyle\sum_{j \in \mathcal{J}_0} \mu_p(U_j) > c \cdot 3^{-p}.$$

Bizonyítás. Ui. a μ_p mérték regularitása (ld. 2.7.1.5., 2.7.1.6. Tételek, ill. 2.8. xiii)-xv) megjegyzések) miatt minden $c < \mu_p(U)$ számhoz van olyan $K \subset U$ kompakt halmaz, hogy $\mu_p(U) \ge \mu_p(K) > c$. Mivel az $\{U_j : j \in \mathcal{J}\}$ halmazrendszer egyúttal egy nyílt lefedése a K-nak, ezért létezik olyan véges $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ halmaz, amellyel $K \subset \bigcup_{j \in \mathcal{J}_1} U_j$. Legyen a $j_1 \in \mathcal{J}_1$ olyan index, amelyre

$$r_{j_1} = \max\{r_j : j \in \mathcal{J}_1\}.$$

Ha

$$\mathcal{J}_2 := \{j \in \mathcal{J}_1 : U_j \cap U_{j_1} = \emptyset\},$$

és ($\mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_2 \neq \emptyset$ esetén) $j \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_2$ (tehát $U_j \cap U_{j_1} \neq \emptyset$), akkor egyszerű geometriai megfontolás alapján nyilván igaz, hogy

$$U_j \subset K_{3r_{j_1}}(x_{j_1}) =: \tilde{U}_{j_1}.$$

Ezért

$$K \subset \tilde{U}_{j_1} \bigcup \Big(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_2} U_j \Big).$$

Ha itt $\mathcal{J}_2 \neq \emptyset$, akkor legyen a $j_2 \in \mathcal{J}_2$ olyan, hogy

$$r_{j_2} = \max\{r_j : j \in \mathcal{J}_2\},$$

és

$$\mathcal{J}_3 := \{j \in \mathcal{J}_2 : U_j \cap U_{j_2} = \emptyset\}.$$

Mivel (az előbbiekhez hasonlóan)

$$K \subset \tilde{U}_{j_1} \bigcup \tilde{U}_{j_2} \bigcup \Big(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_3} U_j \Big)$$

(ahol értelemszerűen $\tilde{U}_{j_2} := K_{3r_{j_2}}(x_{j_2})$), ezért a fenti eljárást folytatva véges sok lépés után kapunk egy $n \in \mathbf{N}$ természetes számot úgy, hogy alkalmas $j_1, ..., j_n \in \mathcal{J}$ indexekkel $K \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{U}_{j_i}$. Innen (ld. vi) és 2.3.1.3. Tétel)

$$c < \mu_p(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu_p(\tilde{U}_{j_i}) = 3^p \cdot \sum_{i=1}^n \mu_p(U_{j_i}).$$

A konstrukcióból következően $U_{j_i} \cap U_{j_l} = \emptyset \quad (i \neq l = 1, ..., n)$, így a $\mathcal{J}_0 := \{j_1, ..., j_n\}$ választás eleget tesz a Vitali-lemma kívánalmainak. ■

2.8. Megjegyzések

i) Ha $Y \in \Omega_p$, akkor

$$\{A \in \mathcal{P}(Y) : A \in \Omega_p\}$$

is σ-algebra (az Ω_p nyoma az Y-ban (ld. 2.2. iv) megjegyzés), a μ_p erre való leszűkítése az „Y halmazon értelmezett Borel-Lebesgue-mérték".

ii) Bármilyen korlátos $A \in \Omega_p$ halmazra $\mu_p(A) < +\infty$. A korlátosság miatt ui. van olyan $I \in \mathbf{I}^p$ intervallum, amelyikre $A \subset I$, ezért (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu_p(A) \leq \mu_p(I) < +\infty.$$

iii) Alkalmazzuk a 2.5.1. Tétel bizonyításában mondottakat a $\tilde{\mu}_p$-ra (ld. 2.6. xii) megjegyzés). Mivel $\mathbf{R}^p$ nyilván előállítható megszámlálható sok $\mathcal{I}^p$-beli (sőt, $\mathbf{I}^p$-beli) halmaz egyesítéseként, ezért (az említett tétel bizonyításában alkalmazott jelölésekkel) minden $A \subset \mathbf{R}^p$ esetén $\Sigma_A \neq \emptyset$. Következésképpen a Lebesgue-féle $\tilde{\mu}_p$ kvázimérték által generált μ^* külső mértékre

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_p(A_n) \in [0, +\infty] : A_n \in \mathcal{I}^p \ \ (n \in \mathbf{N}),\ A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \Big\}.$$

Ha tehát $A \in \Omega_p$ (vagy $A \in \hat{\Omega}_p$), akkor $\mu^*(A) = \mu_p(A)$ (vagy $\mu^*(A) = \hat{\mu}_p(A)$) miatt az A halmaz Borel-Lebesgue- (vagy Lebesgue-)mértéke az A-t lefedő, legfeljebb megszámlálható sok $\mathbf{R}^p$-beli elemi halmaz mértékösszegeinek az alsó határa. Tudjuk (ld. 2.1.4. Tétel), hogy minden elemi halmaz véges sok $\mathbf{I}^p$-beli intervallum egyesítése, ezért (ld. 2.6. xii) megjegyzés) az előbbiekben „elemi halmaz" helyett $\mathbf{I}^p$-beli „intervallum" is írható. Így pl., ha az $A \in \Omega_p$ (vagy $A \in \hat{\Omega}_p$) Borel-(vagy Lebesgue-mérhető) halmazra $\mu_p(A) = \mu^*(A) < +\infty$ (vagy $\hat{\mu}_p(A) = \mu^*(A) < +\infty$), akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $I_n \in \mathbf{I}^p$ $(n \in \mathbf{N})$ intervallumrendszerrel

$$A \subset \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \ \text{ és } \ \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \mu_p(A) + \varepsilon$$

(ahol most $|I|$ jelöli az $I \in \mathbf{I}^p$ intervallum Borel-Lebesgue-mértékét: $|I| := \tilde{\mu}_p(I)$.) Speciálisan a $\mu_p(A) = 0$ (vagy $\hat{\mu}_p(A) = 0$) egyenlőség azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $I_n \in \mathbf{I}^p$ $(n \in \mathbf{N})$ intervallumok, hogy

$$A \subset \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \ \text{ és } \ \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$$

(ld. 1.2.1.).

iv) Könnyű belátni, hogy minden $\mathbf{R}^p$-beli, legfeljebb megszámlálható A halmazra $A \in \Omega_p$ és $\mu_p(A) = 0$ igaz. Ha ui. $A = \{a\}$ egy-elemű, akkor $A \in \mathcal{C}_p$ miatt (ld. 2.7.1.2. Tétel) $A \in \Omega_p$, és

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a - 1/n, a + 1/n),$$

ahol $I_n := [a - 1/n, a + 1/n) \in \mathbf{I}^p \subset \Omega_p$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$. Ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu_p(A) = \lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} (2^p \cdot n^{-p}) = 0.$$

Innen a μ_p szigma-additivitása alapján ugyanez minden legfeljebb megszámlálható A halmazra is adódik.

v) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}^p$, $a < b$ esetén az

$$[a, b) := \{x \in \mathbf{R}^p : a \leq x < b\},\ (a, b) := \{x \in \mathbf{R}^p : a < x < b\},$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbf{R}^p : a < x \leq b\} \quad , \quad [a,b] := \{x \in \mathbf{R}^p : a \leq x \leq b\}$$

intervallumok valamennyien Borel-halmazok (azaz Ω_p-beliek), és

$$\mu_p([a,b)) = \mu_p((a,b)) = \mu_p((a,b]) = \mu_p([a,b]).$$

Az $[a,b) \in \Omega_p$ tartalmazás $[a,b) \in \mathbf{I}^p \subset \Omega_p$ miatt nem kíván már indoklást. Egyébként nyilván elegendő azt megmutatni, hogy ha $a \in \mathbf{R}$ és $k = 1, ..., n$ esetén

$$I_k := \{a\},\ I_j \in \mathbf{I}^p \qquad (k \neq j = 1, ..., p),$$

akkor az $I := I_1 \times \ldots \times I_p$ halmaz Ω_p-beli, és $\mu_p(I) = 0$. Valóban, az

$$A_n := I_1 \times \ldots \times I_{k-1} \times [a, a + 1/n) \times I_{k+1} \times \ldots \times I_p \in \Omega_p \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazokkal $I = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega_p$, és (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu_p(I) = \lim_{n\to\infty} \mu_p(A_n) = \prod_{k\neq j=1}^{p} |I_j| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Világos, hogy pl. alkalmasan választott ilyen „szerkezetű" $I \subset [a,b)$ halmazzal („felülettel") $(a,b) = [a,b) \setminus I$. Ezért (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu_p((a,b)) = \mu_p([a,b)) - \mu_p(I) = \mu_p([a,b)).$$

Ha pl. $p = 1$, akkor a jelen esetben $I = \{a\}$.

vi) A Borel-Lebesgue-mértéknek a 2.7. pontban vizsgált eltolás- és tükrözés-invarianciáján túl a μ_p $(1 \leq p \in \mathbf{N})$ mérték sokkal általánosabb invariancia-tulajdonságokkal is rendelkezik. Megmutatható pl., hogy ha a $T : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezés (ami tehát azonosítható egy nem szinguláris $\mathbf{R}^{p\times p}$-beli – ugyancsak T-vel jelölt – mátrixszal), akkor tetszőleges $A \in \Omega_p$ esetén $T[A] \in \Omega_p$, és

$$\mu_p(T[A]) = |\det T| \cdot \mu_p(A).$$

vii) Részben a vi)-ban mondottak következményeként látható be, hogy ha az $U : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ leképezés egy ortogonális transzformáció, az $E : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ pedig egy eltolás, akkor a μ_p mérték az $U \circ E$ operátorral („mozgatással") szemben is invariáns, azaz bármelyik $A \in \Omega_p$ halmazra $(U \circ E)[A] \in \Omega_p$, és

$$\mu_p((U \circ E)[A]) = \mu_p(A).$$

viii) Az előbbi megjegyzések hátterében a következő állítás húzódik meg: legyen adott az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^p$ nyílt halmazon a $\Phi : X \to \mathbf{R}^p$ folytonosan differenciálható („sima") leképezés. Ekkor tetszőlegesen választott $\Omega_p \ni A \subset X$ halmazra $\Phi[A] \in \Omega_p$.

ix) (Példa nem mérhető halmazra.) Megmutatjuk, hogy $\Omega_1 \neq \mathcal{P}(\mathbf{R})$. Legyen ui. két $x, y \in \mathbf{R}$ szám „ekvivalens", ha $x - y$ racionális ($x - y \in \mathbf{Q}$). Az így értelmezett (nyilván) ekvivalencia-reláció alapján az $\mathbf{R}$ felbomlik páronként diszjunkt

$$A := x + \mathbf{Q} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

alakú ekvivalencia-osztályok egyesítésére. Mivel $x - [x] \in A \cap [0,1)$ ($[x]$ jelenti az x szám egész-részét), ezért minden ekvivalencia-osztály tartalmaz $[0,1)$-beli elemet. A kiválasztási axióma alapján tehát van olyan $K \subset [0,1)$ halmaz, amelyik minden ekvivalencia-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz, és más elemei nincsenek. Könnyen belátható , hogy

- az $y + K \quad (y \in \mathbf{Q})$ halmazok páronként diszjunktak;
- $\mathbf{R} = \bigcup_{y \in \mathbf{Q}} (y + K)$.

Ha ui. $y, z \in \mathbf{Q}$, $y \neq z$ esetén $(y + K) \cap (z + K) \neq \emptyset$ teljesülne, akkor tetszőleges $x \in (y + K) \cap (z + K)$ választással alkalmas $u, v \in K$ elemekkel $x = y + u = z + v$. Eért $u - v = z - y \in \mathbf{Q}$, más szóval az u ekvivalens a v-vel. A K definíciója miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $u = v$, amiből $y = z$ következne. Ez viszont nem igaz, ezért ilyen x szám sem létezhet: $(y + K) \cap (z + K) = \emptyset$.

Legyen most $\xi \in \mathbf{R}$, ekkor (a ξ által meghatározott ekvivalencia-osztályból) van olyan $k \in K$ elem, amelyik ekvivalens a ξ-vel: $y := \xi - k \in \mathbf{Q}$. Következésképpen $\xi = y + k \in y + K$.

Lássuk most be, hogy a K halmaz nem Borel-mérhető. Ha ui. az lenne, akkor a μ_1 mérték eltolás-invarianciája miatt (ld. 2.7.)

$$+\infty = \mu_1(\mathbf{R}) = \sum_{y \in \mathbf{Q}} \mu_1(y + K) = \sum_{y \in \mathbf{Q}} \mu_1(K),$$

amiből $\mu_1(K) \neq 0$ adódna. Ugyanakkor

$$Y := \bigcup_{y \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} (y + K) \subset [0, 2),$$

így

$$\mu_1(Y) = \sum_{y \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} \mu_1(y + K) = \sum_{y \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} \mu_1(K) \leq \mu_1[0, 2)) = 2,$$

ami pedig csak $\mu_1(K) = 0$ esetén lenne lehetséges. Tehát a K halmaz valóban nem Borel-mérhető.

Innen már nem nehéz megmutatni azt is, hogy $K \notin \hat{\Omega}_1$. Ehhez annyit kell csak észrevenni (ld. 2.5.6. Tétel bizonyítása), hogy $K \in \hat{\Omega}_1$ esetén alkalmas $A, B \in \Omega_1$ Borel-mérhető halmazokkal $\mu_1(B) = 0$, és valamilyen $N \subset B, A \cap N = \emptyset$ mellett

$$K = A \cup N \ , \ \hat{\mu}_1(K) = \mu_1(A).$$

Továbbá minden y valós számra

$$y + K = (y + A) \cup (y + N),$$

és $y + N \subset y + B$. Mivel mind az $y + A$, mind pedig az $y + B$ Borel-mérhető halmaz és $\mu_1(y + B) = \mu_1(B) = 0$, ezért $y + K \in \hat{\Omega}_1$, és

$$\hat{\mu}_1(y + K) = \mu_1(y + A) = \mu_1(A) = \hat{\mu}_1(K).$$

Innen tehát a bizonyítás ugyanúgy folytatható, mint az előbb.

A most mondottak alapján az Olvasóra bízzuk annak a belátását, hogy tetszőleges $A \in \hat{\Omega}_1$, $\hat{\mu}_1(A) > 0$ esetén van olyan $B \subset A$, amelyikre $B \notin \hat{\Omega}_1$ teljesül.

x) Jegyezzük meg, hogy a 2.7.1.6. Tétel 2° állítása nem igaz, ha $\mu_*(A) = \mu^*(A) = +\infty$. Valóban, ha pl. a K az előbbi megjegyzésben szereplő nem $\hat{\Omega}_1$-beli halmaz, akkor az $A := K \cup [2, +\infty)$ halmazra nyilván igaz az előbbi $\mu_*(A) = \mu^*(A) = +\infty$ feltételezés, de $A \notin \hat{\Omega}_1$, különben $[2, +\infty) \in \hat{\Omega}_1$ miatt a $K = A \setminus [2, +\infty)$ halmaz is Lebesgue-mérhető lenne.

xi) Tegyük fel, hogy az $A \in \hat{\Omega}_p$ halmaz korlátos. Ekkor a 2.7.1.6. Tétel szerint minden $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett van olyan $K_n \in \mathcal{K}_p$ halmaz, hogy $K_n \subset A$, és $\hat{\mu}_p(A \setminus K_n) < 1/n$. Az

$$A_n := \bigcup_{j=1}^{n} K_j \in \mathcal{K}_p \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

halmazokra nyilván $A_n \subset A_{n+1} \subset A \quad (n \in \mathbf{N})$, és

$$\hat{\Omega}_p \ni B := A \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) \subset A \setminus A_n \subset A \setminus K_n$$

miatt $\hat{\mu}_p(B) < 1/n \ \ (0 < n \in \mathbf{N})$. Tehát $\hat{\mu}_p(B) = 0$, így az

$$A = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \bigcup B$$

előállítást kaptuk kompakt halmazoknak egy monoton növekedő (A_n) sorozata és egy 0-(Lebesgue-)mértékű B halmaz segítségével.

Könnyű meggondolni, hogy ugyanez a konklúzió az A-ra tett korlátossági feltétel nélkül is igaz. Analóg módon kapjuk továbbá, hogy tetszőleges $A \in \hat{\Omega}_p$ halmazhoz létezik nyílt halmazoknak egy olyan monoton fogyó (C_n) sorozata (amikor is tehát $C_n \supset C_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$) és egy olyan $D \in \hat{\Omega}_p$, $\hat{\mu}_p(D) = 0$ halmaz, hogy

$$A = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \Big) \setminus D.$$

(Ha $\hat{\mu}_p(A) < +\infty$, akkor $\mu_p(C_n) < +\infty$ is feltehető minden $\mathbf{N} \ni n$-re.)

xii) A 2.7.1.5., 2.7.1.6. Tételeket figyelembe véve egy $A \subset \mathbf{R}^p$ halmaz esetén az alábbi ekvivalencia igaz: az $A \in \hat{\Omega}_p$ és $\hat{\mu}_p(A) = 0$ kijelentés akkor és csak akkor igaz, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $T \in \mathcal{T}_p$ nyílt halmaz, amelyre

$$A \subset T \quad \text{és} \quad \mu_p(T) < \varepsilon$$

teljesül.

xiii) Az előbbi megjegyzésben is idézett 2.7.1.5., 2.7.1.6. Tételek mögött az alábbi, általánosabb vonatkozású meggondolások húzódnak meg.

Tekintsük a $\mu : \Omega_p \to [0, +\infty]$ $(1 \leq p \in \mathbf{N})$ mértéket, amelyikről feltesszük, hogy tetszőleges kompakt $K \in \mathcal{K}_p$ halmaz esetén $\mu(K) < +\infty$. Ekkor azt mondjuk, hogy a μ egy *Borel-mérték.* Így pl. a μ_p mérték Borel-mérték.

Legyen ekkor a $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) \to [0, +\infty]$ a következő leképezés:

$$\mu^*(A) := \inf \{\mu(G) : G \in \mathcal{T}_p, A \subset G\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p)).$$

Nem nehéz belátni, hogy a μ^* külső mérték. Az is eléggé nyilvánvaló, hogy bármilyen $A \in \mathcal{T}_p$ halmazra $\mu^*(A) = \mu(A)$. Jelöljük Ω-val a μ^*-mérhető $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p)$ halmazok halmazrendszerét, azaz (ld. 2.5.1. Tétel bizonyítása) $A \in \Omega$ akkor és csak akkor igaz, ha

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \qquad (B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p)).$$

Legyen továbbá a $\hat{\mu} : \Omega \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény a μ^* leszűkítése az Ω-ra. Ekkor a Caratheodory-tétel (ld. 2.5.2. Tétel) miatt az Ω szigma-algebra, a $\hat{\mu}$ pedig (teljes) mérték.

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}_p \subset \Omega$. Ehhez elég belátni azt, hogy

$$(*) \qquad \mu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \qquad (A, B \in \mathcal{T}_p,\ \mu(A) < +\infty).$$

Valóban, feltételezve, hogy a $(*)$-ban mondottak igazak, legyen $B \in \mathcal{T}_p$, és bizonyítsuk be azt, hogy $B \in \Omega$, azaz

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B) \qquad (T \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p)).$$

Ehhez nyilván feltehető, hogy $\mu^*(T) < +\infty$. Ekkor viszont tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \in \mathcal{T}_p$, hogy $T \subset G$ és $\mu(G) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Ezért (a $(*)$ feltételt a G halmazra alkalmazva)

$$\mu^*(T) + \varepsilon > \mu(G \cap B) + \mu^*(G \setminus B) =$$

$$\mu^*(G \cap B) + \mu^*(G \setminus B) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B).$$

(Felhasználtuk, hogy $T \cap B \subset G \cap B$ és $T \setminus B \subset G \setminus B$, valamint azt, hogy a μ^* monoton.) Mivel itt az $\varepsilon > 0$ szám tetszőleges volt, ezért a

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B)$$

becslésnek is teljesülnie kell, azaz a B valóban μ^*-mérhető.

Most lássuk be azt, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség igaz. Vegyünk ehhez (könnyen beláthatóan létező) kompakt

$$K_n \subset \mathbf{R}^p,\ K_n \subset K_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazokat úgy, hogy a $(*)$-beli B halmazra $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Ekkor (mivel a μ mérték) minden $A \in \mathcal{T}_p$, $\mu(A) < +\infty$ mellett

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B) + \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty}(A \setminus K_n)\Big).$$

Vegyük figyelembe, hogy $\mu(A \setminus K_n) \leq \mu(A) < +\infty$ és $A \setminus K_{n+1} \subset A \setminus K_n \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty}(A \setminus K_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus K_n),$$

tehát

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus K_n) =$$
$$\mu(A \cap B) + \lim_{n\to\infty} \mu^*(A \setminus K_n) \geq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

(hiszen $A \setminus K_n \in \mathcal{T}_p$, így $\mu(A \setminus K_n) = \mu^*(A \setminus K_n) \quad (n \in \mathbf{N})$, és $A \setminus B \subset A \setminus K_n$ miatt $\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus K_n) \quad (n \in \mathbf{N})$.)

A most belátott $\mathcal{T}_p \subset \Omega$ reláció miatt (ld. 2.7.1.2. Tétel) $\Omega_p \subset \Omega$ is teljesül. Ha $A \in \Omega_p$ kompakt halmaz, akkor van olyan $B \in \mathcal{T}_p$, amellyel $A \subset B$, és $\overline{B}$ (a B lezártja) kompakt. Így

$$\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B) = \mu^*(B) = \mu(B) \leq \mu(\overline{B}) < +\infty.$$

Innen rögtön adódik az, hogy a μ, $\hat{\mu}$ mindegyike σ-véges, ui. alkalmas $K_n \in \mathcal{K}_p$ $(n \in \mathbf{N})$ kompakt halmazokkal $\mathbf{R}^p = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges Ω_p-beli A halmazra $\mu(A) = \hat{\mu}(A)$. Az előbbi szigmavégesség, ill. a mértékek kiterjesztésének az egyértelműségére vonatkozó tétel (ld. 2.5.4. Tétel) miatt ehhez elég azt belátni, hogy tetszőleges balról zárt és jobbról nyílt $I \in \mathbf{I}^p$ intervallumra $\mu(I) = \hat{\mu}(I)$. Ez viszont következik abból, hogy ha $(I_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{T}_p$ nyílt intervallumoknak egy olyan sorozata, amelyikre $I_{n+1} \subset I_n \quad (n \in \mathbf{N})$ és $I = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, akkor (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(I) = \lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(I_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(I_n) = \hat{\mu}(I).$$

xiv) Az előbbi megjegyzés jelöléseivel már nem nehéz igazolni a μ Borel-mérték alábbi *regularitási* tulajdonságát: tetszőleges $A \in \Omega_p$ halmazra

$$(**) \qquad \mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}_p,\ A \subset G\} = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}_p,\ C \subset A\}.$$

Legyen ui. $A \in \Omega_p$, ekkor

$$\mu(A) = \hat{\mu}(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu(G)\mathbf{R} : G \in \mathcal{T}_p,\ A \subset G\}.$$

Így a $(**)$-beli infimummal megfogalmazott *külső regularitás* nyilvánvaló. A $(**)$-beli szuprémummal kifejezett *belső regularitás* bizonyításához tegyük fel először azt, hogy az $A \in \Omega_p$ halmaz korlátos, és $G = K_r(x) \quad (x \in \mathbf{R}^p,\ r > 0)$ olyan nyílt gömb, amelyre $\overline{A} \subset G$. Ekkor $\mu(A) \leq \mu(G) < +\infty$, és a $G \setminus A$ halmazra alkalmazva a már belátott külső regularitást azt kapjuk, hogy

$$\mu(G) - \mu(A) = \mu(G \setminus A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{T}_p,\ G \setminus A \subset B\} =$$

$$\inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{T}_p,\ G \setminus A \subset B \subset G\} =$$

$$\inf\{\mu(G \setminus C) : C \in \mathcal{C}_p,\ C \subset A\} = \inf\{\mu(G) - \mu(C) : C \in \mathcal{C}_p,\ C \subset A\} =$$

$$\mu(G) - \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}_p,\ C \subset A\}.$$

Az itt szereplő zárt $C \subset A$ halmazok ugyanazok, mint a $C \subset A$ feltételnek eleget tevő kompakt halmazok, hiszen az A korlátos. Ezért a belső regularitást korlátos A halmazokra beláttuk.

Innen nem korlátos $A \in \Omega_p$ esetén már a „szokásos" módszerrel adódik a belső regularitás. Ui. nyilván

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap K_{n+1}(0)) =: \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

ahol $A_n \in \Omega_p$, az A_n korlátos, $A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$. Az utóbbi miatt (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup\{\mu(A_n) : n \in \mathbf{N}\}.$$

Ha $\mu(A) = +\infty$, akkor bármilyen $0 < q \in \mathbf{R}$ esetén alkalmas $\mathbf{N} \ni n$-nel $\mu(A_n) > q$. Viszont tudjuk már, hogy van olyan $C \in \mathcal{K}_p$ halmaz, amellyel $C \subset A_n$ és $\mu(C) > q$. Itt $C \subset A$, ezért

$$\sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}_p,\ C \subset A\} = +\infty = \mu(A).$$

A $\mu(A) < +\infty$ esetben tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\mu(A) - \varepsilon < \mu(A_n) \leq \mu(A)$, ill. van olyan $C \in \mathcal{K}_p$, $C \subset A_n$, amellyel

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(C)\ (\leq \mu(A_n) \leq \mu(A)).$$

Tehát $\sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}_p,\, C \subset A\} = \mu(A)$. ■

Világos, hogy az előbbiek értelemszerű módosításával analóg módon kapjuk az előző megjegyzésben szereplő $\hat{\mu}$ mérték regularitását is:

$$\hat{\mu}(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}_p,\, A \subset G\} = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}_p,\, C \subset A\} \qquad (A \in \hat{\Omega}).$$

xv) Folytatva a Borel-mértékek (ld. xiii), xiv)) vizsgálatát legyen adott a $\mu : \Omega_p \to [0, +\infty]$ Borel-mérték $(1 \le p \in \mathbf{N})$, továbbá valamilyen $Z \subset \mathbf{R}^N$ halmazra

$$\mu_*(Z) := \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}_p,\, C \subset Z\}$$

(a Z halmaz *belső mértéke*). Nyilván $\mu_*(Z) \le \mu^*(Z)$ (ahol a μ^* külső mértéket a xiii) megjegyzésben definiáltuk), hiszen $C \in \mathcal{K}_p$, $G \in \mathcal{T}_p$, $C \subset Z \subset G$ esetén $\mu(C) \le \mu(G)$, így (pl.) $\mu_*(Z) \le \mu(G)$. Ezért egyúttal (ld. xiii)) $\mu_*(Z) \le \mu^*(Z)$ is teljesül.

Tehát (ld. xiii))

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \hat{\mu}(A) \qquad (A \in \hat{\Omega}).$$

Nem nehéz belátni, hogy ez utóbbinak (némi megszorítással) a megfordítása is igaz: ha $A \subset \mathbf{R}^p$ és $\mu^*(A) = \mu_*(A) < +\infty$, akkor $A \in \hat{\Omega}$ (ld. 2.7.1.6. Tétel). Legyen ui. $0 < n \in \mathbf{N}$, ekkor megadhatók olyan $B_n \in \mathcal{K}_p$, $A_n \in \mathcal{T}_p$ halmazok, amelyekre $B_n \subset A \subset A_n$, és (az $\alpha := \mu^*(A) = \mu_*(A)$ jelölést használva)

$$\alpha - \frac{1}{n} < \mu(B_n) \le \alpha \le \mu(A_n) < \alpha + \frac{1}{n}$$

igaz. Mivel $\hat{B}_n := \bigcup_{k=1}^n B_k \in \mathcal{K}_p$, $\hat{A}_n := \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}_p$, és nyilván

$$\hat{B}_n \subset A\ ,\ A \subset \hat{A}_n\ ,\ \mu(B_n) \le \mu(\hat{B}_n) \le \alpha\ ,\ \mu(A_n) \ge \mu(\hat{A}_n) \ge \alpha,$$

ezért (a B_n-et $\hat{B}_n$-re, az A_n-et $\hat{A}_n$-re cserélve) az is feltehető a fentiekben, hogy

$$B_n \subset B_{n+1},\ A_{n+1} \subset A_n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $U := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, $V := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Ekkor $U, V \in \Omega_p$, $U \subset A \subset V$, és (ld. xiii), ill. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(U) = \hat{\mu}(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \alpha = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(V) = \hat{\mu}(V).$$

Tehát $\hat{\mu}(V \setminus U) = \mu(V) - \mu(U) = 0$. Mivel a $\hat{\mu}$ mérték teljes, ezért bármelyik $Z \subset V \setminus U$ halmazra $Z \in \Omega$ teljesül. Így (ld. 2.5.6. Tétel bizonyítása)

$$A = (A \setminus U) \cup U \in \Omega,$$

ui. $A \setminus U \subset V \setminus U$.

Speciálisan (ld. 2.7.1.5., 2.7.1.6. Tételek) a μ_p Borel-Lebesgue-mérték és a $\hat{\mu}_p$ Lebesgue-mérték is reguláris.

xvi) (*Cantor-halmaz.*) Tekintsük a $[0,1]$ zárt intervallumot, és „első lépésként" hagyjuk el belőle a középső nyílt $1/3$-át, azaz az $I_1 := (1/3, 2/3)$ nyílt intervallumot, aminek a hossza $|I_1| = 1/3$. A „maradék" halmaz a $[0,1/3]$ és a $[2/3,1]$ intervallumok egyesítése. „Második lépésként" ezek mindegyikének újra hagyjuk el a középső nyílt $1/3$-át, azaz az

$$I_2 := (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$$

halmazt. Ez utóbbi két intervallum $|I_2|$ összhossza: $|I_2| = 2/9$. A

$$[0,1] \setminus (I_1 \cup I_2) = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

halmazt alkotó négy intervallum mindegyikének megint csak hagyjuk el a középső nyílt $1/3$-át, I_3-at, amikor is $|I_3| = 4/27$, és í.t. Az n-edik lépésben $(1 \le n \in \mathbf{N})$ ilymódon elhagyott I_n halmazt alkotó intervallumok összhossza $|I_n| = 2^{n-1}/3^n$. Világos, hogy az I_n-ek páronként diszjunktak,

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \Omega_1,$$

és

$$\mu_1(I) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Következésképpen a

$$\Upsilon := [0,1] \setminus I \in \Omega_1$$

Cantor-halmaz nullamértékű halmaz: $\mu_1(\Upsilon) = \mu_1([0,1]) - \mu_1(I) = 0$.

Lássuk be, hogy a Υ halmaz kontinuum számosságú. Ehhez vegyük észre, hogy a $J_1 := [0,1] \setminus I_1$ halmaz minden x eleme felírható 3-as számrendszerben

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k+1}}$$

alakban úgy, hogy $x_0 \in \{0,2\}$ és $x_n \in \{0,1,2\}$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$. Továbbá analóg állítás igaz a

$$J_n := [0,1] \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \Big) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

halmaz elemeire is: tetszőleges $x \in J_n$ esetén van olyan

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k+1}}$$

előállítás, hogy $x_0, ..., x_{n-1} \in \{0,2\}$ és $x_k \in \{0,1,2\}$ $(n \le k \in \mathbf{N})$. Ezért a

$$\Upsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

Cantor-halmaz minden $x \in \Upsilon$ elemére létezik (sőt, egyértelműen) olyan

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}$$

hármas számrendszerbeli felírás, ahol $x_n \in \{0, 2\}$ $(n \in \mathbf{N})$. A konstrukcióból az is kiderül, hogy minden ilyen alakban felírható szám eleme a Υ-nak. Legyen ekkor

$$y_n(x) := \frac{x_n}{2} \quad (n \in \mathbf{N}) \text{ és } \varphi(x) := \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \cdot 2^{-n-1}.$$

Nyilván $\varphi : \Upsilon \to [0, 1]$, és a φ szürjektív. Vegyük figyelembe, hogy a megszámlálható

$$\mathcal{D} := \left\{ \frac{k}{2^m} : m \in \mathbf{N}, k = 0, ..., 2^m - 1 \right\}$$

halmaz (a diadikusan racionális számok halmaza) elemeitől eltekintve, azaz tetszőleges $z \in [0, 1] \setminus \mathcal{D}$ szám egyértelműen írható fel

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}}$$

kettes számrendszerbeli alakban, ahol $z_n \in \{0, 1\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ha tehát

$$\Upsilon_0 := \varphi^{-1}[\mathcal{D}],$$

akkor a Υ_0 halmaz legfeljebb megszámlálható, és a

$$\Upsilon \setminus \Upsilon_0 \ni x \mapsto \varphi(x) \in [0, 1] \setminus \mathcal{D}$$

leképezés bijekció. Ezért – lévén a $[0, 1] \setminus \mathcal{D}$ halmaz kontiunuum számosságú – a Cantor-halmaz számossága is kontiunuum.

Következésképpen a Υ egy kontinuum számosságú és nulla Lebesgue-mértékű halmaz. Tudjuk (ld. 2.7.1.4. Definíció), hogy a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mérték teljes, ezért $\mathcal{P}(\Upsilon) \subset \hat{\Omega}_1$. Mivel a $\mathcal{P}(\Upsilon)$ hatványhalmaz számossága $(|\mathcal{P}(\Upsilon)|)$ nagyobb, mint a Υ Cantor-halmaz (kontinuum) számossága, ezért az $\hat{\Omega}_1$ számossága $(|\hat{\Omega}_1|)$ is nagyobb, mint kontiunuum: $|\mathcal{P}(\Upsilon)| \leq |\hat{\Omega}_1|$. Továbbá $|\mathcal{P}(\mathbf{R})| = |\mathcal{P}(\Upsilon)|$, amiből a nyilvánvaló $|\hat{\Omega}_1| \leq |\mathcal{P}(\mathbf{R})|$ becslést is figyelembe véve

$$|\hat{\Omega}_1| = |\mathcal{P}(\mathbf{R})|$$

következik.

Világos, hogy a fentiek analóg módon elmondhatók az $\hat{\Omega}_p$-re is minden $1 \leq p \in \mathbf{N}$ esetén.

xvii) A 2.7.2.1. Tételből rutin számolással kapjuk az alábbi eredményeket (egyúttal mintegy ellenőrizve az előbbi formulát az „ismert" $p = 1, 2, 3$ esetekben):

$$V_1(r) = \frac{\sqrt{\pi}\cdot r}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\sqrt{\pi}\cdot r}{\Gamma(1/2)} = \frac{2\sqrt{\pi}\cdot r}{\sqrt{\pi}} = 2r;$$

$$V_2(r) = \frac{\pi\cdot r^2}{\Gamma(2)} = \frac{\pi\cdot r^2}{\Gamma(1)} = r^2\cdot\pi;$$

$$V_3(r) = \frac{(\sqrt{\pi})^3\cdot r^3}{\Gamma(5/2)} = \frac{2(\sqrt{\pi})^3\cdot r^3}{3\Gamma(3/2)} = \frac{4(\sqrt{\pi})^3\cdot r^3}{3\Gamma(1/2)} = \frac{4(\sqrt{\pi})^3\cdot r^3}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4r^3\cdot\pi}{3};$$

$$V_4(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{4}\cdot V_2(r) = \frac{r^2\cdot\pi}{2}r^2\cdot\pi = \frac{r^4\cdot\pi^2}{2};$$

$$V_5(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{5}\cdot V_3(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{5}\frac{4r^3\cdot\pi}{3} = \frac{8r^5\cdot\pi^2}{15};$$

$$V_6(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{6}\cdot V_4(r) = \frac{r^2\cdot\pi}{3}\frac{r^4\cdot\pi^2}{2} = \frac{r^6\cdot\pi^3}{6};$$

$$V_7(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{7}\cdot V_5(r) = \frac{2r^2\cdot\pi}{7}\frac{8r^5\cdot\pi^2}{15} = \frac{16r^7\cdot\pi^3}{105}.$$

Legyen

$$T_p := V_p(1) \qquad (1 \le p \in \mathbf{N}),$$

ekkor az előbbiek szerint

$$T_1 = 2 < T_2 = \pi < T_3 = \frac{4\pi}{3} < T_4 = \frac{\pi^2}{2} < T_5 = \frac{8\pi^2}{15} > T_6 = \frac{\pi^3}{6} > T_7 = \frac{16\pi^3}{105}.$$

Megmutatjuk, hogy $T_p > T_{p+1}$ $(5 \le p \in \mathbf{N})$. Ui. az előbbi megjegyzések miatt

$$T_p = 2^p\cdot\prod_{k=1}^{p} I_k > T_{p+1} = 2^{p+1}\cdot\prod_{k=1}^{p+1} I_k \iff I_{p+1} < \frac{1}{2} \qquad (5 \le p \in \mathbf{N}).$$

A 2.7.2. pontbeli $(**)$ formulát felhasználva

$$I_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\ I_1 = 1\ ,\ I_2 = \frac{\pi}{4}\ ,\ I_3 = \frac{2}{3}\ ,\ I_4 = \frac{3\pi}{16}, I_5 = \frac{8}{15},$$

$$I_6 = \frac{15\pi}{96} < 1/2\ ,\ I_7 = \frac{48}{105} < 1/2,$$

amiből a most idézett $(**)$ alapján a mondottak teljes indukcióval rögtön adódnak.

Világos tehát, hogy

$$\max\{T_p : 1 \le p \in \mathbf{N}\} = T_5 = \frac{8\pi^2}{15}.$$

Továbbá (ld. 2.7.2.) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, ezért van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $I_k < 1/3$, hacsak $k \in \mathbf{N}$ és $k > N$. Ha viszont $N < p \in \mathbf{N}$, akkor (ld. 2.7.2.) a következőt mondhatjuk:

$$T_p = 2^p \cdot \prod_{k=1}^{p} I_k = 2^p \cdot \left(\prod_{k=1}^{N} I_k\right) \cdot \left(\prod_{k=N+1}^{p} I_k\right) < 2^p \cdot \left(\prod_{k=1}^{N} I_k\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p-N} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^p \cdot 3^N \cdot \prod_{k=1}^{N} I_k \to 0 \qquad (p \to +\infty),$$

így $\lim_{p\to\infty} T_p = 0$.

Összefoglalva a fentieket a következő állításokat kapjuk:

1° $\max\{V_p(1) : 1 \le p \in \mathbf{N}\} = V_5(1) = \frac{8\pi^2}{15}$;

2° $V_p(1) < V_{p+1}(1)$ $(p = 1, 2, 3, 4)$, $V_q(1) > V_{q+1}(1)$ $(q = 5, 6, ...)$;

3° $\lim_{p\to\infty} V_p(1) = 0$.

xviii) A 7.2. pontban hivatkoztunk a számos matematikai megfontolásban fontos szerepet játszó

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (0 < x \in \mathbf{R})$$

ún. *gamma-függvény* (Euler (1729), Stirling (1730), Legendre (1808, 1814)) alábbi tulajdonságaira:

(a) $0 < \Gamma(x) < +\infty \quad (x > 0)$;

(b) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (x > 0)$;

(c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$;

(d) $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbf{N})$.

A teljesség kedvéért lássuk be a most mondott állításokat.

(a) Legyen $0 < a \in \mathbf{R}$, és

$$\Gamma_a(x) := \int_0^a t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (1 \le x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $\Gamma_a(x) \le \Gamma_b(x) \quad (a, b \in \mathbf{R},\ a \le b)$, ezért a $\Gamma(x)$ (mint improprius integrál) létezik, és

$$\Gamma(x) = \sup_a \Gamma_a(x).$$

Elég tehát már csak azt belátni, hogy minden rögzített $1 \le x \in \mathbf{R}$ mellett a $\Gamma_a(x)$ korlátos (az a-szerint). Legyen ehhez $a > 1, N \in \mathbf{N}, N > x$, ekkor $e^t \ge t^N/N!$ $(t \ge 0)$ miatt

$$\Gamma_a(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^a t^{x-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + N!\cdot \int_1^a t^{x-1-N}\,dt =$$

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \frac{N!}{x-N}\left(a^{x-N}-1\right) \le \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \frac{N!}{N-x} =: C_x < +\infty,$$

ahol a C_x már az a-tól független.

Ezzel beláttuk az (a)-t abban az esetben, ha $x \ge 1$. Ha viszont $0 < x < 1$, akkor

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt =: \Gamma^{(1)}(x) + \Gamma^{(2)}(x).$$

Itt a $\Gamma^{(2)}(x)$ létezése és a végessége ugyanúgy igazolható, mint ahogyan azt az előbb láttuk. Továbbá

$$\Gamma^{(1)}(x) = \lim_{a\to+0}\int_a^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt = \sup_{0<a<1}\int_a^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

ahol

$$\int_a^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \le \int_a^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1-a^x}{x} \le \frac{1}{x} \qquad (0 < a < 1).$$

Tehát $\Gamma^{(1)}(x) \le 1/x < +\infty$.

(b) Parciálisan integrálva azt mondhatjuk, hogy

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \lim_{a\to+0\,;\,b\to+\infty}\int_a^b t^x e^{-t}\,dt =$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{a^x}{e^a} - \lim_{b\to+\infty}\frac{b^x}{e^b} + x\cdot\Gamma(x) = x\cdot\Gamma(x).$$

(c) Teljes indukcióval okoskodva, a (c) állítás $n = 0$-ra a következőt jelenti:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!,$$

ami triviálisan teljesül. Ha a (c) igaz valamilyen $\mathbf{N} \ni n$-re, akkor a (b) állítás alapján

$$\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\cdot\Gamma(n+1) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!,$$

így a (c) fennáll $(n+1)$-re is.

(d) Az értelmezés szerint (és a $\sqrt{t} = x \quad (0 < x < +\infty)$ helyettesítést alkalmazva)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{a\to+0, b\to+\infty} \int_a^b \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt =$$

$$\lim_{a\to+0;b\to+\infty} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x\, dx = 2\cdot \lim_{a\to+0;b\to+\infty} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-x^2}\, dx.$$

Innen az adódik, hogy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\cdot \lim_{R\to+\infty} I(R),$$

ahol

$$I(R) := \int_0^R e^{-x^2}\, dx \qquad (0 < R \in \mathbf{R}).$$

A szukcesszív integrálás szerint az

$$A_R := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le x, y\},\ B_R := [0,R]^2 \setminus A_R$$

jelölésekkel

$$I^2(R) = \left(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\right)\cdot \left(\int_0^R e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$\int_{A_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy + \int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =: I_1(R) + I_2(R).$$

Az előbbi két integrált a következőképpen becsülhetjük: síkbeli polárkoordinátákat használva

$$I_1(R) = \int_{A_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^R \int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^R re^{-r^2}\, dr = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to \frac{\pi}{4} \quad (R \to +\infty),$$

valamint

$$I_2(R) = \int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \le R^2 e^{-R^2} \to 0 \qquad (R \to +\infty).$$

Ezért

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot \sqrt{\lim_{R\to+\infty} (I_1(R) + I_2(R))} = \sqrt{\pi}.$$

xix) Teljes indukcióval könnyen adódik az előző megjegyzés (b) egyenlőségének az alábbi általánosítása:

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(x)\cdot \prod_{j=0}^{n-1} (x+j) \qquad (0 < x \in \mathbf{R},\ 1 \le n \in \mathbf{N}).$$

xx) Mivel (ld. xviii)) $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad (0 < x \in \mathbf{R})$ és $\Gamma(1) = 1$, ezért elegendő a $\Gamma(x)$-et csupán $0 < x < 1$ esetén ismerni. Ui. egyrészt $\Gamma(n) = (n-1)! \quad (0 < n \in \mathbf{N})$, másrészt a xix)-beli egyenlőség átírásával könnyű megmutatni, hogy

$$\Gamma(x) = \Gamma(x-n)\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-k) \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\, n < x < n+1),$$

és itt már $x - n \in (0,1)$.

xxi) A xix)-beli egyenlőség más alakban a következőt jelenti:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x+j)} \qquad (0 < x \in \mathbf{R},\, 1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Lássuk be, hogy ha $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, $x < 0$ és $n, k \in \mathbf{N}$ olyan természetes számok, amelyekkel $x+n,\, x+k \in (0,+\infty)$, akkor

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x+j)} = \frac{\Gamma(x+k)}{\prod\limits_{j=1}^{k-1}(x+j)}.$$

Nyilván feltehető ui., hogy (pl.) $n > k$, ekkor a bizonyítandó egyenlőségünk a következőt jelenti:

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x+k)} = \prod_{j=k}^{n-1}(x+j).$$

Ezt (rögzített k mellett) az n-szerinti teljes indukcióval könnyen „elintézhetjük". Mindez lehetőséget ad arra, hogy a Γ függvény értelmezését kiterjesszük az $x < 0$, $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ helyekre is az alábbiak szerint:

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(x+j)}$$

(itt az $n \in \mathbf{N}$ olyan (egyébként tetszőlegesen választott) természetes számot jelöl, amelyikre $x+n > 0$).

Így pl. a Γ függvény néhány helyettesítési értéke:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\cdot\sqrt{\pi}}{3} \approx 2.363;\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\cdot\sqrt{\pi} \approx -3.545;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1.772;\ \Gamma(1) = 1;\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886;$$

$$\Gamma(2) = 1;\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\cdot\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.329;\ \Gamma(3) = 2;$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\cdot\sqrt{\pi}}{8} \approx 3.323;\ \Gamma(4) = 6.$$

Megjegyezzük, hogy ha $k \in \mathbf{N}$ és $(2k+1)!! := \prod_{j=0}^{k}(2k+1-2j)$, továbbá $(-1)!! := 1$, akkor teljes indukcióval nem nehéz belátni azt, hogy

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!\cdot\sqrt{\pi}}{2^k}.$$

Az ismert

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\theta_n/(12n)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\ 0 < \theta_n < 1)$$

Stirling-formula segítségével pedig az alábbi aszimptotikus formula adható a gamma-függvényre: minden $0 < x \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $0 < \theta_x < 1$, hogy

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\cdot x^{x-1/2}\cdot e^{-x+\theta_x/(12x)}.$$

xxii) A $p = 1$ esetben a Vitali-lemma (ld. 2.7.3.1. Tétel) alábbi „finomítása" is igaz: tetszőleges $c < \mu_1(U)$ mellett a lemmabeli $\mathcal{J}_0$ úgy is megválasztható, hogy

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_0} \mu_1(U_j) > c/2.$$

Valóban, a szóban forgó lemma bizonyításában nyilván feltehető, hogy minden $i \in \mathcal{J}_1$ esetén az U_i nem részhalmaza az $\bigcup_{i\neq j\in\mathcal{J}_1} U_j$ halmaznak. Az is feltehető továbbá, hogy ha $U_j = (a_j, b_j)$ $(j \in \mathcal{J}_1)$, akkor $a_1 < a_2 < \ldots$ Innen könnyen adódik viszont az, hogy az előbbi j indexekre $b_{j+1} > b_j$ és $a_{j+1} > b_{j-1}$ is igaz. Ebből meg egyszerűen levezethető, hogy a páros $j \in \mathcal{J}_1$ indexű U_j halmazok páronként diszjunktak, és ugyanez igaz a páratlan indexű U_j-kre is. Ezért

$$c < \mu_1\Big(\bigcup_j U_j\Big) \le \mu_1\Big(\bigcup_{j,2|j} U_j\Big) + \mu_1\Big(\bigcup_{j,2|(j+1)} U_j\Big) =$$

$$\sum_{j,2|j} \mu_1(U_j) + \sum_{j,2|(j+1)} \mu_1(U_j) =: \Delta_1 + \Delta_2,$$

ahol $\max\{\Delta_1, \Delta_2\} > c/2$. Így $\mathcal{J}_0$-nak választható a $\mathcal{J}_1$-beli páros indexek, vagy a páratlan indexek halmaza.

xxiii) Ha a Vitali-lemmában (ld. 2.7.3.1. Tétel) a $\mathcal{J}$ halmaz véges, akkor a tétel bizonyítását K helyett U-val elmondva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_0} \mu_p(U_j) \geq \mu_p(U)/3^p.$$

Hasonlóan, ha $\mathcal{J}$ véges, akkor a xviii)-ban kapott becslés helyett

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_0} \mu_1(U_j) \geq \mu_1(U)/2$$

adódik.

xxiv) Az előbbi megjegyzésben szereplő $1/2$ szorzó „optimális" is, ui., ha valamilyen $\alpha > 0$ mellett $\sum_{j\in\mathcal{J}_0} \mu_1(U_j) \geq \alpha\cdot \mu_1(U)$ írható, akkor az

$$U := (-1,1)\ ,\ U_1 := (-1,0)\ ,\ U_2 := (-\delta,1) \qquad (0<\delta<1)$$

esetben $U = U_1 \cup U_2$. Mivel $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, ezért a $\mathcal{J}_0$ halmaz 1-elemű. Továbbá $\mu_1(U_2) > \mu_1(U_1)$, így

$$\mu_1(U_2) = 1+\delta \geq \alpha\cdot \mu_1(U) = 2\alpha.$$

Következésképpen $\alpha \leq (1+\delta)/2$ minden $0<\delta<1$ esetén fenn kell, hogy álljon. Mindez azt jelenti, hogy $\alpha \leq 1/2$.

2.9. Mértékek szorzata

Az alábbiakban röviden vázoljuk a mértékterek „szorzatával" kapcsolatos egyik lehetséges felépítési eljárást. (A későbbiekben az integrálfogalom segítségével egy másik, „konstruktív" módszert is bemutatunk a szorzatterek előállítására.)

Legyenek tehát adottak az (X_i, Θ_i, μ_i) $(i = 1,2)$ tetszőleges mértékterek, és a „többdimenziós" Borel-Lebesgue-mérték (ld. 2.3.2.) mintájára próbáljunk meg mértéket definiálni az $X_1 \times X_2$ Descartes-szorzat egy alkalmas σ-algebráján, mindezeket valahogyan az $\Theta_1 \subset \mathcal{P}(X_1)$, $\Theta_2 \subset \mathcal{P}(X_2)$ szigma-algebrákból és a $\mu_1 : \Theta_1 \to [0,+\infty]$, $\mu_2 : \Theta_2 \to [0,+\infty]$ mértékekből „felépítve".

Az első kérdés, hogy mik legyenek az $X_1 \times X_2$ halmaz mérhető részhalmazai. Az említett Borel-Lebesgue-analógiára gondolva az eléggé természetesnek tűnik, hogy az

$$A \times B \qquad (A \in \Theta_1,\ B \in \Theta_2)$$

alakú halmazok legyenek ilyenek. Következésképpen az ezeket a halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebrán próbáljunk a μ_1, μ_2-ből kiindulva mértéket definiálni. Legyen tehát

$$\mathcal{M} := \{A \times B \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2) : A \in \Theta_1,\ B \in \Theta_2\},$$

és

$$\Theta_1 \otimes \Theta_2 := \Omega(\mathcal{M})$$

az $\mathcal{M}$ halmazrendszer (a „hengerhalmazok" rendszere) elemeit tartalmazó legszűkebb szigma-algebra.

2.9.1. Lemma. *Az $\mathcal{M}$ halmazrendszer félgyűrű.*

Bizonyítás. A félgyűrű axiómái (ld. 2.1.3. Definíció) alapján a fenti állítás szinte nyilvánvaló. ■

A későbbiek érdekében (bár ebben a pontban még nem lesz rá szükségünk) fogalmazzuk meg az $\Theta_1 \otimes \Theta_2$ („szorzat") szigma-algebra egyik karakterisztikus tulajdonságát. Legyen ehhez egy tetszőleges $\mathcal{A} \subset X_1 \times X_2$ halmaz és $x \in X_1$, $y \in X_2$ elemek esetén

$$\mathcal{A}_x := \{z \in X_2 : (x, z) \in \mathcal{A}\},\ \mathcal{A}^y := \{t \in X_1 : (t, y) \in \mathcal{A}\}$$

(az $\mathcal{A}$ „metszetei").

2.9.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \in \Theta_1 \otimes \Theta_2$. Ekkor bármilyen $x \in X_1$ és $y \in X_2$ választással*

$$\mathcal{A}_x \in \Theta_2,\ \mathcal{A}^y \in \Theta_1.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi halmazrendszert:

$$\Omega := \{\mathcal{A} \in \Theta_1 \otimes \Theta_2 : \mathcal{A}_x \in \Theta_2\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $X_1 \times X_2 \in \Omega$, hiszen

$$(X_1 \times X_2)_x = X_2 \in \Theta_2.$$

Ha $\mathcal{A} \in \Omega$, akkor $\mathcal{A}_x \in \Theta_2$ miatt

$$\Big((X_1 \times X_2) \setminus \mathcal{A}\Big)_x = X_2 \setminus \mathcal{A}_x \in \Theta_2,$$

és így $(X_1 \times X_2) \setminus \mathcal{A} \in \Omega$. Ha pedig $\mathcal{A}_n \in \Omega$, azaz $\Big(\mathcal{A}_n\Big)_x \in \Theta_2 \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n\Big)_x = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Big(\mathcal{A}_n\Big)_x \in \Theta_2.$$

Következésképpen $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \in \Omega$. Mindez azt jelenti, hogy az Ω szigma-algebra. Világos ugyanakkor, hogy tetszőleges $A \in \Theta_1$, $B \in \Theta_2$ halmazokkal $A \times B \in \Omega$, hiszen

$$\Theta_2 \ni (A \times B)_x = \begin{cases} \emptyset & (x \notin A) \\ B & (x \in A). \end{cases}$$

Ezért $\mathcal{M} \subset \Omega$, és így

$$\Theta_1 \otimes \Theta_2 = \Omega(\mathcal{M}) \subset \Omega \ (\subset \Theta_1 \otimes \Theta_2).$$

Tehát $\Theta_1 \otimes \Theta_2 = \Omega$, ami éppen az egyik bizonyítandó állítást jelenti. (A másikat analóg módon láthatjuk be.) ■

Mi legyen vajon a mérték ezen a σ-algebrán? Az $\mathcal{M}$ halmaz elemein megint csak kézenfekvőnek tűnik, hogy az $A \times B$ $(A \in \Theta_1,\ B \in \Theta_2)$ halmaz mértéke legyen

$$\mu_1(A) \cdot \mu_2(B).$$

(Emlékeztetünk arra a megállapodásunkra, miszerint $0 \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot 0 := 0$.)

A 2.3. pontban tárgyalt kiterjesztési eljárás (ld. 2.3.1.6. Tétel) alkalmazhatóságához azt kell megmutatnunk, hogy az

$$\mathcal{M} \ni A \times B \mapsto \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

leképezés σ-additív. Ehhez szükségünk lesz a következő (az integrálelmélet keretében meglehetősen egyszerűvé váló) állításra. A megfogalmazásához vezessük be a következő jelölést: valamilyen $A \subset X$ halmaz esetén legyen

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A). \end{cases}$$

(az A halmaz *karakterisztikus függvénye*).

2.9.3. Lemma. *Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_0, ..., \alpha_n \in (0, +\infty)$, és $A_0, ..., A_n \in \Omega$. Tegyük fel, hogy az $\alpha, \beta > 0$ számokkal*

$$\beta \le \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x) \le \alpha \qquad (x \in X).$$

Ekkor

$$\beta \cdot \mu(X) \le \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \le \alpha \cdot \mu(X).$$

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $A_i \neq \emptyset$ $(i = 0, ..., n)$. Ha $\mu(X) = +\infty$, akkor van olyan $i = 0, ..., n$ index, hogy $\mu(A_i) = +\infty$. Különben ui. az $A := \bigcup_{i=0}^{n} A_i \in \Omega$ halmazra $\mu(A) \le \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$ (ld. 2.3.1.3. Tétel) miatt $\mu(A) < +\infty$, így $A \neq X$ teljesül. Világos, hogy $x \in X \setminus A$ esetén $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x) = 0$, ami ellentmond a feltételeknek. Ekkor tehát

$$\beta \cdot \mu(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \alpha \cdot \mu(X) = +\infty.$$

A továbbiakban ezért feltehetjük, hogy a μ véges, azaz $\mu(X) < +\infty$. A teljes indukció módszerét követve először is jegyezzük meg, hogy a kívánt becslés $n = 0$-ra triviális. Ekkor ti. a feltételek miatt $A_0 = X$, $\beta \le \alpha_0 \le \alpha$, más szóval

$$\beta\cdot \mu(X) \le \alpha_0\cdot \mu(X) = \alpha_0\cdot \mu(A_0) \le \alpha\cdot \mu(X).$$

Tételezzük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett már igaz a 2.9.3. Lemma állítása, és lássuk be ugyanezt $(n+1)$-re. Legyen tehát

$$\alpha_0, ..., \alpha_{n+1} \in (0, +\infty),\ A_0, ..., A_{n+1} \in \Omega \setminus \{\emptyset\},$$

és

$$\beta \le \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i\cdot \chi_{A_i}(x) \le \alpha \qquad (x \in X).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{A}_i := A_i \setminus A_0 \quad (i = 1, ..., n+1),\ Y := X \setminus A_0.$$

Ekkor $\Omega \ni Y \supset \tilde{A}_i = A_i \setminus (A_0 \cap A_i) \in \Omega$, és (ld. 2.3.1.3. Tétel) minden $i = 1, ..., n+1$ indexre $\mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_i) - \mu(A_0 \cap A_i)$. Továbbá $\mu(Y) = \mu(X) - \mu(A_0)$, valamint

$$\beta \le \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\cdot \chi_{\tilde{A}_i}(x) \le \alpha \qquad (x \in Y).$$

Az indukciós feltétel alapján tehát

$$\beta\cdot \mu(Y) \le \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\cdot \mu(\tilde{A}_i) \le \alpha\cdot \mu(Y).$$

(Ez utóbbi ui. $Y = \emptyset$ esetén nyilvánvaló, különben pedig az (Y, Ω_Y, μ_Y) mértéktérre alkalmazható az indukciós feltétel, ahol

$$\Omega_Y := \{A \in \mathcal{P}(Y) : A \in \Omega\} = \Omega \cap \mathcal{P}(Y)\ ,\ \mu_Y(A) := \mu(A) \qquad (A \in \Omega_Y).)$$

Tehát

$$\beta\cdot \Big(\mu(X) - \mu(A_0)\Big) \le \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\cdot \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\cdot \mu(A_0 \cap A_i) \le \alpha\cdot \Big(\mu(X) - \mu(A_0)\Big),$$

ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$(*) \qquad (\beta-\alpha_0)\cdot \mu(A_0) \le \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\cdot \mu(A_0\cap A_i) \le (\alpha-\alpha_0)\cdot \mu(A_0).$$

A

$$\beta \le \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x) \le \alpha \qquad (x \in X)$$

indukciós feltétel miatt $\alpha - \alpha_0 \ge 0$. Továbbá $\alpha = \alpha_0$ csak úgy lehetséges, ha $A_0 \cap A_i = \emptyset$ $(i = 1, ..., n+1)$, azaz ekkor a $(*)$-beli jobb oldali becslés triviálisan igaz. Feltehető tehát, hogy $\alpha > \alpha_0$, ill. hasonlóan, hogy $\beta > \alpha_0$. Az előbb említett indukciós feltétel viszont az A_0 pontjaiban nyilván a következőt jelenti:

$$(**) \qquad \beta - \alpha_0 \le \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \chi_{A_0 \cap A_i}(x) \le \alpha - \alpha_0 \qquad (x \in A_0).$$

Az (Y, Ω_Y, μ_Y) tér analógiájára tekintsük az $(A_0, \Omega_{A_0}, \mu_{A_0})$ mértékteret, és alkalmazzuk az indukciós feltételt azokra az $A_0 \cap A_i \in \Omega_{A_0}$ $(i = 1, ..., n+1)$ halmazokra, amelyekre $A_0 \cap A_i \ne \emptyset$. (Az előbb mondott $\alpha > \alpha_0$ miatt ez legalább egy $i = 1, ..., n+1$ esetén teljesül.) Ez az alkalmazás a $(**)$ becslés alapján megtehető, amiből a $(*)$ már adódik. ■

A most bebizonyított lemma segítségével igazolni tudjuk a kiterjesztési tételek alkalmazhatósága szempontjából alapvető fontosságú alábbi tételt:

2.9.4. Tétel. *Legyen (X, Ω, μ) és (Y, Θ, ν) egy-egy mértéktér, a ν legyen σ-véges, és tekintsük a következő halmazfüggvényt:*

$$\varphi(A \times B) := \mu(A) \cdot \nu(B) \qquad (A \in \Omega,\ B \in \Theta).$$

Ekkor a φ egy σ-additív leképezés.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy ha valamilyen $A,\ A_i \in \Omega,\ B,\ B_i \in \Theta$ $(i \in \mathbf{N})$ halmazokra

$$(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset \qquad (i, j \in \mathbf{N},\ i \ne j),$$

és

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \times B_i) = A \times B$$

teljesül, akkor

$$(***) \qquad \mu(A) \cdot \nu(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i).$$

(Az is kiköthető, hogy a felsorolt halmazok közül egyik sem az üres halmaz.)

Tegyük fel elsőként, hogy $\nu(B) < +\infty$. Mivel $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A$, $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = B$, ezért

$$\mu(A) = 0 \ \text{ (vagy } \nu(B) = 0) \text{ esetén } \mu(A_i) = 0 \ \text{ (vagy } \nu(B_i) = 0) \quad (i \in \mathbf{N}),$$

azaz ekkor a $(***)$ egyenlőség automatikusan fennáll. Feltehető tehát, hogy $\mu(A) > 0$ és $\nu(B) > 0$. Legyen ekkor

$$f_k := \nu(B_k) \cdot \chi_{A_k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Lássuk be először azt, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \nu(B) \qquad (x \in A).$$

Valóban, ha $x \in A$, akkor minden $y \in B$ esetén $(x, y) \in A \times B$, azaz egy alkalmas $i \in \mathbf{N}$ mellett $(x, y) \in A_i \times B_i$. Ha

$$\mathcal{I}_x := \{i \in \mathbf{N} : (x, y) \in A_i \times B_i \quad (\text{valamilyen } B \ni y\text{-ra})\},$$

akkor $B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_x} B_i$, azaz $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = B$ miatt egyúttal $B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_x} B_i$. Ez egy páronként diszjunkt halmazokra való felbontása a B-nek, mivel $B_i \cap B_j \neq \emptyset \quad (i, j \in \mathcal{I}_x,\ i \neq j)$ esetén

$$(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = (A_i \cap A_j) \times (B_i \cap B_j) \neq \emptyset,$$

lévén $x \in A_i \cap A_j$. Ez nyilván ellentmondana annak, hogy az $A_k \times B_k \ (k \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak. Tehát a ν szigma-additivitása miatt

$$\nu(B) = \sum_{i \in \mathcal{I}_x} \nu(B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x).$$

Legyen

$$\Phi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x) \qquad (x \in A, n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a 2.7.1.3. Lemma előtt mondottak értelmében a Φ_n mérhető függvény, továbbá

$$\Phi_n(x) \leq \Phi_{n+1}(x) \quad (n \in \mathbf{N}) \ \text{ és } \ \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \nu(B) \qquad (x \in A).$$

Könnyű belátni, hogy innen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n \to \infty} \mu\Big(\{x \in A : \Phi_n(x) > \nu(B) - \varepsilon\}\Big) = \mu(A)$$

következik. Ha ui.

$$C_n := \{x \in A : \Phi_n(x) > \nu(B) - \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\Omega \ni C_n \subset C_{n+1} \subset A \quad (n \in \mathbf{N}) \ \text{ és } \ A = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Alkalmazható tehát a mértékek félig folytonosságáról szóló tétel (ld. 2.3.1.4. Tétel), miszerint

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Mivel $0 < \varepsilon < \nu(B)$ esetén

$$\nu(B) - \varepsilon \le \Phi_n(x)\cdot \chi_{C_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \nu(B_i)\cdot \chi_{A_i\cap C_n}(x) \le \nu(B) \qquad (x \in C_n,\, n \in \mathbf{N}),$$

ezért a 2.9.3. Lemma alapján tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\Big(\nu(B) - \varepsilon\Big)\cdot \mu(C_n) \le \sum_{i=0}^{n} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i \cap C_n) \le \nu(B)\cdot \mu(C_n) \le \nu(B)\cdot \mu(A)$$

adódik. A $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$ összefüggést felhasználva ebből a

$$\sum_{i=0}^{n} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i \cap C_n) \le \sum_{i=0}^{n} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i)$$

egyenlőtlenséget figyelembe véve a

$$\Big(\nu(B) - \varepsilon\Big)\cdot \mu(A) \le \sum_{i=0}^{\infty} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i)$$

becslést kapjuk.

A $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$ egyenlőségből

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap C_n) \qquad (i \in \mathbf{N})$$

is következik, tehát bármelyik $N \in \mathbf{N}$ esetén az előzőek alapján

$$\sum_{i=0}^{N} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i \cap C_n) \le \nu(B)\cdot \mu(A)$$

is igaz. Így

$$\sum_{i=0}^{\infty} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i) \le \nu(B)\cdot \mu(A),$$

ami az előző (alsó) becsléssel együtt – lévén az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt – a bizonyítandó

$$\sum_{i=0}^{\infty} \nu(B_i)\cdot \mu(A_i) = \nu(B)\cdot \mu(A)$$

egyenlőséget jelenti.

A $\nu(B) = +\infty$ esetben a ν szigma-végességét kihasználva legyen

$$Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i \qquad \Big(Y_i \subset Y_{i+1},\ \nu(Y_i) < +\infty \quad (i \in \mathbf{N})\Big).$$

Ekkor egyrészt (ld. 2.3.1.4. Tétel) $\nu(B) = \lim_{i\to\infty} \nu(B \cap Y_i)$, másrészt a „véges" esetre már bebizonyítottak alapján

$$\mu(A)\cdot \nu(B \cap Y_i) = \lim_{i\to\infty} \varphi\Big(A \times (B \cap Y_i)\Big) =$$

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j \times (B_j \cap Y_i)\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)\cdot \nu(B_j \cap Y_i) \qquad (i \in \mathbf{N}).$$

Mivel minden rögzített $j \in \mathbf{N}$ mellett $i \to \infty$ esetén a $(0 \le)\ \mu(A_j)\cdot \nu(B_j \cap Y_i)$ szorzatok monoton nőve tartanak a $\mu(A_j)\cdot \nu(B_j)$ szorzathoz (ld. 2.3.1.4. Tétel), ezért

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)\cdot \nu(B_j \cap Y_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{i\to\infty} \Big(\mu(A_j)\cdot \nu(B_j \cap Y_i)\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)\cdot \nu(B_j),$$

amit be kellett bizonyítani. ■

Legyenek adottak tehát az (X_i, Θ_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértékterek, amelyek közül az egyik σ-véges. Írjunk a 2.9.4. Tételben az (X, Ω, μ) helyébe (X_1, Θ_1, μ_1)-et, az (Y, Θ, ν) helyébe pedig (X_2, Θ_2, μ_2)-t (ha pl. a μ_2 szigma-véges), és alkalmazzuk a 2.3., 2.5. pontokban tárgyalt kiterjesztési eljárást az említett tételben szereplő φ halmazfüggvényre. Ennek az eredményeképpen egy olyan $\mu_1 \otimes \mu_2$-vel jelölt mértéket kapunk az $\Theta_1 \otimes \Theta_2$-n, amelyikre

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\cdot \mu_2(B) \qquad (A \in \Theta_1,\ B \in \Theta_2)$$

igaz.

Sőt – amint az könnyen belátható – amennyiben a μ_1, μ_2 mértékek mindegyike σ-véges, akkor a 2.9.3. Tételbeli φ halmazfüggvény is σ-véges. Ebben az esetben tehát alkalmazható a 2.5.4. Tétel is, miszerint a $\mu_1 \otimes \mu_2$ az egyetlen olyan mérték az $\Theta_1 \otimes \Theta_2$-n, amelyikre az előbbi egyenlőség fennáll.

2.9.5. Definíció. A fentiekben értelmezett

$$(X_1 \times X_2, \Theta_1 \otimes \Theta_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

mértékteret az (X_i, Θ_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértékterek *szorzatának*, a $\mu_1 \otimes \mu_2$ mértéket pedig a μ_1 és a μ_2 által meghatározott *szorzatmértéknek* nevezzük.

Az előző definíció természetesen minden további nélkül átvihető véges sok, kettőnél több mértéktér esetére. Mi a helyzet azonban akkor, ha végtelen sok mértékterünk van, és ezek „szorzatát" szeretnénk valahogyan a 2.9.5. Definíció szellemében értelmezni? Némi megszorítás mellett ez is egyszerűen megtehető.

Legyen ehhez $\mathcal{J}$ egy nem üres („index") halmaz, és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathcal{J}$ esetén adott egy (X_i, Θ_i, μ_i) mértéktér. Az X_i $(i \in \mathcal{J})$ halmazok Descartes-szorzatát a jól ismert módon az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i := \Big\{\varphi : \mathcal{J} \to \bigcup_{j\in\mathcal{J}} X_j : \varphi(i) \in X_i \quad (i \in \mathcal{J})\Big\}.$$

Nevezzünk egy $A \subset \prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$ halmazt *hengerhalmaznak,* ha van olyan véges $\mathcal{J}_0(A) \subset \mathcal{J}$ halmaz, hogy

$$Y_i := \{\varphi(i) \in X_i : \varphi \in A\} \in \Theta_i \qquad \Big(i \in \mathcal{J}_0(A)\Big)$$

és

$$\{\varphi(i) \in X_i : \varphi \in A\} = X_i \qquad \Big(i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0(A)\Big),$$

továbbá $\varphi \in \prod_{i\in\mathcal{J}} X_i$, $\varphi(i) \in Y_i$ $(i \in \mathcal{J}_0(A))$ esetén $\varphi \in A$. Jelöljük az így értelmezett hengerhalmazok rendszerét $\mathcal{H}$-val, ekkor (könnyen belátható, hogy) a $\mathcal{H}$ egy félgyűrű. Ha pl. $\mathcal{J} := \{1, 2\}$, akkor a hengerhalmazok $A \times X_2$ $(A \in \Theta_1)$ vagy $X_1 \times B$ $(B \in \Theta_2)$ alakúak.

A szorzatmérték értelmezéséhez feltesszük, hogy minden $i \in \mathcal{J}$ esetén $\mu_i(X_i) = 1$. Ekkor igaz a 2.9.4. Tétel megfelelője, miszerint a

$$\mathcal{H} \ni A \mapsto \prod_{i\in\mathcal{J}_0(A)} \mu_i\Big(\{\varphi(i) \in X_i : \varphi \in A\}\Big)$$

leképezés σ-additív. Innentől kezdve „működik" a fentebb már idézett kiterjesztési eljárás.

2.10. Megjegyzések

i) Igen tanulságos a 2.9.3. Lemma alábbi bizonyítása is.

Legyen ehhez $\Gamma := \{0, 1, ..., n\}$. Jegyezzük meg először is azt, hogy (a lemmabeli jelölésekkel) a feltételeink miatt $X = \bigcup_{i\in\Gamma} A_i$, ezért, ha a szóban forgó $A_i \neq \emptyset$ $(i \in \Gamma)$ halmazok páronként diszjunktak, akkor az állítás eléggé nyilvánvaló. Ebben az esetben ui. bármelyik $j \in \Gamma$ és $x \in A_j$ választással

$$\beta \le \sum_{i\in\Gamma} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x) = \alpha_j \le \alpha.$$

Következésképpen

$$\beta \cdot \mu(X) = \beta \cdot \sum_{j\in\Gamma} \mu(A_j) \le \sum_{j\in\Gamma} \alpha_j \cdot \mu(A_j) \le \alpha \cdot \sum_{j\in\Gamma} \mu(A_j) = \alpha \cdot \mu(X).$$

Tetszőleges, a lemmában szereplő A_i $(i \in \Gamma)$ halmazok mellett tekintsük a Γ index-halmaz

$$S \subset \Gamma,\ S' := \Gamma \setminus S$$

részhalmazait, és minden ilyen $\Gamma \neq S$-re legyen

$$F_S := \bigcap_{i \in S} \bigcap_{j \in S'} A_i \cap (X \setminus A_j),$$

valamint

$$F_\Gamma := \bigcap_{i \in \Gamma} A_i\ ,\ F_\emptyset := \bigcap_{j \in \Gamma} (X \setminus A_j).$$

Nyilvánvaló, hogy $F_S \in \Omega$, és $S, P \subset \Gamma$, $S \neq P$ esetén $F_S \cap F_P = \emptyset$. (Utóbbihoz vegyük figyelembe, hogy ha pl. $i \in S \setminus P$, akkor $F_S \subset A_i$, $F_P \subset X \setminus A_i$.)

Mutassuk meg, hogy a $\Gamma_i := \{S \in \mathcal{P}(\Gamma) : i \in S\}$ jelöléssel

$$A_i = \bigcup_{S \in \Gamma_i} F_S \qquad (i \in \Gamma).$$

Az előbbiek szerint ehhez már csak azt kell belátni, hogy minden $\Gamma \ni i$-re

$$A_i \subset \bigcup_{S \in \Gamma_i} F_S.$$

Vegyük ehhez az $i \in \Gamma$, $x \in A_i$ elemeket, és definiáljuk az $S \subset \Gamma$ halmazt az alábbi módon:

$$j \in S \iff x \in A_j.$$

Világos, hogy $i \in S$ és $x \in F_S$. A bizonyítás elején tett észrevételünk alapján tehát

$$X = \bigcup_{i \in \Gamma} A_i = \bigcup_{i \in \Gamma} \bigcup_{S \in \Gamma_i} F_S = \bigcup_{S \subset \Gamma} F_S$$

egy páronként diszjunkt halmazokból álló felbontása az X-nek, mégpedig (nyilván) véges sok mérhető halmazra.

Ha $\beta_S := \sum_{i \in S} \alpha_i$ $(S \subset \Gamma)$, akkor a feltételeink szerint

$$\beta \leq \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x) = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \cdot \sum_{S \in \Gamma_i} \chi_S(x) = \sum_{S \subset \Gamma} \beta_S \cdot \chi_{F_S}(x) \leq \alpha \qquad (x \in X),$$

amiből a „diszjunkt" esetet figyelembe véve

$$\beta \cdot \mu(X) \leq \sum_{S \subset \Gamma} \beta_S \cdot \mu(F_S) = \sum_{S \subset \Gamma} \Big(\sum_{i \in S} \alpha_i \Big) \cdot \mu(F_S) = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \cdot \sum_{S \in \Gamma_i} \mu(F_S) =$$

$$\sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \leq \alpha \cdot \mu(X)$$

következik.

ii) Legyen $1 \le p, q \in \mathbf{N}$, és lássuk be, hogy

$$\Omega_p \otimes \Omega_q = \Omega_{p+q}.$$

Tekintsük ehhez először is az $I \in \mathbf{I}_p$ intervallumot és az

$$\Omega_I := \{B \in \Omega_q : I \times B \in \Omega_{p+q}\}$$

halmazrendszert. Ekkor egyrészt tetszőleges $J \in \mathbf{I}_q$ intervallummal $I \times J \in \mathbf{I}_{p+q}$, így egyúttal $I \times J \in \Omega_{p+q}$, tehát $\mathbf{I}_q \subset \Omega_I$. Másrészt az Ω_I szigma-algebra. Valóban, alkalmas $J_n \in \mathbf{I}_q \quad (n \in \mathbf{N})$ intervallumokkal $\mathbf{R}^q = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$, ezért $I \times J_n \in \Omega_{p+q}$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt

$$I \times \mathbf{R}^q = \bigcup_{n=0}^{\infty} (I \times J_n) \in \Omega_{p+q}.$$

Más szóval $\mathbf{R}^q \in \Omega_I$. Ha $B \in \Omega_I$, azaz $I \times B \in \Omega_{p+q}$, akkor

$$I \times (\mathbf{R}^q \setminus B) = (I \times \mathbf{R}^q) \setminus (I \times B) \in \Omega_{p+q}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{R}^q \setminus B \in \Omega_I$ is igaz. Ha pedig $B_n \in \Omega_I \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $I \times B_n \in \Omega_{p+q} \quad (n \in \mathbf{N})$ alapján

$$I \times \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (I \times B_n) \in \Omega_{p+q},$$

azaz $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega_I$.

Tehát az Ω_I az $\mathbf{I}_q$-t lefedő szigma-algebra, következésképpen

$$\Omega_q = \Omega(\mathbf{I}_q) \subset \Omega_I,$$

és így a nyilvánvaló $\Omega_I \subset \Omega_q$ tartalmazásra tekintettel $\Omega_I = \Omega_q$. Másképp fogalmazva bármilyen $I \in \mathbf{I}_p$ intervallum és $B \in \Omega_q$ halmaz esetén $I \times B \in \Omega_{p+q}$. Ha tehát $B \in \Omega_q$ és

$$\Omega_B := \{A \in \Omega_p : A \times B \in \Omega_{p+q}\},$$

akkor $\mathbf{I}_p \subset \Omega_B$. Könnyen adódik az is, hogy az Ω_B is szigma-algebra. Ti. alkalmas $I_n \in \mathbf{I}_p \quad (n \in \mathbf{N})$ intervallumokkal $\mathbf{R}^p = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, amiből (ld. fent) $I_n \times B \in \Omega_{p+q}$ $(n \in \mathbf{N})$ és

$$\mathbf{R}^p \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (I_n \times B) \in \Omega_{p+q}$$

alapján $\mathbf{R}^p \times B \in \Omega_{p+q}$, azaz $\mathbf{R}^p \in \Omega_B$ rögtön adódik. Ha $A \in \Omega_B$, ill. $A_n \in \Omega_B$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az $\mathbf{R}^p \setminus A \in \Omega_B$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega_B$ tartalmazások a fentiekhez hasonlóan következnek. Tehát az Ω_B is szigma-algebra, ezért $\mathbf{I}_p \subset \Omega_B$ miatt

$$\Omega_p = \Omega(\mathbf{I}_p) \subset \Omega_B \ (\subset \Omega_p),$$

és így egyúttal $\Omega_p = \Omega_B$.

Ezzel (figyelembe véve az Ω_B definícióját) az derült ki, hogy

$$\mathcal{M}_{pq} := \{A \times B : A \in \Omega_p,\ B \in \Omega_q\} \subset \Omega_{p+q},$$

amiből

$$\Omega_p \otimes \Omega_q = \Omega(\mathcal{M}_{pq}) \subset \Omega_{p+q}$$

máris következik. A „fordított" irányú tartalmazáshoz vegyük észre, hogy bármilyen $L \in \mathbf{I}_{p+q}$ intervallum alkalmas $I \in \mathbf{I}_p$, $J \in \mathbf{I}_q$ intervallumokkal előállítható $L = I \times J$ alakban. Mivel $I \in \Omega_p$, $J \in \Omega_q$, ezért $L \in \mathcal{M}_{pq}$, ennélfogva $L \in \Omega_p \otimes \Omega_q$, azaz $\mathbf{I}_{p+q} \subset \Omega_p \otimes \Omega_q$ és

$$\Omega_{p+q} = \Omega(\mathbf{I}_{p+q}) \subset \Omega_p \otimes \Omega_q.$$

iii) Jegyezzük meg, hogy a ii)-ben mondottak nem maradnak igazak, ha abban az Ω_p, Ω_q Borel-féle szigma-algebrákat az $\hat{\Omega}_p$, $\hat{\Omega}_q$ Lebesgue-rendszerekre cseréljük ki:

$$\hat{\Omega}_p \otimes \hat{\Omega}_q \subset \hat{\Omega}_{p+q},$$

de $\hat{\Omega}_p \otimes \hat{\Omega}_q \neq \hat{\Omega}_{p+q}$. Mindebből a „$\subset$" tartalmazás a ii)-höz hasonlóan „intézhető el". A „$\neq$" részhez legyen (az egyszerűség kedvéért a $p = q = 1$ esetben fogalmazva meg) az $A \subset (0,1)$ egy nem Lebesgue-mérhető halmaz (ld. 2.8. ix) megjegyzés), azaz $A \notin \hat{\Omega}_1$, ekkor

$$\mathcal{A} := \{0\} \times A \in \hat{\Omega}_2.$$

Valóban, legyen $\delta > 0$, ekkor

$$\mathcal{A} \subset T := (-\delta, \delta) \times (0,1) \in \mathcal{T}_2,$$

ahol $\hat{\mu}_2(T) = 2\delta$. Ezért (ld. 2.8. xii) megjegyzés) $\mathcal{A} \in \hat{\Omega}_2$ (és $\hat{\mu}_2(\mathcal{A}) = 0$). Ugyanakkor

$$\mathcal{A}_0 = A \notin \hat{\Omega}_1,$$

ezért a 2.9.2. Lemma értelmében $\mathcal{A} \notin \hat{\Omega}_1 \otimes \hat{\Omega}_1$.

2.11. Előjeles mértékek

Legyen adott az (X, Ω) mérhető tér, a $\mu : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ pedig legyen egy leképezés. Az eddig vizsgált mértékek mind ilyen típusú függvények voltak, azzal a megszorítással, hogy a μ nemnegativitását is eleve megköveteltük. Számos kérdésben ez utóbbi feltételezés nem játszik igazán lényeges szerepet, szinte „egy az egyben" el is hagyható. Ebben a pontban ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk röviden, legfontosabb eredményként megmutatva, hogy minden ún. előjeles mérték felírható két mérték különbségeként.

Mindehhez először is vezessük be az alábbi definíciót.

2.11.1. Definíció. A fenti μ leképezést *előjeles mértéknek* nevezzük, ha

i) az $\mathcal{R}_\mu \cap \{-\infty, +\infty\}$ halmaz legfeljebb 1-elemű;

ii) $\mu(\emptyset) = 0$;

iii) a μ szigma-additív.

A nem-negativitás helyett tehát csupán annyi megkötést teszünk, hogy a μ leképezés a $-\infty$ és a $+\infty$ közül legfeljebb az egyiket vehesse fel helyettesítési értékként. Azt mondjuk, hogy a μ *véges*, ha $|\mu(X)| < +\infty$. Továbbá a μ előjeles mérték *σ-véges*, ha megadható páronként diszjunkt $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazoknak egy olyan sorozata, hogy $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ és $|\mu(A_n)| < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$.

Az első állításban a mértékekkel kapcsolatban már jól ismert néhány alapvető tulajdonságot bizonyítunk be előjeles mértékekre, nevezetesen (az eddigi jelöléseket megtartva) igaz a

2.11.2. Tétel. *A szóban forgó $\mu : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ előjeles mértékre az alábbiak teljesülnek:*

a) *ha $A, B \in \Omega$, $A \subset B$ és $|\mu(B)| < +\infty$, akkor $|\mu(A)| < +\infty$;*

b) *legyenek az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és*

$$\Big|\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big)\Big| < +\infty,$$

ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n)| < +\infty$;

c) *a μ függvényre is fennáll a félig folytonosság kritériuma, nevezetesen, ha*

$$A_n,\ B_n \in \Omega,\ A_n \subset A_{n+1},\ B_{n+1} \subset B_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és valamilyen $N \in \mathbf{N}$ indexre $|\mu(B_N)| < +\infty$, akkor

1° $\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

2° $\mu\Big(\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

Bizonyítás.

a) A $|\mu(B)| = |\mu(B \setminus A) + \mu(A)| < +\infty$ becslés, és a 2.11.1. Definíció i) pontja miatt triviálisan igaz, hogy $\mu(B \setminus A), \mu(A) \in \mathbf{R}$.

b) Tekintsük a következő halmazokat:

$$A_n^+ := \begin{cases} A_n & (\mu(A_n) \geq 0) \\ \emptyset & (\mu(A_n) < 0) \end{cases},\ A_n^- := \begin{cases} A_n & (\mu(A_n) < 0) \\ \emptyset & (\mu(A_n) \geq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^+ \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^- \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, és a) miatt

$$\Big|\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^+\Big)\Big| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n^+) < +\infty, \quad \Big|\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^-\Big)\Big| = -\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n^-) < +\infty.$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\mu(A_n^+) - \mu(A_n^-)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n^+) - \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n^-) < +\infty,$$

ami a b) állítás igazolását jelenti.

A c)-ben szereplő 1° reláció bizonyításához legyen

$$D_0 := A_0, \; D_n := A_n \setminus A_{n-1} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Az így definiált D_n halmazok Ω-beliek, páronként diszjunktak, és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, amiből

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{n} D_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

következik.

A 2° bizonyításához használjuk fel az a)-beli becslést:

$$|\mu(B_n)| < +\infty \qquad (\mathbf{N} \ni n \ge N).$$

A feltételek miatt $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=N}^{\infty} B_n$, valamint

$$\mu(B_N) = \mu\Big(B_N \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big) + \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big), \; \Big|\mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big)\Big| < +\infty$$

alapján

$$\mu\Big(B_N \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \mu(B_N) - \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big).$$

A $B_N \setminus B_n$ $(\mathbf{N} \ni n \ge N)$ halmazsorozatra nyilván alkalmazható az 1° állítás, miszerint

$$\mu(B_N) - \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \mu\Big(B_N \setminus \bigcap_{n=N}^{\infty} B_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} (B_N \setminus B_n)\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_N \setminus B_n) = \mu(B_N) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

A $|\mu(B_N)| < +\infty$ feltétel miatt innen a 2° egyenlőség már rögtön adódik. ■

A 2.11. pont fő tétele a következő, az előjeles mértékek korábban már említett felbontása szempontjából alapvető fontosságú Hahn-féle tétel.

2.11.3. Tétel (Hahn-felbontás). *Legyen az* (X, Ω) *mérhető tér, a* $\mu : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *függvény pedig előjeles mérték. Ekkor megadhatók olyan* X^+, $X^- \in \Omega$ *halmazok, amelyekkel az alábbiak teljesülnek*:

i) $X^+ \cap X^- = \emptyset$ és $X = X^+ \cup X^-$;

ii) *bármelyik* $A \in \Omega$ *esetén* $A \cap X^+$, $A \cap X^- \in \Omega$, *és*

$$\mu(A \cap X^+) \geq 0, \ \mu(A \cap X^-) \leq 0.$$

A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy a ii)-ben $A := X$-et választva

$$\mu(X^+) \geq 0, \ \mu(X^-) \leq 0$$

következik.

Bizonyítás. Nyilván feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy $-\infty \notin \mathcal{R}_\mu$, azaz tetszőleges $A \in \Omega$ esetén $-\infty < \mu(A) \leq +\infty$. Legyen

$$\mathcal{N} := \{A \in \Omega : \mu(A \cap B) \leq 0 \ \ (B \in \Omega)\}.$$

Speciálisan $\emptyset \in \mathcal{N}$, hiszen $\mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0 \quad (B \in \Omega)$, és minden $A \in \mathcal{N}$ halmazra

$$\mu(A) = \mu(A \cap X) \leq 0.$$

A „negatív halmazokból" álló $\mathcal{N}$ halmazrendszer σ-gyűrű (ld. 2.2. xiv) megjegyzés), azaz bármelyik két elemével együtt azok különbségét is, továbbá megszámlálható sok elemével együtt azok egyesítését is tartalmazza. Valóban, ha $A, B \in \mathcal{N}$, akkor tetszőleges $D \in \Omega$ halmazra

$$\mu\Big((A \setminus B) \cap D\Big) = \mu\Big(A \cap (D \setminus B)\Big) \leq 0,$$

mivel $D \setminus B \in \Omega$, $A \in \mathcal{N}$. Tehát $A \setminus B \in \mathcal{N}$. Ha az $A_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \cap D)$ az előbbi D halmaznak egy diszjunkt, Ω-beli halmazokra való felbontása, ezért

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \bigcap D\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n \cap D) \leq 0,$$

így $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$. Innen a „szokásos" technikával kapjuk az analóg állítást a páronkénti diszjunktivitás feltétele nélkül is. Ha ui. A, $B \in \mathcal{N}$, akkor

$$A \cup B = (A \setminus B) \bigcup B \bigcup \Big(\bigcup_{n=2}^{\infty} \emptyset\Big) \in \mathcal{N},$$

lévén az itt szereplő halmazok páronként diszjunkt, $\mathcal{N}$-beli halmazok. Az $\mathcal{N}$ tehát gyűrű (ld. 2.1.2 Definíció). Legyenek most az $A_n \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazok valamennyien $\mathcal{N}$-ben, ekkor a

$$B_0 := A_0, \ B_n := A_n \setminus \Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Big) \in \mathcal{N} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazokra

$$B_k \cap B_j = \emptyset \quad (k \neq j) \qquad (1 \leq k, j \in \mathbf{N}),$$

következésképpen

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{N},$$

amint azt állítottuk.

A tételben említett X^- halmaz konstrukciójához legyen

$$\beta := \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{N}\},$$

és $A_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbf{N})$ egy olyan halmazsorozat, amelyikre $\beta = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Ha

$$X^- := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

akkor az előbb mondottak alapján $X^- \in \mathcal{N}$ (azaz az X^--ra vonatkozó állítások igazak), és $\mu(X^-) = \beta$. Az utóbbi egyenlőség igazolásához vegyük figyelembe, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$A_n,\ X^- \setminus A_n \in \mathcal{N} \Longrightarrow \mu(A_n) \leq 0,\ \mu(X^- \setminus A_n) \leq 0.$$

Az $X^- = A_n \cup (X^- \setminus A_n)$ felbontás miatt tehát

$$\beta \leq \mu(X^-) = \mu(A_n) + \mu(X^- \setminus A_n) \leq \mu(A_n) \to \beta \qquad (n \to \infty),$$

más szóval valóban igaz, hogy $\mu(X^-) = \beta$. (Mivel $-\infty \notin \mathcal{R}_\mu$, ezért $-\infty < \beta \leq 0$.)

Megmutatjuk, hogy az

$$X^+ := X \setminus X^-$$

halmaz eleget tesz az X^+-t illető kívánalmaknak. Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy valamilyen $\Omega \ni E_0 \subset X^+$ halmazra $\mu(E_0) < 0$ teljesül. Ekkor $E_0 \notin \mathcal{N}$, különben

$$X^- \cup E_0 \in \mathcal{N},\ \mu(X^- \cup E_0) = \mu(X^-) + \mu(E_0) < \beta$$

lenne, ami nyilván nem lehet.

Legyen $\tilde{E}_0 := \{E \in \Omega : E \subset E_0,\ \mu(E) > 0\}$ $(\neq \emptyset$, ui. $E_0 \notin \mathcal{N})$, és

$$k_1 := \min\Big\{0 < k \in \mathbf{N} : \{E \in \tilde{E}_0 : \mu(E) \geq 1/k\} \neq \emptyset\Big\},$$

továbbá legyen $\Omega \ni E_1 \subset E_0$ olyan halmaz, amelyikre $\mu(E_1) \geq 1/k_1$. A 2.11.2. Tétel a) pontja alapján $\mu(E_1) < +\infty$ (mivel $-\infty < \mu(E_0) < 0$), így

$$\mu(E_0 \setminus E_1) = \mu(E_0) - \mu(E_1) \leq \mu(E_0) - 1/k_1 < 0.$$

Tehát megismételhetők az előbb mondottak az E_0 helyett az $E_0 \setminus E_1$ halmazra, amikor is egy olyan $\Omega \ni E_2 \subset E_0 \setminus E_1$ halmazt kapunk, hogy $\mu(E_2) \geq 1/k_2$,

$$k_2 := \min\Big\{0 < k \in \mathbf{N} : \{E \in \Omega \cap \mathcal{P}(E_0 \setminus E_1) : \mu(E) \geq 1/k\} \neq \emptyset\Big\}$$

teljesül.

Az előbbi eljárást folytatva egy $E_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozathoz jutunk, amelyikre

$$E_{n+1} \subset E_0 \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big), \quad \mu(E_{n+1}) \geq 1/k_{n+1},$$

$$k_{n+1} := \min\Big\{0 < k \in \mathbf{N} : \{E \in \Omega \cap \mathcal{P}(E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j) : \mu(E) \geq 1/k\} \neq \emptyset\Big\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E_0$ és $|\mu(E_0)| < +\infty$, ezért a 2.11.2. Tétel miatt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$, így $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Következésképpen $\lim_{n\to\infty} 1/k_n = 0$.

Ha

$$F_0 := E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,$$

akkor $\Omega \ni F \subset F_0$ esetén

$$F \subset E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j \qquad (n \in \mathbf{N})$$

is igaz, amiből pedig (ha már $k_{n+1} > 1$) a $\mu(F) < 1/(k_{n+1} - 1)$ becslés adódik. Vegyük figyelembe, hogy $\lim_{n\to\infty} 1/k_n = 0$, ezért $\mu(F) \leq 0$. Továbbá

$$\mu(F_0) = \mu(E_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \mu(E_0) < 0.$$

Összefoglalva tehát:

$$F_0 \in \mathcal{N}, \ F_0 \cap X^- = \emptyset, \ \mu(F_0) < 0.$$

Mindezekből az következne, hogy $F_0 \cup X^- \in \mathcal{N}$, valamint

$$\mu(F_0 \cup X^-) = \mu(F_0) + \mu(X^-) < \mu(X^-) = \beta,$$

ami nyilván nem lehet. ■

Könnyű meggondolni, hogy az előbbi tételben szereplő X^+, X^- halmazokra egyfajta egyértelműség is teljesül a következő értelemben: ha az $\tilde{X}^+$, $\tilde{X}^-$ halmazok is eleget tesznek a 2.11.3. Tételben kirótt feltételeknek, akkor minden $A \in \Omega$ halmazra

$$\mu(A \cap X^+) = \mu(A \cap \tilde{X}^+), \ \mu(A \cap X^-) = \mu(A \cap \tilde{X}^-).$$

Ui. (például az első egyenlőséget illetően)

$$\mu(A \cap X^+) = \mu(A \cap X^+ \cap \tilde{X}^+) + \mu(A \cap X^+ \cap \tilde{X}^-),$$

ahol

$$A \cap X^+ \cap \tilde{X}^- = (A \cap \tilde{X}^-) \cap X^+ = (A \cap X^+) \cap \tilde{X}^-$$

miatt $0 \le \mu(A \cap X^+ \cap \tilde{X}^-) \le 0$, tehát $\mu(A \cap X^+ \cap \tilde{X}^-) = 0$. Ezért

$$\mu(A \cap X^+) = \mu(A \cap X^+ \cap \tilde{X}^+).$$

Innen (az X-et és az $\tilde{X}$-ot felcserélve) kapjuk a $\mu(A \cap X^+) = \mu(A \cap \tilde{X}^+)$ egyenlőséget, és hasonlóan a másikat is.

Következésképpen értelmezhetünk két halmazfüggvényt az Ω szigma-algebrán az alábbi utasításnak megfelelően:

$$\mu^+(A) := \mu(A \cap X^+),\ \mu^-(A) := -\mu(A \cap X^-) \qquad (A \in \Omega),$$

ahol az X^+, X^- a 2.11.3. Tételben szereplő (az ottani feltételeknek eleget tevő tetszőleges) halmazok.

2.11.4. Definíció. Az előbbi μ előjeles mérték esetén

i) μ^+ a μ *pozitív*, μ^- pedig a μ *negatív variációja*;

ii) $[\mu] := \mu^+ + \mu^-$ a μ *(totális) variációja.*

A fentiek alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

2.11.5. Tétel (Jordan-felbontás). *Bármilyen (X, Ω) mérhető tér és $\mu : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ előjeles mérték esetén*

i) *a μ^+, μ^- halmazfüggvények mértékek, továbbá $\mu = \mu^+ - \mu^-$;*

ii) *a μ^+, μ^- mértékek közül legalább az egyik véges;*

iii) *ha a μ mérték véges (σ-véges), akkor a μ^+, μ^- mértékek is végesek (σ-végesek).*

Nem nehéz belátni, hogy a 2.11.5. Tételben kapott μ^+, μ^- mértékekre az alábbiak igazak: ha $A \in \Omega$, akkor

a) $\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Omega,\ B \subset A\}$;

b) $\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) : B \in \Omega,\ B \subset A\}$.

Valóban, ha $\Omega \ni B \subset A$, akkor (ld. 2.11.3. Tétel)

$$\mu(B) = \mu(B \cap X^+) + \mu(B \cap X^-) \le \mu(B \cap X^+) = \mu^+(B) \le \mu^+(A)$$

(a legutolsó becslésben kihasználva a μ^+ mérték monotonitását (ld. 2.3.1.3. Tétel)). Azt kell már csak észrevenni, hogy $\Omega \ni A \cap X^+ \subset A$ és $\mu(A \cap X^+) = \mu^+(A)$. (A μ^--ra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.)

2.12. Megjegyzések

i) A 2.11.3. Tétel bizonyításában (a tételben és a bizonyításban használt jelölésekkel) kiderült, hogy ha létezik az $X = X^+ \cup X^-$ Hahn-felbontás, akkor (a $-\infty \notin \mathcal{R}_\mu$ esetben)

$$\mu(X^-) = \min\{\mu(A) : A \in \mathcal{N}\}.$$

ii) Az i)-ben említett minimum-tulajdonság a 2.11.3. Tétel bizonyításától függetlenül is látható. Ha ui. $A \in \mathcal{N}$, akkor egyrészt $\mu(A \cap X^+) \leq 0$ (mivel $A \in \mathcal{N}$), másrészt (az X^+ tulajdonságaiból következően) $\mu(A \cap X^+) \geq 0$, így $\mu(A \cap X^+) = 0$, amiből

$$\mu(A) = \mu(A \cap X^-) + \mu(A \cap X^+) = \mu(A \cap X^-)$$

következik. Ez utóbbit felhasználva viszont

$$\mu(X^-) = \mu(A \cap X^-) + \mu((X \setminus A) \cap X^-) \leq \mu(A \cap X^-) = \mu(A),$$

mivel (az X^- tulajdonságaira tekintettel) $\mu((X \setminus A) \cap X^-) \leq 0$.

iii) A már említett 2.11.3. Tételt illetően valójában azt bizonyítottuk be, hogy ha valamilyen $X^- \in \mathcal{N}$ halmazra

$$\mu(X^-) = \min\{\mu(A) : A \in \mathcal{N}\},$$

akkor az X^-, $X^+ := X \setminus X^-$ halmazok eleget tesznek a Hahn-felbontással kapcsolatos követelményeknek.

3. fejezet

Az integrál fogalma

Ebben a fejezetben egy (X, Ω, μ) mértéktér esetén az X-en értelmezett bizonyos $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények körében szeretnénk *az f függvénynek a μ mérték szerinti $\int f\, d\mu$ integrálját* értelmezni. Az integrálfogalom felépítése során – Riesz Frigyes gondolatmenetét követve – az ebből a szempontból igen egyszerű függvényekből, az ún. *lépcsősfüggvényekből* indulunk ki. Ezek integrálját meglehetősen természetes módon, az elemi geometriai szemléletnek megfelelően definiáljuk. A lépcsősfüggvények halmazát fokozatosan bővítjük az integrálható függvények osztályává, mindig szem előtt tartva azt a kívánalmat, hogy ez az osztály – lehetőleg minél kevesebb plusz feltétel mellett – „zárt" legyen a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciájára nézve.

A bevezető mondatban említett „bizonyos függvények" kitétel – mint látni fogjuk – a szóban forgó leképezések mérhetőségét fogja jelenteni. (A 2. fejezetben már röviden érintettük ezt a fogalmat (ld. 2.7.1. pont).) A továbbiakban – az integrál előkészítése szempontjából – a mérhető függvények egy speciális osztályára lesz szükségünk, ezek az ún. *Borel-mérhető függvények.* A 3.1. pontban ezekkel foglalkozunk, röviden összefoglalva a legszükségesebb fogalmakat és tételeket.

3.1. Borel-mérhető leképezések

Emlékeztetünk arra (ld. 2.7.1.1. Definíció), hogy egy $A \subset \mathbf{R}$ halmazt Borel-mérhetőnek nevezünk, ha $A \in \Omega(\mathcal{I}) = \Omega(\mathbf{I})$, ahol az $\mathbf{I}$ halmazrendszer az $\mathbf{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumainak a félgyűrűje, az $\mathcal{I}$ pedig az $\mathbf{I}$ által generált legszűkebb $\mathbf{R}$-beli gyűrű (ld. 2.1.). Terjesszük ki a Borel-mérhetőség fogalmát a kibővített $\overline{\mathbf{R}}$ számegyenes részhalmazaira is a következőképpen. Legyen tehát továbbra is

$$\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

(az $\mathbf{R}$-beli műveleteket és rendezést a szokásos módon kiterjesztve az $\overline{\mathbf{R}}$-ra), és nevezzünk egy $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ halmazt *kibővített értelemben Borel-mérhetőnek*, ha valamilyen $B \subset \mathbf{R}$ Borel-

mérhető halmazzal $B \subset A$ és $(A \setminus B) \cap \mathbf{R} = \emptyset$.

Világos, hogy minden Borel-mérhető halmaz a most mondott kibővített értelemben is Borel-mérhető, továbbá a $\{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}$ halmazok is ilyenek. A kibővített értelemben Borel-mérhető halmazok rendszere is (könnyen beláthatóan) egy ($\overline{\mathbf{R}}$-beli) szigma-algebra. Ennek a szigma-algebrának minden eleme $B \cup C$ alakú, ahol $B \in \Omega(\mathbf{I})$ és

$$C \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}.$$

A továbbiakban *Borel-halmazon* kibővített értelemben Borel-mérhető halmazt fogunk érteni.

Legyen az $X \neq \emptyset$ (nem üres) halmaz, (X, Ω) pedig mérhető tér (ld. 2.5.). A további fejezetekben azok az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények játszanak meghatározó szerepet, amelyek bizonyos értelemben összekapcsolják az $\overline{\mathbf{R}}$-beli Borel-halmazokat az Ω-beli (Ω-mérhető) halmazokkal. Ezek a függvények az Ω szigma-algebrára nézve mérhető függvények.

3.1.1. Definíció. Az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ leképezést *mérhetőnek* (*Borel-mérhetőnek*) nevezzük, ha minden $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmaznak az f által létesített $f^{-1}[A]$ ősképe az Ω-ban van:

$$f^{-1}[A] := \{x \in X : f(x) \in A\} \in \Omega.$$

Például a későbbiekben alapvetően fontos szerepet játszó karakterisztikus függvények (ld. 2.9.) mérhetőségéről a következőt mondhatjuk: ha $Y \subset X$ és

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & (x \in Y) \\ \\ 0 & (x \in X \setminus Y), \end{cases}$$

akkor a χ_Y mérhetősége nyilván ekvivalens azzal, hogy $Y \in \Omega$. Speciálisan minden konstansfüggvény is nyilván mérhető.

Az első tételben megmutatjuk, hogy a leképezések mérhetőségének a fenti definíciójában szereplő feltételt a Borel-halmazok helyett elegendő lényegesen kevesebb és egyszerűbb szerkezetű halmazon ellenőrizni.

3.1.2. Tétel. *Az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény akkor és csak akkor mérhető, ha tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén*

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \Omega.$$

Bizonyítás. Mivel minden $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett $[\alpha, +\infty] \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmaz, ezért az f mérhetőségét feltételezve

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}\Big[[\alpha, +\infty]\Big] \in \Omega.$$

Tehát a tételben szereplő feltétel szükségessége nyilvánvaló.

Az elégségesség bizonyításához legyen

$$\tilde{\Omega} := \Omega(\{[\alpha, +\infty] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}) : \alpha \in \mathbf{R}\}),$$

tehát a felülről nem korlátos zárt félegyenesek által meghatározott legszűkebb $\overline{\mathbf{R}}$-beli szigma-algebra. Megmutatjuk, hogy $\tilde{\Omega}$ minden Borel-halmazt tartalmaz. Valóban, ha valamilyen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ számokkal $\alpha \leq \beta$, akkor

$$[\alpha, \beta) = [\alpha, +\infty] \setminus [\beta, +\infty]$$

miatt $[\alpha, \beta) \in \tilde{\Omega}$. Ezért $\mathbf{I} \subset \tilde{\Omega}$, következésképpen $\Omega(\mathbf{I}) \subset \tilde{\Omega}$. Továbbá

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} [n, +\infty] \in \tilde{\Omega}, \ \{-\infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\overline{\mathbf{R}} \setminus [-n, +\infty]) \in \tilde{\Omega},$$

amiből az $\tilde{\Omega}$-ról mondott állítás már következik. Mivel tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén az $[\alpha, +\infty)$ félegyenes is és a $\{+\infty\}$ halmaz is Borel-halmaz, tehát az $\tilde{\Omega}$ minden eleme Borel-mérhető. Így az $\tilde{\Omega}$ megegyezik a Borel-mérhető halmazok rendszerével. Ekkor viszont a tételben szereplő feltétel elégségessége már adódik a 2.7.1.3. Lemmából. ■

Legyen általában a

$$* \in \{\geq, >, \leq, <, =, \neq\}$$

szimbólum és az

$$f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

leképezések esetén

$$\{f * g\} := \{x \in X : f(x) * g(x)\}.$$

Ha $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$, akkor az $\{f * \alpha\}$ halmaz legyen értelemszerűen a $g(x) := \alpha \quad (x \in X)$ konstans függvénynek megfelelő $\{f * g\}$ halmaz. Ezekkel a jelölésekkel nem nehéz belátni, hogy igaz a

3.1.3. Tétel. *A fenti (X, Ω) mérhető tér mellett*

1° *legyen $* \in \{\geq, >, \leq, <\}$, ekkor egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény mérhetősége azzal ekvivalens, hogy minden $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $\{f * \alpha\} \in \Omega$;*

2° *ha az $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények mérhetők, akkor*

$$\{f < g\}, \ \{f \leq g\}, \ \{f = g\}, \ \{f \neq g\} \in \Omega.$$

Bizonyítás. Ui. az 1° állítás egyszerűen következik a 3.1.2. Tétel és a σ-algebra axiómái (ld. 2.1.) alapján az

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \alpha + 1/n\},\ \{f \leq \alpha\} = X \setminus \{f > \alpha\},$$

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq \alpha - 1/n\},\ \{f \geq \alpha\} = X \setminus \{f < \alpha\}$$

egyenlőségekből. A 2°-höz vegyük észre, hogy

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r\}),\ \{f \leq g\} = X \setminus \{f > g\},$$

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\},\ \{f \neq g\} = X \setminus \{f = g\}.$$

Ennek alapján a 2° állítás az 1° és a σ-algebra axiómái miatt már nyilvánvaló. ■

A következőkben mérhető függvények között végzett bizonyos műveletek és a mérhetőség kapcsolatát vizsgáljuk. Elsőként megmutatjuk, hogy a mérhető függvények köréből az alapműveletek „nem vezetnek ki", nevezetesen igaz a

3.1.4. Tétel. *Az eddigi jelöléseket megtartva legyenek az $f, g : X \to \mathbf{R}$ függvények mérhetők. Ekkor az $f + g, f - g, f \cdot g$ függvények is mérhetők.*

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ választással az $\alpha + \beta \cdot f$ mérhető függvény. Ez ui. $\beta = 0$ esetén triviális, különben pedig bármilyen $\gamma \in \mathbf{R}$ mellett (ld. 3.1.2. Tétel)

$$\{\alpha + \beta \cdot f \geq \gamma\} = \{f \geq (\gamma - \alpha)/\beta\} \in \Omega,$$

tehát az $\alpha + \beta \cdot f$ mérhető. Speciális esetként kapjuk azt, hogy a $-g$ függvény mérhető.

Így az $f + g, f - g$ mérhetősége közül elegendő azt belátni, hogy az $f + g$ összegfüggvény mérhető, ami a 3.1.3. Tétel és az

$$\{f + g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha - g\} \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$$

egyenlőség miatt nyilvánvaló.

Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény mérhetőségét illetően tegyük fel először azt, hogy $f = g$. Ekkor a 3.1.3. Tétel és az

$$\{f^2 \geq \alpha\} = \{f \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f \leq -\sqrt{\alpha}\} \qquad (\alpha \geq 0),$$

$$\{f^2 \geq \alpha\} = X \qquad (\alpha < 0)$$

egyenlőség alapján $\{f^2 \geq \alpha\} \in \Omega$ $(\alpha \in \mathbf{R})$. Tetszőleges f-re és g-re pedig

$$f \cdot g = \frac{1}{4} \cdot \left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

miatt az eddig mondottakból már következik az $f \cdot g$ függvény mérhetősége. ■

Megjegyezzük, hogy ha az $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényekre létezik az

$$f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

összegfüggvény (azaz bármelyik $x \in X$ mellett az $\overline{\mathbf{R}}$-ban elvégezhető az $f(x)+g(x)$ összeadás), akkor a fentiekkel analóg módon kapjuk azt, hogy az $f+g$ függvény mérhető. Hasonló állítás igaz az $f - g$ függvényre is, feltételezve, hogy létezik az

$$f - g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvény.

Az előbbi észrevétel szellemében legyen

$$(\pm\infty) \cdot 0 := 0 \cdot (\pm\infty) := 0,$$

ekkor tetszőleges mérhető $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények esetén az

$$f \cdot g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

szorzatfüggvény mérhető.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az analízis egyik legalapvetőbb fogalma, a határérték és a mérhetőség „összeférhető" fogalmak, azaz a limesz-operátor alkalmazása nem rontja el egy mérhető függvényekből álló (pontonként) konvergens sorozat határfüggvényének a mérhetőségét. Sőt, igaz a

3.1.5. Tétel. *Tekintsük az eddigi (X, Ω) mérhető tér mellett az $f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \in \mathbf{N})$ mérhető függvényeket. Ekkor a*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup(f_n), \quad \liminf(f_n)$$

függvények is mérhetők.

Bizonyítás. Az előzőek alapján a bizonyítás már roppant egyszerű. Ha ui. $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor

$$\{\sup_n f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{f_n \leq \alpha\},$$

ahol minden $n \in \mathbf{N}$ indexre az $\{f_n \leq \alpha\}$ halmaz (ld. 3.1.3. Tétel) Borel-halmaz, ezért ezeknek a halmazoknak a metszete is az. Tehát a $\sup_n f_n$ felső burkoló függvény mérhető.

Az $\inf_n f_n$ alsó burkoló függvény mérhetősége hasonlóan adódik, de pl. az

$$\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$$

egyenlőségből is következik az előbbiek és a 3.1.4. Tétel alapján.

Végül

$$\limsup(f_n) = \inf_n \sup_{n \leq m} f_m, \ \liminf(f_n) = \sup_n \inf_{n \leq m} f_m$$

miatt a tétel többi állítása is következik. ■

Ugyanígy látható be (de a most bebizonyított tételből is következik), hogy ha az $\mathcal{M}$ véges sok mérhető $X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényből álló halmaz, akkor az

$$X \ni x \mapsto \sup\{f(x) : f \in \mathcal{M}\}, \ X \ni x \mapsto \inf\{f(x) : f \in \mathcal{M}\}$$

felső, ill. alsó burkoló függvények is mérhetők.

Ha az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ egy mérhető függvény, akkor az $|f|$ is mérhető, ui. az $|f|$ nem más, mint az $\{f, -f\}$ függvényhalmaz felső burkoló függvénye.

A 3.1.5. Tétel bevezetéseként mondottakhoz kapcsolódva legyen most a mérhető függvényekből álló $f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat pontonként konvergens, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Ekkor az f *határfüggvény* is mérhető, mivel (pl.) $f = \liminf(f_n)$.

A következő tételben tovább „erősítjük" az előbbieket. Megmutatjuk ui., hogy mérhető függvényekből álló, pontonként konvergens sorozat – bizonyos feltételek mellett – „majdnem" egyenletesen konvergens. Ez a „bizonyos" feltétel az (X, Ω) mérhető térhez illesztett mérték végessége, a „majdnem" egyenletes konvergencia pedig azt fogja jelenteni, hogy bármilyen pozitív szám mellett egy annál kisebb mértékű alkalmas halmazt kivéve a maradék halmazon az említett sorozat egyenletesen konvergens. Más szóval, a következő állítást látjuk be:

3.1.6. Tétel (Jegorov). *Legyen adott az* (X, Ω, μ) *mértéktér, és tegyük fel, hogy a* μ *mérték véges, az* $f_n : X \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ *mérhető függvényekből álló sorozat pedig pontonként konvergál az*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R} \qquad (x \in X)$$

határfüggvényhez. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ *számhoz megadható olyan* $X_\varepsilon \in \Omega$ *halmaz, hogy*

a) *az* (f_n) *sorozat az* X_ε *halmazon egyenletesen konvergál az* f*-hez;*

b) $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $0 < k \in \mathbf{N}$ és

$$X_{nk} := \bigcup_{i=n}^{\infty} \{|f_i - f| \geq 1/k\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az eddigiek szerint az így definiált halmazok valamennyien az Ω-ban vannak, és minden $0 < k \in \mathbf{N}$ indexhez megadható olyan $n_k \in \mathbf{N}$, amivel

$$\mu(X_{n_k k}) < \varepsilon \cdot 2^{-k}.$$

Valóban, bármilyen $0 < k \in \mathbf{N}$ esetén $X_{n+1k} \subset X_{nk} \quad (n \in \mathbf{N})$, valamint $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_{nk} = \emptyset$, ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel) $\lim_{n\to\infty} \mu(X_{nk}) = 0$.

Tegyük fel, hogy $x \in X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{n_k k}\right)$. Az itt szereplő halmazok értelmezése miatt minden $0 < k \in \mathbf{N}$ számra igaz a következő:

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/k \qquad (n_k \leq i \in \mathbf{N}).$$

Ha már most

$$X_\varepsilon := X \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{n_k k}\Big),$$

akkor $X_\varepsilon \in \Omega$, és

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_{n_k k}) < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon.$$

Továbbá tetszőleges $x \in X_\varepsilon$ pontban az $\mathbf{N} \ni i \geq n_k \quad (0 < k \in \mathbf{N})$ indexekre

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/k,$$

amiből a tételbeli egyenletes konvergencia az X_ε halmazon már következik. ■

3.2. Megjegyzések

i) Ha pl. $1 \le p \in \mathbf{N}$, $X := \mathbf{R}^p$, $\Omega := \Omega_p$ (ld. 2.7.1.1. Definíció), és az $f : X \to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény, akkor minden $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett az $\{f \ge \alpha\} = \{x \in X : f(x) \ge \alpha\}$ halmaz zárt, így (ld. 2.7.1.2. Tétel) az $\{f \ge \alpha\}$ Borel-halmaz. Tehát (ld. 3.1.2. Tétel) az f függvény Borel-mérhető.

ii) Az (X, Ω) mérhető tér esetén legyen $Y \in \Omega$ egy olyan mérhető halmaz, amelyikre $\mathcal{P}(Y) \subset \Omega$ teljesül (azaz az Y minden részhalmaza mérhető). Ha az $f : X \to \mathbf{R}$ függvényre $f(x) = 0 \quad (x \in X \setminus Y)$ igaz, akkor az f mérhető. Tekintsünk ui. egy $A \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazt, ekkor

$$f^{-1}[A] = f^{-1}[A \setminus \{0\}] \cup f^{-1}[A \cap \{0\}] =: Z \cup W.$$

A feltételek szerint $Z \subset Y$, ezért $Z \in \Omega$. Ez azt is jelenti egyúttal, hogy $0 \notin A$ esetén $f^{-1}[A] = Z \in \Omega$. Feltehető tehát, hogy $0 \in A$, amikor is egy alkalmas $V \subset Y$ (azaz mérhető) halmazzal

$$f^{-1}[A \cap \{0\}] = \{f = 0\} = (X \setminus Y) \cup V.$$

Mivel $X \setminus Y \in \Omega$, így

$$f^{-1}[A] = Z \cup (X \setminus Y) \cup V \in \Omega.$$

Ha pl. az (X, Ω, μ) egy teljes mértéktér (ld. 2.5.), akkor az Y-ra tett feltétel tetszőleges nullamértékű $Y \in \Omega$ halmazra fennáll.

iii) Az $|f|$ függvény mérhetőségéből az f mérhetősége általában nem következik. Tekintsük ui. az $X := \{0, 1, 2\}$ halmazt, és az $\Omega := \{\emptyset, X, \{0\}, \{1, 2\}\}$ (nyilván X-beli) σ-algebrát. Az

$$f(0) := f(1) := 1, \ f(2) := -1$$

függvényre $\{f = -1\} = \{2\} \notin \Omega$, így az f nem mérhető, de az $|f| \equiv 1$ triviálisan az.

iv) Ha valamilyen (X, Ω) mérhető tér esetén az $f_n : X \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat mérhető függvényekből áll, akkor

$$\{x \in X : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x)\} \in \Omega$$

(azaz az ún. *konvergenciahalmaz* mérhető). Ui. a szóban forgó halmaz nem más, mint azon $x \in X$ elemek halmaza, amelyekre $\limsup_n f_n(x) = \liminf(f_n(x))$, így alkalmazhatók a 3.1.5., 3.1.3. Tételek.

v) A 3.1.6. Tétel bizonyításában a μ mérték végességét a 2.3.1.4. Tételre való hivatkozás során használtuk ki. A következő példa azt mutatja, hogy ez nem csupán az alkalmazott bizonyítási technika szempontjából lényeges. Ha ui. (ld. 2.7.1.) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \Omega_1, \mu_1)$ és

$$f_n := \chi_{(n,+\infty)} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in X).$$

Ugyanakkor tetszőleges felülről nem korlátos $A \subset \mathbf{R}$ halmazt is véve, az (f_n) sorozat az A-n nem konvergál egyenletesen az f-hez. Ti. az A-ra tett feltétel miatt bármilyen $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindexszel" próbálkozzunk is, egy megfelelő $x \in A$ elemmel $x > N$, így $|f_N(x) - f(x)| = 1$. Ha viszont az $A \in \Omega_1$ felülről korlátos halmaz, akkor alkalmasan választott $a \in \mathbf{R}$ számmal $[a, +\infty) \subset \mathbf{R} \setminus A$, ezért

$$+\infty = \mu_1([a, +\infty)) \leq \mu_1(\mathbf{R} \setminus A)$$

miatt $\mu_1(\mathbf{R} \setminus A) = +\infty$. Tehát a 3.1.6. (Jegorov-)Tétel állítása ebben az esetben nem igaz.

vi) Nem véges μ esetén az alábbiakat lehet mondani: a 3.1.6. Tétel egyéb feltételei mellett bármilyen véges mértékű $X_0 \subset X$ halmaz és $\varepsilon > 0$ szám mellett van olyan $\Omega \ni X_\varepsilon \subset X_0$, hogy az (f_n) sorozat az X_ε halmazon egyenletesen konvergens, és $\mu(X_0 \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.

3.3. Mérhető függvények integrálja

A fejezet bevezetésében kitűzött programnak megfelelően először az ún. lépcsősfüggvények integrálját fogjuk értelmezni. Mivel csak mérhető függvényekkel foglalkozunk, ezért a lépcsősfüggvények definíciójában a mérhetőséget eleve feltételezzük, így a „mérhető" jelzőt az elnevezésben külön nem is tüntetjük fel.

3.3.1. Lépcsősfüggvények integrálja

Legyen tehát adott egy $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az (X, Ω) mérhető tér, és vezessük be a következő definíciót:

3.3.1.1. Definíció. Az $f : X \to \mathbf{R}$ függvényt *lépcsősfüggvénynek* nevezzük, ha van olyan $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega$ véges halmaz, hogy alkalmas $\alpha_A \in \mathbf{R}$ $(A \in \Omega_0)$ együtthatókkal

$$f = \sum_{A\in\Omega_0} \alpha_A \cdot \chi_A.$$

Jelöljük a most definiált lépcsősfüggvények halmazát L_0-lal. Lineáris algebrai terminológiával élve tehát az L_0 nem más, mint a

$$\{\chi_A : A \in \Omega\}$$

függvényhalmaz lineáris burka. Világos (ld. 3.1.4. Tétel), hogy az L_0 halmaz minden f eleme mérhető függvény, amelyiknek az $\mathcal{R}_f$ értékkészlete véges. Könnyű meggondolni, hogy ez a két tulajdonság egyúttal jellemzi is az L_0 függvényosztály elemeit, azaz: egy $f : X \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor eleme az L_0-nak, ha mérhető, és az $\mathcal{R}_f$ véges. Ui. az elégségességhez kell már csupán azt megjegyezni, hogy a tett feltételek mellett

$$\{f = y\} \in \Omega \qquad (y \in \mathcal{R}_f)$$

és

$$f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}$$

(az f ún. *kanonikus alakja*).

A lépcsősfüggvények halmaza olyan *vektorháló* az $\mathbf{R}$ felett, amelyik zárt a szorzásra nézve is. Ezt fejezi ki a

3.3.1.2. Tétel. *Tetszőleges* $f, g \in L_0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ *esetén az*

$$\alpha \cdot f,\ f + g,\ f \cdot g,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\}$$

függvények valamennyien az L_0*-ban vannak.*

(A tétel bizonyítását az Olvasóra bízzuk.)

A továbbiak érdekében tételezzük fel, hogy a szóban forgó (X, Ω) mérhető tér mellett adott egy μ mérték is az Ω szigma-algebrán, és legyen

$$L_0^+ := L_0^+(\mu) := \{f \in L_0 : f \geq 0\}.$$

Nyilván igaz marad az L_0^+ függvényosztályra a 3.3.1.2. Tétel utolsó négy állítása, az első pedig az $\alpha \geq 0$ kiegészítő feltétel mellett.

A nem-negatív lépcsősfüggvények L_0^+ halmazának az elemeire már minden további nélkül értelmezhetjük az integrál fogalmát a következő definíció szerint:

3.3.1.3. Definíció. Az $f \in L_0^+$ függvénynek (a μ mérték szerinti) *integrálján* az

$$\int f \, d\mu := \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\})$$

nem-negatív számot (vagy a $+\infty$-t) értjük.

(Emlékeztetünk arra a megállapodásunkra, hogy $0\cdot(+\infty) := (+\infty)\cdot 0 := 0$.) Megjegyezzük, hogy az $\int f\,d\mu$ szimbólum helyett (a későbbiekben is) esetenként használjuk az $\int f(x)\,d\mu(x)$, vagy (ha az adott szituációban nem okoz félreértést) az $\int f(x)\,dx$ szimbólumot is.

Ha $A \in \Omega$ és $0 \le \alpha \in \mathbf{R}$, akkor nyilván

$$\int \alpha\cdot \chi_A\,d\mu = \alpha\cdot \mu(A),$$

ami megfelel az integrállal kapcsolatos elemi geometriai szemléletnek. Ui. az

$$(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \Omega_1, \mu_1),\ A \in \mathbf{I}^1$$

speciális esetben az $\int \alpha\cdot \chi_A\,d\mu$ integrál az „A alapú és α magasságú téglalap" – az $\alpha\cdot\chi_A$ függvény „grafikonja alatti" síkidom – területe. Könnyű meggyőződni továbbá arról, hogy ha $\emptyset \ne \Omega_0 \subset \Omega$ egy véges, páronként diszjunkt halmazokból álló halmazrendszer, és alkalmas $\alpha_A \ge 0 \quad (A \in \Omega_0)$ együtthatókkal $f = \sum_{A\in\Omega_0} \alpha_A\cdot\chi_A$, akkor

$$\int f\,d\mu = \sum_{A\in\Omega_0} \alpha_A\cdot \mu(A).$$

Ekkor ti. a $\sum_{A\in\Omega_0} \alpha_A\cdot\chi_A$ összeg egyúttal az $f \in L_0^+$ kanonikus előállítása.

Ennél több is igaz. Ti. a következő tételben a most definiált integrál-fogalom legfontosabb tulajdonságait, úgymint a linearitást és a monotonitást soroljuk fel.

3.3.1.4. Tétel. *Tetszőleges $f,\, g \in L_0^+$ és $\alpha \ge 0$ esetén*

a) $\int \alpha f\,d\mu = \alpha\cdot \int f\,d\mu$;

b) $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$;

c) $f \le g \implies \int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.

Bizonyítás. Mivel az a) állítás meglehetősen triviális, ezért csak a többinek a bizonyítását részletezzük.

A b)-t illetően induljunk ki az X nyilván páronként diszjunkt, mérhető halmazok egyesítésére történő alábbi felbontásából:

$$X = \bigcup_{y\in\mathcal{R}_g} \{g = y\}.$$

Innen tetszőleges $x \in \mathcal{R}_f$ mellett azt kapjuk, hogy

$$\mu(\{f = x\}) = \sum_{y\in\mathcal{R}_g} \mu\Big(\{f = x\} \cap \{g = y\}\Big),$$

amiből

$$(*) \qquad \int f\,d\mu = \sum_{x\in\mathcal{R}_f}\sum_{y\in\mathcal{R}_g} x\cdot\mu\Big(\{f=x\}\cap\{g=y\}\Big)$$

következik. Hasonló módon adódik az, hogy

$$(**) \qquad \int g\,d\mu = \sum_{y\in\mathcal{R}_g}\sum_{x\in\mathcal{R}_f} y\cdot\mu\Big(\{f=x\}\cap\{g=y\}\Big).$$

Az előbbi két egyenlőséget egybevetve tehát

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \sum_{x\in\mathcal{R}_f}\sum_{y\in\mathcal{R}_g} (x+y)\cdot\mu\Big(\{f=x\}\cap\{g=y\}\Big).$$

Ugyanakkor

$$X = \bigcup_{x\in\mathcal{R}_f}\bigcup_{y\in\mathcal{R}_g}\Big(\{f=x\}\cap\{g=y\}\Big)$$

is egy páronként diszjunkt, mérhető halmazokból álló felbontása az X-nek, és

$$f+g = \sum_{x\in\mathcal{R}_f}\sum_{y\in\mathcal{R}_g} (x+y)\cdot\chi_{\{f=x\}\cap\{g=y\}}$$

az $f+g$ függvény kanonikus felbontása. Ebből

$$\int (f+g)\,d\mu = \sum_{x\in\mathcal{R}_f}\sum_{y\in\mathcal{R}_g} (x+y)\cdot\mu\Big(\{f=x\}\cap\{g=y\}\Big),$$

tehát a b) állítás következik.

A c) állításhoz elég már csak annyit megjegyezni, hogy $f\le g$ esetén minden olyan $x\in\mathcal{R}_f$, $y\in\mathcal{R}_g$ mellett, amelyekre $\{f=x\}\cap\{g=y\}\neq\emptyset$, egyúttal $x\le y$ is igaz. Innen a $(*)$ és a $(**)$ alapján a c) már nyilvánvaló. ■

Következésképpen azt mondhatjuk, hogy ha

$$f = \sum_{A\in\Omega_0}\alpha_A\cdot\chi_A \in L_0^+$$

(ahol tehát az $\emptyset\neq\Omega_0\subset\Omega$ véges halmaz, $\alpha_A\ge 0 \quad (A\in\Omega_0)$), akkor

$$\int f\,d\mu = \sum_{A\in\Omega_0}\int \alpha_A\cdot\chi_A\,d\mu = \sum_{A\in\Omega_0}\alpha_A\cdot\mu(A).$$

A következő tétel alapvető fontosságú lesz az integrálfogalom kiterjesztése szempontjából.

3.3.1.5. Tétel. *Legyen adott egy L_0^+-beli függvényekből álló, monoton növekedő függvénysorozat: $f_n \in L_0^+$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Tegyük fel, hogy a $g \in L_0^+$ függvényre $g \le \sup_n f_n$ teljesül. Ekkor*

$$\int g\, d\mu \le \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Bizonyítás. A tételben szereplő g függvény a következő alakú:

$$g = \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \chi_A \qquad (\alpha_A \ge 0,\ A \in \Omega_0)$$

(alkalmas $\emptyset \ne \Omega_0 \subset \Omega$ véges halmazzal). Ekkor bármilyen $0 \le c < 1$ számmal a

$$B_n := \{f_n \ge cg\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazok (ld. 3.1.2. Tétel) valamennyien az Ω-ban vannak, és

$$f_n \ge cg \cdot \chi_{B_n} = c \cdot \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \chi_{A \cap B_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt (ld. 3.3.1.4. Tétel)

$$\int f_n\, d\mu \ge c \cdot \int g \cdot \chi_{B_n}\, d\mu = c \cdot \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \mu(A \cap B_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A tétel feltételeire tekintettel

$$B_n \subset B_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}), \quad X = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n,$$

így tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra $A \cap B_n \subset A \cap B_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap B_n)$. Innen (ld. 2.3.1.4. Tétel) $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap B_n)$, ezért

$$\int g\, d\mu = \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \mu(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \int g \cdot \chi_{B_n}\, d\mu$$

következik. Tehát

$$\sup_n \int f_n\, d\mu \ge c \cdot \sup_n \int g \cdot \chi_{B_n}\, d\mu \ge c \cdot \lim_{n\to\infty} \int g \cdot \chi_{B_n}\, d\mu = c \cdot \int g\, d\mu.$$

Vegyük figyelembe, hogy itt a $c \in [0, 1)$ tetszőleges volt, ezért innen a tétel állítása már nyilvánvaló. ■

Megjegyezzük, hogy az előbbi tételben szereplő f_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat monoton növő lévén, azt is írhatjuk, hogy

$$\sup_n f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

A 3.3.1.4. Tétel szerint az $\int f_n\,d\mu \quad (n \in \mathbf{N})$ (integrál)sorozat is monoton növekedő, így létezik a $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$ határérték is, és

$$\sup_n \int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Más szóval (a 3.3.1.4. Tételbeli szereplőkkel)

$$g \le \lim_{n\to\infty} f_n \implies \int g\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

3.3.2. Az L^+ függvényosztály

Legyen továbbra is (valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz mellett) az (X, Ω, μ) hármas mértéktér. Tegyük fel, hogy az $f_n,\, g_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekre

$$f_n \le f_{n+1} \text{ és } g_n \le g_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$\sup_n f_n = \sup_n g_n$$

igaz. Ekkor

$$\sup_n \int f_n\,d\mu = \sup_n \int g_n\,d\mu.$$

Valóban, alkalmazzuk a 3.3.1.5. Tételt minden $m \in \mathbf{N}$ mellett a $g := g_m$ szereposztással. Ekkor a nyilvánvaló $g_m \le \sup_n g_n$ becslésből a $\sup_n f_n = \sup_n g_n$ feltétel alapján egyúttal $g_m \le \sup_n f_n$ is következik. Ezért a 3.3.1.5. Tétel miatt

$$\int g_m\,d\mu \le \sup_n \int f_n\,d\mu,$$

és így

$$\sup_m \int g_m\,d\mu \le \sup_n \int f_n\,d\mu.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség analóg módon adódik.

A 3.3.1. pont végén tett megjegyzésünk szellemében azt is írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n \implies \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

A most mondottakat figyelembe véve legyen $L^+ := L^+(\mu)$ azoknak az

$$f : X \to [0, +\infty]$$

függvényeknek a halmaza, amelyekhez megadható olyan $f_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő sorozat, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Ekkor (ld. 3.1.) minden $f \in L^+$ függvény mérhető, a $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ határérték pedig az előbbiek szerint független az f-et az L^+ definíciója szerint előállító sorozattól. Ez az észrevétel ad értelmet az alábbi definíciónak:

3.3.2.1. Definíció. Ha $f \in L^+$ és egy alkalmas $f_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő sorozattal $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, azaz

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X),$$

akkor legyen

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

az f függvénynek a μ mérték szerinti *integrálja.*

Az eléggé nyilvánvaló, hogy $L_0^+ \subset L^+$, és $f \in L_0^+$ esetén az $\int f \, d\mu$ integrál mind a 3.3.2.1. Definíció, mind pedig a 3.3.1.1. Definíció szerint ugyanazt jelenti. Ui. az f függvényhez választhatjuk az L^+ definíciójában szereplő „előállító" (f_n) függvénysorozatot az $f_n := f$ $(n \in \mathbf{N})$ utasításnak megfelelően, amikor is

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f \, d\mu = \int f \, d\mu$$

(ahol az "$\int \ldots d\mu$" integrál a 3.3.1.1. Definíció szerint értendő).

Mutassuk meg, hogy az L^+ függvényosztály elemeire is fennállnak az integrálható függvényekkel szemben „elvárt" alapvető tulajdonságok, nevezetesen igaz a

3.3.2.2. Tétel. *Tetszőleges $f, g \in L^+$ függvények és $0 \le \alpha \in \mathbf{R}$ szám esetén*

a) $f + \alpha g,\ fg,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in L^+$;

b) $\int (f + \alpha g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \alpha \cdot \int g \, d\mu$;

c) $f \le g \implies \int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$.

Bizonyítás. Tekintsük az f, g függvényekre az L^+ definíciójának megfelelő

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,\ g = \lim_{n\to\infty} g_n$$

előállításokat, ahol tehát az L_0^+-beli (f_n), (g_n) sorozatok monoton növők, és

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,\ \int g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Világos, hogy az $(f_n + \alpha g_n)$ sorozat is monoton növő, L_0^+-beli, és

$$f + \alpha g = \lim_{n\to\infty} (f_n + \alpha g_n).$$

Következésképpen $f + \alpha g \in L^+$, és (ld. 3.3.1.4. Tétel)

$$\int (f + \alpha g)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + \alpha g_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n\, d\mu + \alpha \cdot \int g_n\, d\mu \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu + \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \alpha \cdot \int g\, d\mu.$$

Továbbá a $h_n := \max\{f_n, g_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is L_0^+-beli, monoton növő, és könnyen láthatóan $\lim_{n\to\infty} h_n = \max\{f, g\}$. Ez azt jelenti, hogy $\max\{f, g\} \in L^+$ (és analóg módon $\min\{f, g\} \in L^+$).

Ezzel az a), b) állításokat beláttuk. A c) igazolásához vegyük észre, hogy minden $m \in \mathbf{N}$ mellett $f_m \le f \le g = \sup_n g_n$, ezért (ld. 3.3.1.5. Tétel)

$$\int f_m\, d\mu \le \sup_n \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

Az $\int f\, d\mu$ integrál definíciója miatt tehát

$$\int f\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int f_m\, d\mu = \sup_m \int f_m\, d\mu \le \int g\, d\mu.$$

■

Jegyezzük meg, hogy ha

$$f, g \in L^+,\ f \le g,\ \int f\, d\mu < +\infty,$$

és létezik a $g - f : X \to [0, +\infty]$ függvény, akkor $g - f \in L^+$, és

$$\int (g - f)\, d\mu = \int g\, d\mu - \int f\, d\mu.$$

Ui. a 3.1.4. Tétel bizonyítása utáni észrevétel szerint a $g - f$ függvény mérhető, így $g - f \in L^+$. Következésképpen a nyilvánvaló $g = (g - f) + f$ egyenlőség és az előbbi tétel b) állítása alapján

$$\int g\, d\mu = \int (g - f)\, d\mu + \int f\, d\mu,$$

amiből $\int f\, d\mu < +\infty$ miatt a mondott egyenlőség már nyilvánvaló.

Az L^+ függvényosztály definíciójára gondolva joggal vetődik fel a kérdés, hogy nem lehet-e ezen az úton tovább bővíteni az integrálható függvények körét. A következő tétel – ami nyugodtan nevezhető az integrálelmélet egyik alaptételének – azt mutatja, hogy a fenti kérdésre a válasz tagadó, azaz az L^+ függvényosztály zárt a (pontonkénti) monoton konvergenciára nézve.

3.3.2.3. Tétel (Beppo Levi). *Bármilyen monoton növekedő* $f_n \in L^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ *függvénysorozatra*

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_n f_n \in L^+,$$

és

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \sup_n \int f_n\,d\mu.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas monoton növő $v_{nm} \in L_0^+$ $(m \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$f_n = \lim_{m\to\infty} v_{nm}, \ \int f_n\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int v_{nm}\,d\mu.$$

Legyen

$$v_n := \max\{v_{ik} : i, k = 0, ..., n\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor (ld. 3.3.1.2. Tétel) $v_n \in L_0^+$, $v_n \le v_{n+1}$ és $v_n \le f_n \le f \quad (n \in \mathbf{N})$. Ezért

$$g := \lim_{n\to\infty} v_n = \sup_n v_n \le f.$$

Továbbá minden $n, i, k \in \mathbf{N}$, $i, k \le n$ mellett $v_{ik} \le v_n \le g$, így

$$f_i = \lim_{k\to\infty} v_{ik} \le g \qquad (i \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$f = \lim_{i\to\infty} f_i \le g.$$

Következésképpen $f = g = \lim_{n\to\infty} v_n$, amiből $f \in L^+$, és a 3.3.2.1. Definícióra tekintettel

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu$$

következik.

Ugyanakkor minden $n \in \mathbf{N}$ természetes számra $f_n \le f$, és így az integrál monotonitása miatt (ld. 3.3.1.4. Tétel) $\int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu$, tehát

$$\sup_n \int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu.$$

Továbbá a fenti $v_n \le f_n$ egyenlőtlenség alapján $\int v_n\,d\mu \le \int f_n\,d\mu \quad (n \in \mathbf{N})$, és ezzel

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu \le \sup \int f_n\,d\mu,$$

Mindez az előző becsléssel együtt a tétel állításának a második részét igazolja. ■

Azt mondhatjuk tehát, hogy tetszőleges monoton növő $f_n \in L^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

ami (a tett feltételek mellett) az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségét jelenti.

A következő tételből kiderül, hogy az L^+ függvényhalmaz „kimeríti" a nem-negatív, mérhető függvények osztályát, ezért egyúttal az előbbiekben minden ilyen függvénynek értelmeztük az integrálját.

3.3.2.4. Tétel. *Az $f : X \to [0, +\infty]$ függvény akkor és csak akkor eleme az L^+-nak, ha az f mérhető.*

Bizonyítás. Nyilván már csak a tétel elégségesség részét kell igazolni. Tegyük fel tehát, hogy a szóban forgó $f : X \to [0, +\infty]$ függvény mérhető. Legyen ekkor

$$A_{in} := \begin{cases} \{f \geq i\cdot 2^{-n}\} \cap \{f < (i+1)\cdot 2^{-n}\} & (i = 0, ..., n\cdot 2^n - 1) \\ \\ \{f \geq n\} & (i = n\cdot 2^n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az $A_{in} \quad (i = 0, ..., n\cdot 2^n)$ halmazok minden $\mathbf{N} \ni n$-re az Ω-ban vannak, páronként diszjunktak: $A_{in} \cap A_{jn} = \emptyset \quad (i \neq j = 0, ..., n\cdot 2^n)$, és $\bigcup_{i=0}^{n2^n} A_{in} = X$. Ha

$$f_n := \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} i\cdot 2^{-n}\cdot \chi_{A_{in}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az f_n-ek nyilván valamennyien L_0^+-beliek. Gondoljuk meg, hogy

$$f_n \leq f_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, $x \in A_{in} \quad (i < n\cdot 2^n)$ esetén $f_n(x) = i\cdot 2^{-n}$, valamint $A_{in} = A_{2i\,n+1} \cup A_{2i+1\,n+1}$ miatt

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 2i\cdot 2^{-n-1} & (x \in A_{2i\,n+1}) \\ \\ (2i+1)\cdot 2^{-n-1} & (x \in A_{2i+1\,n+1}) \end{cases} \geq i\cdot 2^{-n} = f_n(x).$$

Ha viszont $x \in A_{n\cdot 2^n n}$, akkor $f_n(x) = n \leq f_{n+1}(x)$, ui. ilyenkor $f(x) \geq n$.

Azt kell már csak belátnunk, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Ez viszont következik abból, hogy tetszőleges $x \in X$ esetén $f_n(x) = n \quad (n \in \mathbf{N})$, ha $f(x) = +\infty$, ill.

$$f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + 2^{-n},$$

ha $n \in \mathbf{N}$ és $f(x) < n$. ■

Az L^+ halmaz további vizsgálata előtt vezessük be az alábbi (a későbbiek szempontjából is hasznos) fogalmat. Tekintsük ehhez az (X, Ω, μ) mértékteret, és tegyük fel, hogy adott az X halmaz elemeire vonatkozó valamilyen T tulajdonság. Ez azt jelenti, hogy bármelyik $x \in X$ esetén el tudjuk dönteni, hogy a T tulajdonság az x-re igaz vagy sem. Röviden: a $T : X \to \{i, h\}$ egy logikai függvény, ahol $x \in X$ és $T(x) = i$ azt jelenti, hogy a T teljesül („igaz") az x-re, $T(x) = h$ pedig azt, hogy a T nem teljesül („nem igaz") az x-re. Például egy gyakran előforduló ilyen tulajdonság a következő: az $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények esetén $T(x)$ jelentse azt, hogy az $x \in X$ pontban $f(x) = g(x)$. Tehát a mondott példában $T(x) = i$, ha $f(x) = g(x)$, és $T(x) = h$, ha $f(x) \neq g(x)$.

3.3.2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy a T tulajdonság *μ-majdnem mindenütt igaz*, ha van olyan $A \in \Omega$ halmaz, hogy $\mu(A) = 0$, és tetszőleges $x \in X \setminus A$ esetén a T teljesül az x-re.

Ha nem okoz félreértést, akkor (a szóban forgó mérték jelének az elhagyásával) röviden a „majdnem mindenütt" kifejezést fogjuk használni. Azt a tényt, hogy a T μ-majdnem mindenütt igaz, a következőképpen fogjuk feltüntetni: T μ-m.m. (esetenként T m.m.). Például, ha az f és a g a 3.3.2.5. Definíció előtt említett két függvény, akkor az

$$f = g \ \ \mu\text{-m.m.}$$

szimbólumsor azt jelenti, hogy egy alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal $\mu(A) = 0$, és az $f(x) = g(x)$ egyenlőség minden $x \in X \setminus A$ esetén igaz.

A fenti előkészítés után már könnyen megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

3.3.2.6. Tétel. *A fenti (X, Ω, μ) mértéktér esetén*

a) *minden $f \in L^+$ függvényre igaz, hogy*

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-m.m.};$$

b) *ha $f, g \in L^+$ és*
- $f = g$ μ-m.m., *akkor* $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$;
- $f \leq g$ μ-m.m., *akkor* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$;

c) *ha $f \in L^+$ és $\int f \, d\mu < +\infty$, akkor $|f| < +\infty$* μ-m.m.

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához legyen

$$A := \{f \neq 0\}, \ \ A_n := \{f \geq 1/n\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Az f függvény mérhetősége miatt (ld. 3.1.3. Tétel) a most definiált halmazok valamennyien az Ω-ban vannak,

$$A_n \subset A_{n+1} \quad (0 < n \in \mathbf{N}) \text{ és } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Az A_n halmaz értelmezését figyelembe véve bármelyik $0 < n \in \mathbf{N}$ indexre

$$f \geq \frac{1}{n}\cdot \chi_{A_n},$$

így (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$0 = \int f\, d\mu \geq \int \frac{1}{n}\cdot \chi_{A_n}\, d\mu = \frac{1}{n}\cdot \mu(A_n) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Innen $\mu(A) \geq 0$ miatt már nyilvánvaló, hogy $\mu(A_n) = 0$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, amiből $\mu(A) = 0$ az előbbiek alapján rögtön adódik.

Fordítva, ha $\mu(A) = 0$ és $f_n := n\cdot \chi_A$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $f_n \in L_0^+$ és

$$\int f_n\, d\mu = n\cdot \mu(A) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) alapján tehát a $g := \sup_n f_n$ függvényre $g \in L^+$ és

$$\int g\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu = 0$$

igaz. Mivel $f \leq g$, ezért (ld. 3.3.2.2. Tétel) $0 \leq \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu = 0$, így $\int f\, d\mu = 0$.

A b) állításhoz legyen most

$$A := \{f \neq g\},$$

ekkor (ld. 3.1.3. Tétel) $A \in \Omega$, ezért a feltételek alapján $\mu(A) = 0$, és a $B := X \setminus A = \{f = g\}$ jelöléssel

$$f = f\cdot \chi_A + f\cdot \chi_B, \;\; g = g\cdot \chi_A + g\cdot \chi_B.$$

Továbbá (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$f\cdot \chi_A,\; f\cdot \chi_B,\; g\cdot \chi_A,\; g\cdot \chi_B \in L^+.$$

Mivel $f\cdot \chi_A = 0$, $g\cdot \chi_A = 0$ μ-m.m. és $f\cdot \chi_B = g\cdot \chi_B$, ezért (részben az a) állítás miatt)

$$\int f\cdot \chi_A\, d\mu = \int g\cdot \chi_A\, d\mu = 0, \; \int f\cdot \chi_B\, d\mu = \int g\cdot \chi_B\, d\mu.$$

Következésképpen (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int f\,d\mu = \int f\cdot\chi_A\,d\mu + \int f\cdot\chi_B\,d\mu = \int g\cdot\chi_A\,d\mu + \int g\cdot\chi_B\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Ha $f \le g$ μ-m.m., akkor egy alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$f(x) \le g(x) \qquad (x \in X \setminus A).$$

Legyen $F := f\cdot\chi_{X\setminus A}$, $G := g\cdot\chi_{X\setminus A}$, ekkor (ld. 3.1.4. Tétel) $F, G \in L^+$, $f = F$ μ-m.m., $g = G$ μ-m.m., és $F \le G$. Ezért a 3.3.2.2. Tétel és a b) állítás előbb belátott első része szerint

$$\int f\,d\mu = \int F\,d\mu \le \int G\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Lássuk be végül a c)-t. Ha

$$A := \{|f| = +\infty\},$$

akkor a fentiekhez hasonlóan $A \in \Omega$, és tetszőleges nem-negatív α számmal $\alpha\cdot\chi_A \le |f|$, tehát

$$\alpha\cdot\mu(A) \le \int |f|\,d\mu =: q < +\infty.$$

Speciálisan

$$\mu(A) \le \frac{q}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

amiből $\mu(A) \ge 0$ és $\lim_{n\to\infty}(q/n) = 0$ miatt $\mu(A) = 0$ már nyilván következik. ■

3.3.2.7. Tétel (Fatou-lemma). *Tekintsük az* (X, Ω, μ) *mértékteret. Ekkor*:

a) *tetszőleges* $f_n \in L^+$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvénysorozatra*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu;$$

b) *ha az* a)*-ban szereplő* (f_n) *sorozathoz van olyan* $F \in L^+$ *függvény, amelyikre* $\int F\,d\mu < +\infty$ *és* $f_n \le F$ μ*-m.m.* $(n \in \mathbf{N})$, *akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Bizonyítás. Az a) állítás igazolásához legyen

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Tudjuk (ld. 3.1.5. Tétel), hogy $f \in L^+$. Ha

$$g_n := \inf_{m\ge n} f_m \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az előbb idézett tétel miatt $g_n \in L^+$ $(n \in \mathbf{N})$, és a (g_n) sorozat nyilván monoton növekedő módon konvergál az f-hez. Ezért alkalmazható a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel), miszerint

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu.$$

Az itt szereplő függvények értelmezése miatt triviális

$$g_n \le f_m \qquad (n \le m \in \mathbf{N})$$

becslés alapján (ld. 3.3.2.2. Tétel) $\int g_n\,d\mu \le \int f_m\,d\mu$ is igaz az előbbi m, n indexekre. Tehát tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\int g_n\,d\mu \le \inf_{m\ge n} \int f_m\,d\mu,$$

amiből

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} \int f_m\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

a kívánt egyenlőtlenség adódik.

A Fatou-lemma b) része egyszerűen következik az a)-ből. A b)-beli feltételek miatt ui. minden $n \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $A_n \in \Omega$ halmazzal $\mu(A_n) = 0$ és

$$f_n(x) \le F(x) \qquad (x \in X \setminus A_n).$$

Továbbá (ld. 3.3.2.6. Tétel) valamilyen $B \in \Omega$ mellett $\mu(B) = 0$ és

$$F(x) < +\infty \qquad (x \in X \setminus B).$$

Ha tehát

$$A := B \bigcup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \Big),$$

akkor $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$, és

$$f_n(x) \le F(x) < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in X \setminus A).$$

Legyen ezek után a $C := X \setminus A$ halmazzal

$$F_n := F - f_n \cdot \chi_C \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.1.4. Tétel után tett észrevétel alapján $F_n \in L^+$ $(n \in \mathbf{N})$. Alkalmazzuk az a) állítást az (F_n) sorozatra, amikor is (figyelembe véve a 3.3.2.2. Tétel bizonyítása után mondottakat is)

$$\int \liminf_{n\to\infty} F_n\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (F - f_n \cdot \chi_C)\,d\mu = \int (F - \limsup_{n\to\infty} f_n \cdot \chi_C)\,d\mu =$$

$$\int F\,d\mu - \int \limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (F - f_n\cdot \chi_C)\,d\mu =$$

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\int F\,d\mu - \int f_n\cdot \chi_C\,d\mu\Big) = \int F\,d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int f_n\cdot \chi_C\,d\mu.$$

(Felhasználtuk közben a a C definíciójából következő

$$\limsup_{n\to\infty}(f_n\chi_C)(x) < +\infty \qquad (n\in\mathbf{N},\ x\in X)$$

és (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\cdot \chi_C\,d\mu \le \int F\,d\mu < +\infty$$

becsléseket.) Innen – figyelembe véve, hogy $0 \le \int F\,d\mu < +\infty$ teljesül –

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\cdot \chi_C\,d\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C\,d\mu$$

következik. Ugyanakkor nyilván

$$f_n\cdot \chi_C = f_n \ \ \mu\text{–m.m.} \quad (n\in\mathbf{N}),$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C = \limsup_{n\to\infty} f_n \ \ \mu\text{–m.m.},$$

ezért a 3.3.2.6. Tételre hivatkozva

$$\int f_n\cdot \chi_C\,d\mu = \int f_n\,d\mu,\ \int \limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C\,d\mu = \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu,$$

és ezzel a b)-ben jelzett egyenlőtlenségeket kapjuk. ■

3.3.3. Integrálható függvények

Legyen adott továbbra is az $X \ne \emptyset$ halmaz, az (X,Ω,μ) mértéktér, és tekintsünk egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényt. Ha

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases} \qquad (x\in X)$$

(az f függvény *pozitív része*),

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & (f(x)\le 0) \\ 0 & (f(x) > 0) \end{cases} \qquad (x\in X),$$

(az f függvény *negatív része*), akkor az alábbi egyenlőségek nyilvánvalóak:

$$f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-.$$

Világos, hogy $f^+, f^- \geq 0$, továbbá

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \ f^- := -\min\{f, 0\} = (-f)^+.$$

Ha tehát a szóban forgó f függvény mérhető (ld. 3.1.), akkor a 3.1.5. Tétel szerint az f^+, f^- függvények is mérhetők, következésképpen $f^+, f^- \in L^+$. Sőt, a 3.1.4. Tétel (valamint az utána tett megjegyzés) szerint mindez meg is fordítható: az f függvény akkor és csak akkor mérhető, ha $f^+, f^- \in L^+$.

Mindezek alapján már eléggé kézenfekvő az integrálfogalom alábbi kiterjesztése, különösen, ha az integrál linearitását (mint minimális követelményt) is figyelembe vesszük.

3.3.3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvénynek *van integrálja*, ha az $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ integrálok közül legalább az egyik véges ($< +\infty$). Ez utóbbi esetben legyen

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

az f függvénynek a μ mérték szerinti *integrálja*.

Az így definiált integrált illetően tehát azt mondhatjuk, hogy

$$\int f \, d\mu \in \mathbf{R}, \text{ ha } \int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu < +\infty,$$
$$\int f \, d\mu = +\infty, \text{ ha } \int f^+ \, d\mu = +\infty \text{ és } \int f^- \, d\mu < +\infty,$$
$$\int f \, d\mu = -\infty, \text{ ha } \int f^+ \, d\mu < +\infty \text{ és } \int f^- \, d\mu = -\infty.$$

Ha $f \in L^+$, akkor $f^- \equiv 0$ miatt $\int f^- \, d\mu = 0$, ezért az f integrálja a 3.3.3.1. Definíció szerint ugyanaz, mint a 3.3.2.1 Definíció szerint. Más szóval tehát minden L^+-beli függvénynek van integrálja a most mondott értelemben.

A későbbiekben azok a függvények lesznek különösen fontosak a számunkra, amelyeknek van integrálja, és az véges. Minden ilyen függvényt *integrálható függvénynek* nevezünk. Vezessük be ezzel kapcsolatban a következő jelölést:

$$L := L(\mu) := \Big\{ f : X \to \overline{\mathbf{R}} : \int f \, d\mu \in \mathbf{R} \Big\}.$$

(Ha nem okoz félreértést, akkor egyszerűen csak az L szimbólumot fogjuk a későbbiekben használni.) Az előbbiek szerint tehát egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény pontosan akkor eleme az L-nek, ha az f mérhető, és $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu < +\infty$. A következő tételben szükséges és elégséges feltételeket adunk meg arra vonatkozóan, hogy egy mérhető függvény az L függvényosztályba tartozzon.

3.3.3.2. Tétel. *Tekintsük az* $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvényt. Ekkor az* $f \in L$ *állítás az alábbi feltételek bármelyikével ekvivalens*:

a) $f^+,\ f^- \in L$;

b) *alkalmas* $g, h \in L,\ g \geq 0,\ h \geq 0$ *függvényekkel* $f = g - h$;

c) *van olyan* $G \in L$, *hogy* $|f| \leq G$;

d) $|f| \in L$.

Bizonyítás. Mivel $f \in L \iff f^+,\ f^- \in L$, ezért elegendő azt megmutatni, hogy

$$\text{a)} \iff \text{b)} \iff \text{c)} \iff \text{b)}.$$

Az a) $\Longrightarrow$ b) következtetés a $g := f^+$, $h := f^-$ választással nyilvánvaló. A b) $\Longrightarrow$ c)-hez vegyük észre, hogy

$$f = g - h \leq g \leq g + h$$

és

$$-f = h - g \leq h \leq g + h,$$

így $|f| \leq g + h$. A b)-beli feltételek és a 3.3.2.2. Tétel miatt a $G := g + h \in L$ függvény nyilván teljesíti a c)-ben mondottakat.

A c) $\Longrightarrow$ d) következtetéshez először is nyilvánvaló, hogy $G \in L^+$, $|f| \in L^+$, ezért az integrál monotonitása miatt (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int |f|\, d\mu \leq \int G\, d\mu < +\infty,$$

tehát valóban igaz, hogy $|f| \in L$.

Végül a d) $\Longrightarrow$ a) következtetés bizonyításához induljunk ki abból, hogy $f^\pm \in L^+$, és $f^\pm \leq |f| \in L$, ezért ismét csak az integrál monotonitására hivatkozva

$$\int f^\pm\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < +\infty$$

miatt $f^\pm \in L$. ■

Az L függvényosztály is rendelkezik az integrál legfontosabb tulajdonságaival, azaz – bizonyos megszorításokkal – igaz a 3.3.2.2. Tétel megfelelője az L-beli függvényekre is. (Emlékeztetünk arra, hogy a korábbi megállapodásunknak megfelelően továbbra is legyen $(\pm\infty)\cdot 0 := 0\cdot(\pm\infty) := 0$.)

3.3.3.3. Tétel. *Legyen* $f, g \in L$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Ekkor*

a) $\alpha f \in L$ *és* $\int(\alpha f)\,d\mu = \alpha\cdot\int f\,d\mu$;

b) *ha* $f+g : X \to \overline{\mathbf{R}}$, *akkor* $f+g \in L$ *és* $\int(f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$;

c) $\max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in L$;

d) *ha* $f \le g$, *akkor* $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$;

e) $|\int f\,d\mu| \le \int |f|\,d\mu$.

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy a 3.1. pont szerint az αf, $f+g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ függvények valamennyien mérhetők.

Az a) állítás egyszerűen következik a 3.3.2.2. Tételből és abból, hogy $\alpha \ge 0$ esetén

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+,\ (\alpha f)^- = \alpha f^-,$$

valamint $\alpha < 0$ mellett

$$(\alpha f)^+ = (-\alpha)\cdot f^-,\ (\alpha f)^- = (-\alpha)\cdot f^+.$$

Ekkor ui. $f \in L$ miatt az $\int f^+\,d\mu$, $\int f^-\,d\mu$ integrálok végesek, így az előbb mondottak szerint ugyanez igaz az $\int(\alpha f)^+\,d\mu$, $\int(\alpha f)^-\,d\mu$ integrálokra is. Következésképpen létezik az

$$\int(\alpha f)^+\,d\mu - \int(\alpha f)^-\,d\mu$$

különbség, azaz az αf függvénynek van integrálja, és az véges. Tehát $\alpha f \in L$ és (pl. $\alpha \ge 0$ esetben) a 3.3.2.2. Tétel alapján

$$\int(\alpha f)\,d\mu = \int(\alpha f)^+\,d\mu - \int(\alpha f)^-\,d\mu = \alpha\cdot\left(\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right) = \alpha\cdot\int f\,d\mu.$$

(Ha $\alpha < 0$, akkor értelemszerű módosítással kapjuk ugyanezt.)

A b) igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-),$$

amiből a 3.3.3.2. Tétel és ismét csak a 3.3.2.2. Tétel alapján

$$|f+g| \le f^+ + g^+ + f^- + g^- \in L$$

miatt $f+g \in L$ következik. Az utóbb idézett tételekből (ld. még 3.4. xiii) megjegyzés) az is adódik, hogy

$$\int(f+g)\,d\mu = \int(f^+ + g^+)\,d\mu - \int(f^- + g^-)\,d\mu =$$

$$\int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \left(\int f^-\,d\mu + \int g^-\,d\mu\right) =$$

$$\left(\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right) + \left(\int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu\right) = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

Mivel

$$|\max\{f,g\}|,\ |\min\{f,g\}| \le |f| + |g|,$$

ezért a b) és a 3.3.3.2. Tétel szerint a c) is igaz.

Ha $f \le g$, akkor nyilván $f^+ \le g^+$, $g^- \le f^-$ is fennáll, ezért a már többször idézett 3.3.2.2. Tétel alapján

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \le \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Tehát a d) állítást is beláttuk.

A most igazolt d) állítás és $\pm f \le |f|$ alapján

$$\pm\int f\,d\mu \le \int |f|\,d\mu,$$

tehát az e) is teljesül. ■

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az L függvényosztályra is megfogalmazható egy, a 3.3.2.6. Tétellel rokon állítás. Nevezetesen, igaz a

3.3.3.4. Tétel. *Ha* $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvények, valamint*

a) $f = g$ μ-m.m., *akkor* $f \in L$ *esetén* $g \in L$ *és* $\int g\,d\mu = \int f\,d\mu$;

b) $f \le g$ μ-m.m. *és* $f, g \in L$, *akkor* $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$;

c) *minden* L*-beli* f *függvényre igaz, hogy* $|f| < +\infty$ μ-m.m.

Bizonyítás. Az a)-beli feltételek alapján

$$f^+ = g^+,\ \ f^- = g^-\ \ \mu\text{−m.m.},$$

ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\int g^+\,d\mu = \int f^+\,d\mu,\ \ \int g^-\,d\mu = \int f^-\,d\mu.$$

Következésképpen $f \in L$ miatt létezik az $\int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu$ klülönbség is, azaz $g \in L$ és

$$\int g\,d\mu = \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

A b) igazolásához vegyük figyelembe, hogy egy $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$f(x) \leq g(x) \qquad (x \in X \setminus A).$$

Az $F := f \cdot \chi_{X \setminus A}$, $G := g \cdot \chi_{X \setminus A}$ függvényekre a 3.3.2.6. Tétel bizonyításában látottakkal analóg módon kapjuk, hogy $F, G \in L$, $F \leq G$, és így (ld. 3.3.3.3. Tétel, ill. a))

$$\int f \, d\mu = \int F \, d\mu \leq \int G \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

A c)-t hasonlóan igazolhatjuk. Ti. $f \in L$ miatt az L^+-beli f^+, f^- függvényekre

$$\int f^+ \, d\mu, \ \int f^- \, d\mu < +\infty.$$

Innen a 3.3.2.6. Tételt figyelembe véve f^+, $f^- < +\infty$ μ-m.m. adódik, amiből egyúttal $|f| = f^+ + f^- < +\infty$ μ-m.m. is következik. Ti. egy-egy $A, B \in \Omega$, $\mu(A) = \mu(B) = 0$ halmazzal

$$f^+(x) < +\infty \quad (x \in X \setminus A) \ \text{ és } \ f^-(x) < +\infty \quad (x \in X \setminus B).$$

Ha $C := A \cup B$, akkor $C \in \Omega$, $\mu(C) = 0$, és

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) < +\infty \qquad (x \in X \setminus C).$$

■

Azt mondjuk, hogy a mérhető $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények *ekvivalensek,* ha $f = g$ μ-m.m. Jelöljük ezt a tényt a következőképpen: $f \sim g$. Világos, hogy $f \sim f$, és $f \sim g$ esetén $g \sim f$. Ha $h : X \to \overline{\mathbf{R}}$, $f \sim g$ és $g \sim h$, akkor $f \sim h$ is igaz. Ui. alkalmas $A, B \in \Omega$, $\mu(A) = \mu(B) = 0$ halmazokkal

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in X \setminus A)$$

és

$$g(x) = h(x) \qquad (x \in X \setminus B).$$

Következésképpen

$$f(x) = h(x) \qquad (x \in X \setminus (A \cup B)),$$

ahol $A \cup B \in \Omega$ és $\mu(A \cup B) = 0$, így $f = h$ μ-m.m. Röviden szólva tehát a $\sim$ relácó egy ekvivalencia a mérhető $X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények $\mathcal{M}$ halmazában. Legyen az $f \in \mathcal{M}$ függvényre

$$\hat{f} := \{g \in \mathcal{M} : g \sim f\}$$

az f által meghatározott ekvivalenciaosztály. Ha itt $f \in L$, akkor a 3.3.3.4. Tételre tekintettel tetszőleges $g \in \hat{f}$ függvényre $g \in L$ és $\int g\, d\mu = \int f\, d\mu$. Ezért van értelme az alábbi megállapodásnak:

$$\int \hat{f}\, d\mu := \int g\, d\mu,$$

ahol a $g \in \hat{f}$ tetszőlegesen választott függvény. (Ez egyúttal kiemeli az „új" integrálfogalom karakterisztikus tulajdonságát, miszerint az integrál szempontjából nem az eddigi értelemben vett „individuális" függvény az érdekes, hanem a vele ekvivalens függvények által alkotott ekvivalenciaosztály.)

Bármilyen $f \in L$ függvényt is véve könnyen adódik olyan $F_f \in \hat{f}$, amelyik „véges értékű", azaz $\mathcal{R}_{F_f} \subset \mathbf{R}$. Valóban, a 3.3.3.4. Tétel szerint $|f| < +\infty$ μ-m.m., azaz egy $A \in \Omega$ halmazzal $\mu(A) = 0$ és $|f(x)| < +\infty$ $(x \in X \setminus A)$. Legyen $F_f := f \cdot \chi_{X \setminus A}$, ekkor

$$F_f(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbf{R} & (x \in X \setminus A) \\ \\ 0 & (x \in A). \end{cases}$$

Világos (ld. 3.1.), hogy az F_f függvény mérhető, és $f = F_f$ μ-m.m., tehát $F_f \sim f$. Ha már most $g \in L$, akkor bármilyen $\lambda \in \mathbf{R}$ együtthatóval létezik az

$$F_f + \lambda G_g : X \to \mathbf{R}$$

mérhető függvény, a 3.3.3.3. Tétel miatt pedig $F_f + \lambda G_g \in L$ és (ld. 3.3.3.4. Tétel)

$$\int (F_f + \lambda G_g)\, d\mu = \int F_f\, d\mu + \lambda \cdot \int G_g\, d\mu = \int f\, d\mu + \lambda \cdot \int g\, d\mu.$$

Ezért állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban az $f + \lambda g$ lineáris kombináción az $F_f + \lambda G_g$ függvényt (ill. a vele ekvivalens bármelyik függvényt) fogjuk érteni. Más szóval a $\Phi := F_f + \lambda G_g$ jelöléssel legyen

$$\hat{f} + \lambda \hat{g} := \hat{\Phi}.$$

Ezzel a művelettel az $\hat{f}$ $(f \in L)$ ekvivalenciaosztályok $\hat{L}$ halmaza vektortér az $\mathbf{R}$ felett, az

$$\hat{L} \ni \hat{f} \mapsto \int \hat{f}\, d\mu$$

hozzárendelés pedig lineáris. Így az eddig mondottak szerint azt írhatjuk, hogy minden $f, g \in L$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int (f + \lambda g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \lambda \int g\, d\mu.$$

A következő tétel előtt emlékeztetünk a 2.5.6. Tételben megfogalmazott állításra, valamint a bizonyítására, miszerint minden mérték „teljessé tehető". A továbbiakban éppen azt vizsgáljuk meg, hogy mi a kapcsolat a szóban forgó mérték szerint integrálható függvények, és az illető mérték teljessé tételével kapott mérték szerint integrálható függvények között.

3.3.3.5. Tétel. *Tekintsük valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az (X, Ω, μ) mértékteret, $(X, \tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ legyen a teljessé tétele. Ekkor tetszőleges $f \in L(\tilde{\mu})$ függvényhez megadhatók olyan f_1, $f_2 \in L(\mu)$ függvények, amelyekkel az alábbiak teljesülnek:*

a) $f_1 \leq f \leq f_2$;

b) $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$;

c) $\int f_i \, d\mu = \int f \, d\tilde{\mu} \quad (i = 1, 2)$.

Bizonyítás. Ha $f \in L_0^+(\tilde{\mu})$, akkor véges sok $A_i \in \tilde{\Omega}$ halmazzal

$$f = \sum_i y_i \cdot \chi_{A_i}$$

(alkalmas $y_i \geq 0$ együtthatókkal). Tudjuk (ld. 2.5.6. Tétel bizonyítása), hogy a fenti összegben szereplő minden egyes A_i halmaz $A_i = B_i \cup C_i$ alakú, ahol

$$B_i,\ D_i \in \Omega,\ C_i \subset D_i,\ \mu(D_i) = 0,\ B_i \cap C_i = \emptyset.$$

Mivel ezekkel a jelölésekkel az f függvény nyilván az

$$f = \sum_i y_i \cdot \chi_{B_i} + \sum_i y_i \cdot \chi_{C_i}$$

alakban írható, ezért az

$$f_1 := \sum_i y_i \cdot \chi_{B_i},\ f_2 := f_1 + \sum_i y_i \cdot \chi_{D_i} \in L_0^+(\mu)$$

függvények triviális módon eleget tesznek a tétel kívánalmainak. Ui.

$$f - f_1 = \sum_i y_i \cdot \chi_{C_i} \geq 0,$$

és hasonlóan

$$f_2 - f = \sum_i y_i \cdot (\chi_{D_i} - \chi_{C_i}),$$

ahol minden i-re $C_i \subset D_i$ miatt $\chi_{C_i} \leq \chi_{D_i}$, így $f_2 - f \geq 0$. Továbbá

$$\{f_1 \neq f_2\} \subset \bigcup_i D_i,$$

és itt $\bigcup_i D_i \in \Omega$, valamint $\mu(D_i) = 0$, ezért $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$. Végül

$$\int f_1 \, d\mu = \sum_i y_i \cdot \mu(B_i) = \sum_i y_i \cdot \tilde{\mu}(A_i) = \int f \, d\tilde{\mu},$$

és

$$\int f_2\,d\mu = \int f_1\,d\mu + \sum_i y_i\cdot\mu(D_i) = \int f_1\,d\mu = \int f\,d\tilde{\mu}.$$

Legyen most $f \in L(\tilde{\mu})$ tetszőleges függvény. Az $f = f^+ - f^-$ felbontást figyelembe véve nyilván elegendő a tételt csak $f \geq 0$ esetén belátni, azaz amikor

$$f \in L(\tilde{\mu}) \cap L^+(\tilde{\mu}).$$

Ekkor viszont egy megfelelően választott, monoton növekedő $g_n \in L_0^+(\tilde{\mu})$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\tilde{\mu} = \int f\,d\tilde{\mu}$$

igaz. Az előzőek szerint minden $n \in \mathbf{N}$ és $i = 1, 2$ mellett van olyan $f_{in} \in L_0^+(\mu)$, amivel

$$f_{1n} \leq g_n \leq f_{2n},\ \mu(\{f_{1n} \neq f_{2n}\}) = 0,\ \int f_{in}\,d\mu = \int g_n\,d\tilde{\mu} \qquad (i = 1, 2).$$

Ha

$$f_1 := \limsup_{n\to\infty} f_{1n},\ f_2 := \liminf_{n\to\infty} f_{2n},$$

akkor (ld. 3.1.5. Tétel) $f_1,\ f_2 \in L^+(\mu)$, és

$$f_1 = \limsup_{n\to\infty} f_{1n} \leq \limsup_{n\to\infty} g_n = f = \liminf_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} f_{2n} = f_2,$$

amivel az a) állítást beláttuk. A Fatou-lemma (ld. 3.3.2.7. Tétel) miatt

$$\int f_2\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_{2n}\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,d\tilde{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\tilde{\mu} = \int f\,d\tilde{\mu},$$

és – figyelembe véve, hogy $f_{1n} \leq f \in L(\tilde{\mu})$ $(n \in \mathbf{N})$ teljesül –

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_{1n}\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int f_{1n}\,d\tilde{\mu} = \limsup_{n\to\infty} \int g_n\,d\tilde{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\tilde{\mu} =$$

$$\int f\,d\tilde{\mu} \leq \int \limsup_n f_{1n}\,d\tilde{\mu} = \int f_1\,d\tilde{\mu} = \int f_1\,d\mu.$$

Innen tehát

$$\int f_2\,d\mu \leq \int f\,d\tilde{\mu} \leq \int f_1\,d\mu$$

következik, valamint az $f_1 \leq f \leq f_2$ egyenlőtlenségek figyelembevételével $\int f_1\,d\mu \leq \int f_2\,d\mu$ is adódik. A fentieket összegezve így azt kaptuk, hogy

$$\int f_i\,d\mu = \int f\,d\tilde{\mu} \qquad (i = 1, 2),$$

tehát $f_i \in L(\mu)$ $(i = 1, 2)$. Ezzel a c)-t is beláttuk.

Legyen végül $A := \{f_1 \neq f_2\} = \{f_2 > f_1\}$. Ekkor (ld. 3.1.3. Tétel) $A \in \Omega$, és

$$\int f_1 \cdot \chi_A \, d\mu = \int f_2 \cdot \chi_A \, d\mu, \; f_2 \cdot \chi_A - f_1 \cdot \chi_A \in L(\mu) \cap L^+(\mu),$$

valamint $\int (f_2 \cdot \chi_A - f_1 \cdot \chi_A) \, d\mu = 0$ miatt (ld. 3.3.2.6. Tétel) fennáll az

$$f_2 \cdot \chi_A - f_1 \cdot \chi_A = 0 \quad \mu - \text{m.m.}$$

egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy egy $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal

$$f_2(x) \cdot \chi_A(x) - f_1(x) \cdot \chi_A(x) = 0 \qquad (x \in X \setminus B).$$

Mivel minden $x \in A$ helyen az A értelmezéséből következően $f_1(x) \neq f_2(x)$, más szóval

$$f_2(x) \cdot \chi_A(x) - f_1(x) \cdot \chi_A(x) = f_2(x) - f_1(x) \neq 0,$$

ezért szükségszerűen $A \subset B$. Az $A \in \Omega$ mérhetőség és $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) = 0$ miatt mindezekből a $\mu(A) = 0$ egyenőség már adódik, ami a b) állítás bizonyítását jelenti. ■

3.4. Megjegyzések

i) A 3.3.1. Definícióban szereplő

$$f = \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \chi_A$$

lépcsősfüggvényt (ahol az $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega$ véges halmaz) a következőképpen tudjuk kanonikus alakra hozni. Legyen ti. $S \subset \Omega_0$ esetén

$$F_S := \begin{cases} \bigcap_{A \in S} \bigcap_{B \in \Omega_0 \setminus S} (A \setminus B) & (S \neq \Omega_0) \\ \bigcap_{A \in \Omega_0} & (S = \Omega_0). \end{cases}$$

Ha valamilyen $S \subset \Omega_0$ mellett $\beta_S := \sum_{A \in S} \alpha_A$, akkor

$$f = \sum_{S \subset \Omega_0} \beta_S \cdot \chi_{F_S}.$$

Itt feltehető, hogy $S, P \subset \Omega_0$, $S \neq P$ esetén $\beta_S \neq \beta_P$, ui. különben egyesítsük az S, P halmazokat. Így valóban a kívánt kanonikus alakhoz jutunk.

ii) Tegyük fel, hogy az (X, Ω, μ) mértékteret egy X-beli $\mathcal{G}$ gyűrűn értelmezett kvázimérték kiterjesztése révén kaptuk (ld. 2.5.), és legyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$. Ekkor a 2.6. xiii) megjegyzés szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $B \in \mathcal{G}$, hogy az

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

jelöléssel $\mu(A\triangle B) < \varepsilon$. Mivel $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\triangle B}$, ezért

$$\int |\chi_A - \chi_B|\, d\mu = \int \chi_{A\triangle B}\, d\mu = \mu(A\triangle B) < \varepsilon.$$

Sőt, ha $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{H})$, ahol $\mathcal{H}$ egy X-beli félgyűrű, akkor (ld. 2.1.4. Tétel) az előbbi B felbontható véges sok, páronként diszjunkt $\mathcal{H}$-beli H_γ $(\gamma \in \Gamma)$ halmaz egyesítésére: $B = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$. Ekkor tehát

$$\int |\chi_A - \chi_B|\, d\mu = \int \Big|\chi_A - \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_{H_\gamma}\Big|\, d\mu < \varepsilon.$$

Mivel $f \in L_0^+$, $\int f\, d\mu < +\infty$ esetén bármelyik $0 \neq x \in \mathcal{R}_f$ mellett

$$\int f\, d\mu \geq x\cdot \mu(\{f = x\})$$

miatt $\mu(\{f = x\}) < +\infty$, ezért az előbbiekben χ_A helyett $\{f = x\}$ írható. Innen rögtön adódik az is, hogy a szóban forgó f-hez és tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in L_0^+$, ill. $h \in L_0^+$ lépcsősfüggvény, amelyikkel

$$\{g = z\} \in \mathcal{G} \quad (z \in \mathcal{R}_g), \text{ ill. } \{h = y\} \in \mathcal{H} \quad (y \in \mathcal{R}_h),$$

és

$$\int |f - g|\, d\mu < \varepsilon, \text{ ill. } \int |f - h|\, d\mu < \varepsilon.$$

Ha ui. $0 \neq x \in \mathcal{R}_f$ (nyilván feltehető, hogy $\mathcal{R}_f \neq \{0\}$) és $\delta > 0$, akkor egy alkalmas $B_x \in \mathcal{G}$ halmazzal

$$\int |\chi_{\{f=x\}} - \chi_{B_x}|\, d\mu < \delta,$$

ezért a

$$g := \sum_{0\neq x\in\mathcal{R}_f} x\cdot \chi_{B_x} \in L_0^+$$

függvénnyel „elég kis" δ-ra

$$\int |f - g|\, d\mu = \int \Big|\sum_{0\neq x\in\mathcal{R}_f} x\cdot (\chi_{\{f=x\}} - \chi_{B_x})\Big|\, d\mu \leq$$

$$\sum_{0\neq x\in\mathcal{R}_f} x\cdot \int |\chi_{\{f=x\}} - \chi_{B_x}|\, d\mu \leq \delta\cdot \sum_{x\in\mathcal{R}_f} x < \varepsilon.$$

(Az $\int |f - h|\, d\mu < \varepsilon$ becslésnek eleget tevő h-t analóg módon kapjuk.)

iii) A Beppo Levi-tételnek (ld. 3.3.2.2. Tétel) a függvénysorokra vonatkozó (és könnyen belátható módon a tétellel ekvivalens alakját) a következőképpen fogalmazhatjuk meg: ha $g_n \in L^+ \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \in L^+$, és

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Ui. legyen

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor az (f_n) sorozatra alkalmazható a Beppo Levi-tétel, és így (ld. 3.3.2.2. Tétel):

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int g_k \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

iv) Ha $X := \mathbf{N}$, $\Omega := \mathcal{P}(X)$, a μ pedig egy tetszőleges mérték az Ω-n, akkor legyen

$$\alpha_n := \mu(\{n\}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Könnyű meggondolni, hogy most

$$L^+ = [0, +\infty]^{\mathbf{N}},$$

és tetszőleges $f : \mathbf{N} \to [0, +\infty]$ sorozatra

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \alpha_n.$$

Egyrészt ui. $L^+ \subset [0, +\infty]^{\mathbf{N}}$ nyilvánvalóan igaz. Másrészt legyen $f \in [0, +\infty]^{\mathbf{N}}$, és $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$f_n(k) := \begin{cases} 0 & (k > n) \\ \min\{n, f(k)\} & (k \le n) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in L_0^+$, és az (f_n) sorozat monoton növekedő módon tart az f-hez. Tehát valóban igaz, hogy $f \in L^+$, és

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \chi_{\{n\}}.$$

Innen a Beppo Levi-tétel sorokra vonatkozó fenti alakjából (ld. iii))

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f(n) \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \int \chi_{\{n\}} \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \alpha_n$$

következik.

v) Legyen (ld. 2.4. i) megjegyzés) pl. adott az $X \neq \emptyset$ halmaz, az Ω legyen X-beli szigma-algebra, és $\omega \in X$ esetén

$$\mu_\omega(A) := \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases} \qquad (A \in \Omega).$$

Ekkor a μ_ω mérték, és bármelyik $f \in L^+$ esetén

$$\int f \, d\mu_\omega = f(\omega).$$

Ha ui. $g \in L_0^+$, akkor

$$\int g \, d\mu_\omega = \sum_{x \in \mathcal{R}_g} x \cdot \mu_\omega\Big(\{g = x\}\Big),$$

ahol a μ_ω definíciója szerint az $x = g(\omega)$ esetben

$$\mu_\omega\Big(\{g = x\}\Big) = 1,$$

különben pedig

$$\mu_\omega\Big(\{g = x\}\Big) = 0.$$

Ezért $\int g \, d\mu_\omega = g(\omega)$. Ha $g_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan monoton növekedő sorozat, amelyikre $\lim_{n\to\infty} g_n = f$, akkor

$$\int f \, d\mu_\omega = \lim_n \int g_n \, d\mu_\omega = \lim_n g_n(\omega) = f(\omega).$$

vi) A 3.3.2.4. Tétel bizonyításából az is kiderül, hogy ha az $f : X \to [0, +\infty)$ mérhető függvény korlátos, akkor van olyan $f_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő lépcsős-függvénysorozat, amelyik egyenletesen tart az f-hez. Ekkor ui. egy alkalmas $q \geq 0$ számmal $f(x) \leq q \ \ (x \in X)$, következésképpen

$$f(x) < n \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}),$$

ahol az $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexre $q < N$ teljesül. Ekkor viszont az említett tételbizonyításban megkonstruált f_n-ekre $f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + 2^{-n}$, más szóval

$$|f_n(x) - f(x)| < 2^{-n} \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Innen az (f_n) sorozat egyenletes konvergenciája már nyilvánvaló.

vii) Legyen adott az (X, Ω, μ) mértéktér, $X \neq \emptyset$, valamint az $f : X \to [0, +\infty]$ mérhető függvény, és tekintsük az

$$SG_f := \{(x, t) \in X \times \mathbf{R} : 0 \leq t < f(x)\}$$

halmazt (az f függvény ún. *szubgráfját*). Ha (ld. 2.7.1.) $\Omega \otimes \hat{\Omega}_1$ jelöli az Ω és az $\mathbf{R}$-beli Lebesgue-mérhető halmazok $\hat{\Omega}_1$ szigma-algebrája által meghatározott szorzat-σ-algebrát (ld. 2.9.), akkor

$$SG_f \in \Omega \otimes \hat{\Omega}_1.$$

Valóban, $f = \chi_A$ $(A \in \Omega)$ esetén $SG_f = A \times [0, 1)$ nyilván $\Omega \otimes \hat{\Omega}_1$-beli, amiből ugyanez bármelyik $f \in L_0^+$ függvényre is következik. Tetszőleges $f : X \to [0, +\infty]$ mérhető függvényt pedig állítsuk elő az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ alakban egy alkalmas, monoton növekedő $f_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat segítségével. Vegyük észre, hogy

$$SG_f = \bigcup_{n=0}^{\infty} SG_{f_n},$$

amiből az előbbiek szerint $SG_f \in \Omega \otimes \hat{\Omega}_1$ már nyilvánvaló.

Tekintsük (a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mértékkel (ld. 2.7.1.)) a $\mu \otimes \hat{\mu}_1$ mértéket, azaz az $\Omega \otimes \hat{\Omega}_1$-en értelmezett szorzatmérték (ld. 2.9.), ekkor

$$\mu \otimes \hat{\mu}_1(SG_f) = \int f \, d\mu,$$

ami az előbbi gondolatmenethez hasonlóan látható be.

Az eddig mondottak alapján ezzel tehát egy másik „út" kínálkozik az integrálfogalom bevezetésére, nevezetesen: egy $f : X \to [0, +\infty]$ mérhető függvény integrálját értelmezzük az

$$\int f \, d\mu := \mu \otimes \hat{\mu}_1(SG_f)$$

előírással. (Nem nehéz átgondolni az L^+ függvényosztály elemeinek az integrálásával kapcsolatos tételeket ebben a szellemben.)

Az SG_f szubgráfnak igen szemléletes geometriai tartalma van pl. az

$$X := [a, b] \qquad (a, b \in \mathbf{R}, a < b)$$

esetben, amikor az Ω az $[a, b]$-beli Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája, a μ pedig a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mértéknek erre az Ω-ra való leszűkítése. Ekkor ui. $\mu \otimes \hat{\mu}_1(SG_f)$ nem más, mint az f „grafikonja alatti terület".

viii) A „majdnem mindenütt" (vagy „majdnem minden") terminológiával kapcsolatban (ld. 3.3.2.4. Definíció) külön is felhívjuk a figyelmet a következőkre: a „T μ-m.m." állítás

nem azt jelenti,

hogy (μ-)nullamértékű az a halmaz, amelyik azokból a pontokból áll, amelyekre a T nem teljesül, azaz (az említett definíció előtti jelölésekkel)

$$\mu(\{T \neq i\}) = 0.$$

Előfordulhat ui., hogy

$$\{T \neq i\} \notin \Omega.$$

Csupán annyit mondhatunk, hogy valamilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz tartalmazza a $\{T \neq i\}$ halmazt: $\{T \neq i\} \subset A$. Ha a μ mérték teljes (ld. 2.5.), és a T tulajdonság μ-m.m. igaz, akkor persze $\{T \neq i\} \in \Omega$ (lévén a $\{T \neq i\}$ egy (μ-)nullamértékű halmaznak a részhalmaza), és $\mu(\{T \neq i\}) = 0$.

ix) A Fatou-lemma (ld. 3.3.2.7. Tétel) alkalmazását illetően legyenek adottak (az ottani jelölésekkel) az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok, és tekintsük az

$$f_n := \chi_{A_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényeket. Ekkor

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m = \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n},$$

ahol

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

az (A_n) halmazsorozat *limesz inferiorja.* Ezért

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \mu(\liminf_{n\to\infty} A_n)$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

A Fatou-lemma szerint tehát

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

x) Tekintsük továbbra is az előbbi megjegyzésben szereplő halmazokat, és legyen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

az (A_n) halmazsorozat *limesz szuperiorja.* Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n}.$$

Amennyiben a μ mérték véges, úgy az $F(x) := 1 \quad (x \in X)$ függvény L^+-beli és $\int F\, d\mu = \mu(X) < +\infty$. Továbbá minden $n \in \mathbf{N}$ indexre $\chi_{A_n} \le F$. Ezért alkalmazható a Fatou-lemma b) állítása a (χ_{A_n}) függvénysorozatra, miszerint (a xi)-ben látottakkal analóg módon)

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

xi) Legyen

$$X := [0,1],\ \Omega := \{A \cap [0,1] \in \mathcal{P}([0,1]) : A \in \hat{\Omega}_1\}$$

(a $[0,1]$-beli Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája (ld. 2.7.1.)), a μ pedig legyen a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mérték leszűkítése az Ω-ra. Ekkor az

$$f_n := n\cdot \chi_{(0,1/n)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

L^+-beli függvényekre

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = 0,\ \int f_n\, d\mu = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = 1 > \int \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu = 0.$$

Tehát ebben az esetben nem teljesül a Fatou-lemma (ld. 3.3.2.7. Tétel) b) részében megfogalmazott állítás. Könnyű meggondolni, hogy ekkor nem is létezik olyan $F \in L^+$ függvény, amelyik „tudná" azt, amit az említett b) állításban feltételként szabtunk. Ui.

$$\sup_n f_n(x) = k \qquad \left(\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k},\ \ 0 < k \in \mathbf{N}\right),$$

ezért

$$\int \sup_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = +\infty.$$

xii) Ha $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R},\ \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ (ld. 2.7.1.) és $A_n := (n, +\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset,$$

tehát

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Ugyanakkor minden $n \in \mathbf{N}$ természetes számra $\mu(A_n) = +\infty$, következésképpen

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty,$$

így a x) megjegyzés ebben az esetben nem igaz. (Nem is véges persze a μ mérték.)

xiii) A 3.3.3.2. Tételben szereplő b) feltételből

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu - \int h\,d\mu$$

következik. Valóban, mivel $f = g - h = f^+ - f^-$, ezért $g + f^- = f^+ + h$. Tudjuk, hogy $g, h, f^\pm \in L^+$, így (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int (g + f^-)\,d\mu = \int g\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int (f^+ + h)\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int h\,d\mu.$$

Következésképpen

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int g\,d\mu - \int h\,d\mu.$$

xiv) A 3.3.3.2. Tétel c) feltételére hivatkozva nyilvánvaló, hogy amennyiben a μ mérték véges (azaz $\mu(X) < +\infty$), akkor bármilyen korlátos és mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén $f \in L$. Ekkor ui. az említett c) feltételben szereplő G függvény megválasztható a

$$G(t) := q := \sup\{|f(x)| \in \mathbf{R} : x \in X\} \qquad (t \in X)$$

utasításnak megfelelő konstansfüggvénynek, amikor is $\int G\,d\mu = q\cdot\mu(X) < +\infty$.

xv) Legyen az (X, Ω, μ) mértéktér mellett adott az (Y, Θ) mérhető tér $(\Omega,\ \Theta \neq \emptyset)$, a

$$T : X \to Y$$

leképezés pedig legyen (Ω, Θ)-mérhető, azaz tetszőleges $A \in \Theta$ halmazra a $T^{-1}[A]$ őskép Ω-beli mérhető halmaz. Ha ν jelöli a μ mértéknek a T által létesített képét (ld. 2.7.), akkor tetszőleges $f : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ Borel-mérhető függvényre

1° $\quad f \in L(\nu) \implies f \circ T \in L(\mu)$;

2° $\quad f \in L(\nu) \implies \int f\,d\nu = \int f \circ T\,d\mu$.

Ha ui. az $f = f^+ - f^-$ felbontásra gondolunk, akkor

$$(f \circ T)^+ = f^+ \circ T,\ (f \circ T)^- = f^- \circ T$$

miatt feltehető, hogy $f \geq 0$. Legyen tehát $f \in L^+(\nu) \cap L(\nu)$, ekkor mindenesetre az $f \circ T : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény mérhető. Ti. tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ számmal

$$\{f(T(x)) \geq \alpha\} = T^{-1}[\{f \geq \alpha\}] \in \Omega,$$

amiből a 3.1.2. Tétel alapján az $f \circ T$ függvény mérhetősége – tehát jelen esetben $f \circ T \in L^+(\mu)$ – valóban következik. Megmutatjuk, hogy igaz a 2°-ben szereplő egyenlőség. Az $L^+(\mu)$ függvényosztály definícióját figyelembe véve (ld. 3.3.2.) elegendő

mindezt $f \in L_0^+(\nu)$ esetén igazolni. Legyen ehhez $f = \sum_i y_i \cdot \chi_{A_i}$, ahol „$\sum_i$" egy véges összeget jelent, és minden benne szereplő i-re $y_i \geq 0$, $A_i \in \Theta$. Nyilvánvaló, hogy

$$f \circ T = \sum_i y_i \cdot \chi_{B_i} \in L_0^+(\mu) \qquad (B_i := T^{-1}[A_i] \in \Omega),$$

amiből a ν definíciója (ld. 2.7.) alapján

$$\int f \circ T \, d\mu = \sum_i y_i \cdot \mu(B_i) = \sum_i y_i \cdot \nu(A_i) = \int f \, d\nu.$$

xvi) Az (X, Ω, μ) mértéktér esetén legyen $A \in \Omega \setminus \{X, \emptyset\}$, $\mu(A) = 0$, és tegyük fel, hogy adott egy $f : X \setminus A \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény, amelyik mérhető az

$$\{(X \setminus A) \cap B \in \mathcal{P}(X) : B \in \Omega\}$$

szigma-algebrára nézve. (Tehát bármilyen Borel-halmaznak az f által létesített ősképe az $(X \setminus A)$-nak egy Ω-beli részhalmaza.) Definiáljuk ezek után az $\tilde{f} : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényt a következőképpen:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in X \setminus A) \\ \\ 0 & (x \in A). \end{cases}$$

Nem nehéz belátni, hogy az $\tilde{f}$ mérhető, és $f = \tilde{f}$ μ-m.m. Akkor mondjuk, hogy az f-nek van integrálja, ha az $\tilde{f}$-nak van, és ebben az esetben legyen

$$\int f \, d\mu := \int \tilde{f} \, d\mu.$$

Analóg módon értelmezzük azt a tényt, hogy $f \in L$ vagy $f \in L^+$. Így pl. $f, g \in L$ esetén a 3.3.3.4. Tétel alapján f, g μ-m.m. véges, ezért az $f + g$ összegfüggvény μ-m.m. $x \in X$ helyen definiálva van. Az előbbi értelemben tehát $f + g \in L$, és

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

(ld. 3.3.3.4. Tétel bizonyítása utáni megjegyzés).

xvii) Legyen az (X, Ω, μ) egy tetszőleges mértéktér, $A \in \Omega$ és

$$\Omega_A := \{B \in \mathcal{P}(A) : B \in \Omega\}$$

(az Ω spurja (nyoma) az A-ban (ld. 2.2. iv) megjegyzés)). Ha μ_A a μ mérték leszűkítése az Ω_A szigma-algebrára, akkor tetszőleges $f \in L^+(\mu)$ függvény esetén az

$$f_A(x) := f(x) \qquad (x \in A)$$

(leszűkített) függvényre $f_A \in L^+(\mu_A)$, és

$$\int_A f\,d\mu := \int f\cdot \chi_A\,d\mu = \int f_A\,d\mu_A.$$

Egyrészt ui. minden Borel-mérhető $B \subset \mathbf{R}$ halmazra

$$f_A^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B] \in \Omega_A = \Omega \cap \mathcal{P}(A),$$

így (ld. 3.1.) $f_A \in L^+(\mu_A)$. Másrészt állítsuk elő az $f\cdot \chi_A \in L^+(\mu)$ függvényt valamilyen $f_n \in L_0^+(\mu)$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő sorozat határértékeként. Ekkor

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

az

$$f_{nA}(x) := f_n(x) \qquad (x \in A,\, n \in \mathbf{N})$$

$L_0^+(\mu_A)$-beli sorozat pedig monoton nőve tart az f_A-hoz. Ezért (ld. 3.3.2.)

$$\int f_A\,d\mu_A = \lim_{n\to\infty} \int f_{nA}\,d\mu_A.$$

Mivel minden $n \in \mathbf{N}$ mellett nyilván $f_n = f_n\cdot \chi_A$, ezért véges sok, alkalmasan választott $y_{in} \geq 0$ és $A_{in} \in \Omega_A$ segítségével

$$f_n = \sum_i y_{in}\cdot \chi_{A_{in}}.$$

Ha tehát

$$\tilde{\chi}_{in}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A_{in}) \\ 0 & (x \in A \setminus A_{in}), \end{cases}$$

akkor $f_{nA} = \sum_i y_{in}\cdot \tilde{\chi}_{in}$. Következésképpen

$$\int f_n\,d\mu = \sum_i y_{in}\cdot \mu(A_{in}) = \sum_i y_{in}\cdot \mu_A(A_{in}) = \int f_{nA}\,d\mu_A \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{nA}\,d\mu_A$.

Az $f = f^+ - f^-$ felbontásra gondolva az előbbiek nyilván átvihetők minden integrálható $f \in L(\mu)$ függvényre is.

3.5. L^p-terek

Legyen valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz mellett adott a továbbiakban az (X, Ω, μ) mértéktér. Ekkor tetszőleges $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény és $0 < p < +\infty$ „kitevő" esetén az $|f|^p : X \to [0, +\infty]$ függvény is (könnyen beláthatóan) mérhető. Valóban, egyrészt az $|f|$ függvény mérhető (ld. 3.1.), másrészt bármilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ számra (ld. 3.1.3. Tétel) az

$$\{|f|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} X & (\alpha \leq 0) \\ \{|f| \geq \alpha^{1/p}\} & (\alpha > 0) \end{cases}$$

nívóhalmaz Ω-beli, amiből az $|f|^p$ mérhetősége már következik. Tehát $|f|^p \in L^+$, legyen

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

(ahol $(+\infty)^{1/p} := +\infty$) az f ún. *p-normája.*

A korábbi tételeink alapján (ld. 3.3.) már világos, hogy

- $0 \leq \|f\|_p \leq +\infty$;
- $\|f\|_p < +\infty \implies |f| < +\infty$ μ-m.m.;
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ-m.m.;
- $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$ $(c \in \mathbf{R})$.

A fentiekben a $0 < p < +\infty$ feltétel mellett definiált $\|f\|_p$ értelmezését terjesszük ki a $p := +\infty$ esetre is az alábbiak szerint (a jelölésben egyszerűen ∞-t írva): egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényre legyen

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : |f| \leq \alpha \ \ \mu\text{-m.m.}\}.$$

(Állapodjunk meg abban, hogy $\inf \emptyset := +\infty$.) Így azt mondhatjuk, hogy

$$0 \leq \|f\|_\infty \leq +\infty.$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty \qquad (c \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $\|f\|_\infty < +\infty$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\alpha \geq 0$ szám, amivel $|f| \leq \alpha$ μ-m.m. Az is igaz továbbá, hogy

$$|f| \leq \|f\|_\infty \ \ \mu\text{-m.m.}$$

Ez ui. $\|f\|_\infty = +\infty$ mellett triviális. Ha viszont $\|f\|_\infty < +\infty$, akkor a 3.1.3. Tétel miatt mérhető $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ halmazt állítsuk elő a következőképpen:

$$\{|f| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}.$$

Az ebben a felbontásban szereplő összes $\{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}$ halmaz mértéke az $\|f\|_\infty$ értelmezése miatt (az infimum definíciója alapján) nyilván nulla, ezért

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

Egyúttal az is kiderült, hogy

$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-m.m.}$$

(Ha $\|f\|_\infty < +\infty$, akkor az $\|f\|_\infty$ számot szokás az $|f|$ függvény *lényeges felső korlátjának* is nevezni. Ennek megfelelően használatos rá a $\sup \operatorname{ess} |f|$ jelölés is, a francia *supremum essentiel* kifejezés alapján.)

A címben jelzett függvényterek vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú lesz a következő tétel, ami az elemi analízisből jól ismert egyik egyenlőtlenség általánosítása $\|\cdot\|_p$-ra.

3.5.1. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy az* $1 \le p,\ q \le +\infty$ *kitevőkre*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor:

a) *tetszőleges* $f,\ h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvényekre*

$$\|fh\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|h\|_q;$$

b) *ha* $\|f\|_p,\ \|h\|_q < +\infty$, *akkor*

1° *az* $1 < p, q < +\infty$ *esetben az*

$$\|fh\|_1 = \|f\|_p \cdot \|h\|_q$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha valamilyen $\lambda \ge 0$ *számmal*

$$|f|^p = \lambda \cdot |h|^q \quad \mu\text{-m.m. vagy } |h|^q = \lambda \cdot |f|^p \quad \mu\text{-m.m.};$$

2° *az*

$$\|fh\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty$$

egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$|h(x)| = \|h\|_\infty \quad (\mu\text{-m.m. } x \in \{|f| > 0\}).$$

Bizonyítás. Az a) állítás igazolásához először is jegyezzük meg, hogy a 3.1.4. Tétel (valamint a bizonyítása után tett észrevétel) alapján az fh szorzatfüggvény mérhető.

Ha $\|f\|_p \cdot \|h\|_q = 0$, azaz $\|f\|_p = 0$ vagy $\|h\|_q = 0$, akkor az előzőleg mondottak szerint $f = 0$ μ-m.m. vagy $h = 0$ μ-m.m., tehát egyúttal $|fh| = |f| \cdot |h| = 0$ μ-m.m. Innen (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|fh\|_1 = \int |fh| \, d\mu = 0$$

következik. Ekkor tehát a tétel állítása triviális. Ez utóbbi mondható nyilván akkor is, ha $\|f\|_p \cdot \|h\|_q = +\infty$. Ezért feltehető a továbbiakban, hogy

$$0 < \|f\|_p, \ \|h\|_q < +\infty.$$

Ekkor (megint csak az előzőek alapján) $|f|, |h| < +\infty$ μ-m.m., azaz egy $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$|f(x)|, |h(x)| < +\infty \qquad (x \in X \setminus A).$$

Tegyük fel először, hogy $p = 1$, amikor is $q = +\infty$. Mivel $|fh| \leq \|h\|_\infty \cdot |f|$ μ-m.m., ezért a 3.3.2.6. Tétel miatt

$$\|fh\|_1 = \int |fh| \, d\mu \leq \|h\|_\infty \cdot \Big(\int |f| \, d\mu \Big) = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty.$$

(Mivel a tételben az f és a h szerepe nyilván szimmetrikus, így a $q = 1$, $p = +\infty$ esetet is „elintéztük.)

A továbbiakban tehát élhetünk már az $1 < p, q < +\infty$ feltételezéssel is. Mutassuk meg, hogy minden $a, b \in [0, +\infty)$ esetén

$$(*) \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Valóban, nyilván elegendő $a, b > 0$ mellett igazolni a fenti egyenlőtlenséget, hiszen különben a dolog nyilvánvaló. Tekintsük ehhez a

$$\varphi(t) := \frac{t^p}{p} - bt + \frac{b^q}{q} \qquad (t > 0)$$

függvényt. Mivel a φ differenciálható, és a $\varphi'(t) = t^{p-1} - b$ $(t > 0)$ deriváltfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért a $c := b^{\frac{1}{p-1}}$ jelöléssel $\varphi'(c) = 0$ miatt a φ-nek a c-ben abszolút minimuma van. Tekintve, hogy $\varphi(c) = 0$, ezért $\varphi \geq 0$, amit igazolni kellett.

Alkalmazzuk a most bebizonyított elemi egyenlőtlenséget minden egyes $x \in X \setminus A$ mellett az

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|h(x)|}{\|h\|_q}$$

szereposztással. Ekkor (a $(*)$ becslésre tekintettel) az

$$\frac{|fh|}{\|f\|_p\cdot \|h\|_q} \le \frac{|f|^p}{p\cdot \|f\|_p^p} + \frac{|h|^q}{q\cdot \|h\|_q^q} \quad \mu\text{-m.m.}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Innen az integrál monotonitása (ld. 3.3.2.6. Tétel) alapján

$$\frac{\|fh\|_1}{\|f\|_p\cdot \|h\|_q} = \frac{1}{\|f\|_p\cdot \|h\|_q}\cdot \int |fh|\, d\mu \le$$

$$\frac{1}{p\cdot \|f\|_p^p}\cdot \int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q\cdot \|h\|_q^q}\cdot \int |h|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

adódik, amit bizonyítani kellett.

Ezzel az a) állítást beláttuk. A b)-ben mondottak meglehetősen egyszerűek akkor, ha $\|f\|_p = 0$ vagy $\|h\|_q = 0$. Ekkor ui. $f = 0$ μ-m.m. vagy $h = 0$ μ-m.m., következésképpen az 1°-ben a $\lambda := 0$ választás megfelelő, a 2° pedig triviális.

Feltehetjük tehát, hogy $0 < \|f\|_p, \|h\|_q < +\infty$. Az 1° bizonyításához elöljáróban emlékeztetünk arra, hogy a $(*)$-beli egyenlőtlenségnek a bizonyításából az is kiderül, hogy (az ottani jelölésekkel) az

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a^p = b^q$. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy az

$$\|fh\|_1 = \|f\|_p\cdot \|h\|_q$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$|f|^p = \frac{\|f\|_p^p}{\|h\|_q^q}\cdot |h|^q \quad \mu\text{-m.m.}$$

Ha ui. ez az utóbbi egyenlőség teljesül, akkor

$$|fh| = \frac{\|f\|_p}{\|h\|_q^{q/p}}\cdot |h|^{q/p+1} = \frac{\|f\|_p}{\|h\|_q^{q/p}}\cdot |h|^q \quad \mu\text{-m.m.},$$

ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel) mindkét oldalt integrálva

$$\|fh\|_1 = \frac{\|f\|_p}{\|h\|_q^{q/p}}\cdot \int |h|^q\, d\mu = \|f\|_p\cdot \|h\|_q^{q-q/p} = \|f\|_p\cdot \|h\|_q.$$

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy $\|fh\|_1 = \|f\|_p\cdot \|h\|_q$. Ekkor az a)-beli bizonyítás szerint

$$\frac{\|fh\|_1}{\|f\|_p\cdot \|h\|_q} = \int \frac{|fh|}{\|f\|_p\cdot \|h\|_q}\, d\mu \le$$

$$\int \left(\frac{|f|^p}{p\cdot \|f\|_p^p} + \frac{|h|^q}{q\cdot \|h\|_q^q}\right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

amiből

$$\|fh\|_1 = \int |fh|\, d\mu \le \int \left(\frac{\|h\|_q}{p\cdot \|f\|_p^{p-1}} \cdot |f|^p + \frac{\|f\|_p}{q\cdot \|h\|_q^{q-1}} \cdot |h|^q \right) d\mu = \|f\|_p \cdot \|h\|_q$$

következik. Mivel a feltételezésünk szerint $\|fh\|_1 = \|f\|_p \cdot \|h\|_q$, így

$$\int |fh|\, d\mu = \int \left(\frac{\|h\|_q}{p\cdot \|f\|_p^{p-1}} \cdot |f|^p + \frac{\|f\|_p}{q\cdot \|h\|_q^{q-1}} \cdot |h|^q \right) d\mu.$$

Vegyük figyelembe, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség alapján

$$|fh| \le \frac{\|h\|_q}{p\cdot \|f\|_p^{p-1}} \cdot |f|^p + \frac{\|f\|_p}{q\cdot \|h\|_q^{q-1}} \cdot |h|^q \quad \mu\text{-m.m.},$$

azaz egy alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$|f(x)h(x)| \le \frac{\|h\|_q}{p\cdot \|f\|_p^{p-1}} \cdot |f(x)|^p + \frac{\|f\|_p}{q\cdot \|h\|_q^{q-1}} \cdot |h(x)|^q \qquad (x \in X \setminus A).$$

Mivel $\|f\|_p$, $\|h\|_q < +\infty$, ezért az $x \in X \setminus A$ pontokban az is feltehető (ld. 3.3.2.6. Tétel), hogy $|f(x)|$, $|h(x)| < +\infty$.

Mindezeket összefoglalva azt kaptuk, hogy az

$$F(x) := \frac{\|h\|_q}{p\cdot \|f\|_p^{p-1}} \cdot |f(x)|^p + \frac{\|f\|_p}{q\cdot \|h\|_q^{q-1}} \cdot |h(x)|^q - |f(x)h(x)| \cdot \chi_{X\setminus A} \qquad (x \in X)$$

függvény L^+-beli, és $\int F\, d\mu = 0$. Innen a 3.3.2.6. Tételre tekintettel az következik, hogy $F = 0$ μ-m.m., azaz (némi átalakítással)

$$\frac{|f|\cdot |h|}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} = \frac{|f|^p}{p\cdot \|f\|_p^p} + \frac{|h|^q}{q\cdot \|h\|_q^q} \quad \mu\text{-m.m.}$$

A fent említett $a^p = b^q$ szükséges és elégséges feltételt μ-m.m. $x \in X$ helyen az

$$a := (|f(x)|/\|f\|_p)^p,\ b := (|h(x)|/\|h\|_q)^q$$

jelölésekkel figyelembe véve tehát oda jutunk, hogy

$$\left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p = \left(\frac{|h|}{\|h\|_q} \right)^q \quad \mu\text{-m.m.},$$

ami (pl.) a $\lambda := \|f\|_p^p / \|h\|_q^q$ szereposztással nyilván ekvivalens az 1° állítással.

A $p = 1$, $q = +\infty$, $0 < \|f\|_1$, $\|h\|_\infty < +\infty$ esetben (ld. 2°) tegyük fel először azt, hogy

$$|h(x)| = \|h\|_\infty \quad (\mu\text{-m.m. } x \in \{|f| > 0\}).$$

Világos, hogy ekkor

$$|fh| = |f|\cdot |h|\cdot \chi_{\{|f|>0\}} = |f|\cdot \|h\|_\infty \cdot \chi_{\{|f|>0\}} \quad \mu\text{-m.m.}$$

Így (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|fh\|_1 = \int |f|\cdot |h|\, d\mu = \int |f|\cdot |h|\cdot \chi_{\{|f|>0\}}\, d\mu = \int |f|\cdot \|h\|_\infty \cdot \chi_{\{|f|>0\}}\, d\mu =$$

$$\|h\|_\infty \cdot \int |f|\cdot \chi_{\{|f|>0\}}\, d\mu = \|h\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty .$$

Fordítva, legyen most $\|fh\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty$. Mivel egy alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal $|f(x)h(x)| \le |f(x)|\cdot \|h\|_\infty$ és $|f(x)|, |h(x)| < +\infty \quad (x \in X \setminus A)$, ezért

$$|f|\cdot (\|h\|_\infty - |h|\cdot \chi_{X\setminus A}) \in L^+.$$

Továbbá (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\int |f|\cdot (\|h\|_\infty - |h|\cdot \chi_{X\setminus A})\, d\mu = \|h\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu - \int |f|\cdot |h|\cdot \chi_{X\setminus A}\, d\mu =$$

$$\|h\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu - \int |fh|\, d\mu = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_1 - \|fh\|_1 = 0.$$

Innen azt kapjuk (ld. 3.3.2.6. Tétel), hogy

$$|f|\cdot (\|h\|_\infty - |h|\cdot \chi_{X\setminus A}) = 0 \quad \mu\text{-m.m.},$$

tehát egy $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal

$$|f(x)|\cdot (\|h\|_\infty - |h(x)|\cdot \chi_{X\setminus A}(x)) = 0 \quad (x \in X \setminus B).$$

Mivel $|f(x)| > 0 \ \ (x \in \{|f| > 0\})$, ezért mindebből

$$\|h\|_\infty - |h(x)| = 0 \qquad (x \in \{|f| > 0\} \setminus (A \cup B))$$

következik. Ez – figyelembe véve, hogy $\mu(A \cup B) = 0$ – nem jelent mást, mint azt, hogy $|h| = \|h\|_\infty$ (μ-m.m. $x \in \{|f| > 0\}$). ■

A Hölder-egyenlőtlenség alábbi kiterjesztése könnyen megkapható az „eredeti" változatból (ld. 3.5.1. Tétel). Nevezetesen, tegyük fel, hogy valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén az

$$f_k : X \to \overline{\mathbf{R}} \qquad (k = 0, ..., n)$$

függvények valamennyien mérhetők, és adottak a $0 < p_k \le +\infty \quad (k = 0, ..., n)$ kitevők. Legyen a $0 < p \le +\infty$ olyan, hogy

$$\frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_k}.$$

Ekkor

$$\Big\| \prod_{k=0}^{n} f_k \Big\|_p \le \prod_{k=0}^{n} \|f_k\|_{p_k}.$$

Ha itt $p_k < +\infty \quad (k = 0, ..., n)$, és az előbbi (általánosított) Hölder-egyenlőtlenségben egyenlőség van, akkor alkalmas $c_k \ge 0 \quad (k = 0, ..., n)$ együtthatókkal

$$c_0 \cdot |f_0|^{p_0} = \ldots = c_n \cdot |f_n|^{p_n} \quad \mu\text{-m.m.}$$

A következő tétel a fentiekben bevezetett $\|f\|_p$-k közötti kapcsolatra mutat rá, egyúttal mintegy „magyarázva" is az $\|f\|_\infty$ jelölésben a ∞ szimbólumot.

3.5.2. Tétel. *Legyen $X \neq \emptyset$, az (X, Ω, μ) egy tetszőleges mértéktér, az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény pedig legyen mérhető. Ekkor*:

a) $\|f\|_\infty = +\infty$ *esetén* $\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$;

b) *ha van olyan* $0 < p < +\infty$ *kitevő, amivel* $\|f\|_p < +\infty$, *akkor*

$$\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\|f\|_\infty = +\infty$. Ekkor (a $\|\cdot\|_\infty$ értelmezésére tekintettel) bármilyen $K > 0$ mellett $\mu(\{|f| > K\}) > 0$, ezért a $0 < q < +\infty$ kitevőkre az

$$|f|^q \ge |f|^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \ge K^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}}$$

becslés és a 3.3.2.2. Tétel miatt (a $(+\infty)^{1/q} := +\infty$ megállapodással)

$$\|f\|_q = \left(\int |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \ge \left(\int |f|^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \, d\mu \right)^{1/q} \ge \left(\int K^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \, d\mu \right)^{1/q} =$$

$$K \cdot \Big(\mu(\{|f| > K\}) \Big)^{1/q},$$

amiből $\liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q \ge K$ következik. Mivel itt a $K > 0$ tetszőleges volt, ezért $\liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$. Egyúttal tehát $\limsup_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$ is igaz, azaz valóban létezik a

$$\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = \liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$$

határérték. Ezzel az a) állítást beláttuk.

Ha $\|f\|_\infty = 0$ (ez a helyzet (a jelent pont bevezetőjére gondolva), ha pl. $\|f\|_p = 0$), akkor a fentiek szerint $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-m.m. miatt $f = 0$ μ-m.m., így egyúttal $\|f\|_q = 0$ is igaz minden $(0, +\infty) \ni q$-ra. Ebben az esetben tehát az állításunk triviális.

Legyen tehát a továbbiakban $0 < \|f\|_\infty < +\infty$, $\|f\|_p > 0$, és egy $\alpha \in (0, 1)$ szám mellett tekintsük az

$$A_\alpha := \{|f| > \alpha \cdot \|f\|_\infty\}$$

halmazt. Ekkor (ld. 3.1.3. Tétel) az A_α mérhető, és a $\|\cdot\|_\infty$ definíciója szerint $\mu(A_\alpha) > 0$. Mivel

$$|f|^p \geq |f|^p \cdot \chi_{A_\alpha} \geq (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \chi_{A_\alpha},$$

ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$+\infty > \|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu \geq \int |f|^p \cdot \chi_{A_\alpha} \, d\mu \geq \int (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \chi_{A_\alpha} \, d\mu = (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \mu(A_\alpha),$$

tehát $\mu(A_\alpha) < +\infty$. Innen minden $q > 0$ mellett (az előbbi, az $\|f\|_\infty = +\infty$ esetben követett gondolatmenetet a p helyett a q-ra megismételve) azt kapjuk, hogy

$$\|f\|_q \geq \alpha \cdot \|f\|_\infty \cdot \Big(\mu(A_\alpha)\Big)^{1/q}.$$

Ebből

$$\liminf_{q \to +\infty} \|f\|_q \geq \alpha \cdot \|f\|_\infty \cdot \lim_{q \to +\infty} \Big(\mu(A_\alpha)\Big)^{1/q} = \alpha \cdot \|f\|_\infty,$$

azaz – lévén az $\alpha \in (0,1)$ tetszőleges –

$$\liminf_{q \to +\infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty$$

következik.

Ha viszont $p < q < +\infty$, akkor

$$|f|^q = |f|^{q-p} \cdot |f|^p \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot |f|^p \quad \mu\text{-m.m.}$$

miatt ismét az integrál monotonitását felhasználva (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|f\|_q = \left(\int |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int |f|^{q-p} \cdot |f|^p \, d\mu \right)^{1/q} \leq \|f\|_\infty^{1-p/q} \cdot \|f\|_p^{p/q}.$$

Ezért

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_\infty^{1-p/q} = \lim_{q \to +\infty} \|f\|_\infty^{1-p/q} = \|f\|_\infty,$$

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_p^{p/q} = \lim_{q \to +\infty} \|f\|_p^{p/q} = 1$$

alapján

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$$

adódik, ami az előző becsléssel együtt a bizonyítandó állítást jelenti. ■

3.5.3. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség). *Az eddigi* (X, Ω, μ) *mértéktér mellett a mérhető* $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *függvényekről tegyük fel, hogy létezik az* $f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *összegük. Ekkor*:

a) *tetszőleges* $1 \leq p \leq +\infty$ *esetén*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p;$$

b) *ha* $1 < p < +\infty$ *és* $\|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$, *akkor az*

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha egy alkalmas $c \geq 0$ *együtthatóval vagy* $f = cg$ μ*-m.m., vagy pedig* $g = cf$ μ*-m.m.*

Bizonyítás. A 3.1.4. Tétel és a bizonyítása után mondottak alapján az $f + g$ összegfüggvény mérhető.

A tétel a) állítása nyilván igaz azokban az esetekben, amikor az $\|f\|_p$, $\|g\|_p$ közül legalább az egyik $+\infty$, vagy $\|f + g\|_p = 0$. Ugyanez mondható akkor is, ha $p = 1$, vagy $p = +\infty$. Ha ui. $p = 1$, akkor (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Hasonlóan, ha $p = +\infty$, akkor

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \ \mu\text{-m.m.}$$

miatt (a $\|\cdot\|_\infty$ értelmezése alapján)

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Mindez azt jelenti, hogy a továbbiakban

$$1 < p < +\infty, \ \|f + g\|_p > 0, \ \|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$$

feltehető. Mutassuk meg először is azt, hogy ekkor $\|f + g\|_p < +\infty$. Ehhez felhasználjuk az

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} \cdot (a^p + b^p) \qquad (a, b \geq 0)$$

elemi egyenlőtlenséget, ami a $0 \leq t \mapsto t^p$ függvény konvexitásából azonnal adódik. Tehát

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1} \cdot (|f|^p + |g|^p),$$

így (ld. 3.3.2.2. Tétel) integrálással azt kapjuk, hogy

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1} \cdot (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < +\infty.$$

A Hölder-egyenlőtlenséget (ld. 3.5.1. Tétel) fogjuk alkalmazni. Ui. az

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\cdot |f+g| \le |f+g|^{p-1}\cdot |f| + |f+g|^{p-1}\cdot |g|$$

becslésből (ld. 3.3.2.2. Tétel) integrálás után egyrészt

$$\|f+g\|_p^p \le \||f+g|^{p-1}\cdot |f|\|_1 + \||f+g|^{p-1}\cdot |g|\|_1,$$

másrészt a p, valamint a $q := p/(p-1)$ számokkal értelemszerűen alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget $(p-1)\cdot q = p$ miatt

$$\|f+g\|_p^p \le \||f+g|^{p-1}\|_q\cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int |f+g|^{(p-1)\cdot q}\, d\mu\right)^{1/q}\cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) =$$

$$\left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/q}\cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) = (\|f+g\|_p)^{p/q}\cdot (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

következik. Innen már az $(\|f+g\|_p)^{p/q}$-val egyszerűen osztva (és figyelembe véve, hogy $p - p/q = 1$) kapjuk az a)-beli Minkowski-egyenlőtlenséget.

A b) állítás triviális, ha $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$, amikor is az $f = 0$ μ-m.m. vagy pedig a $g = 0$ μ-m.m. egyenlőség áll fenn. Következésképpen a $c := 0$ választás eleget tesz a b)-nek. Ugyanez mondható nyilván akkor is, ha $\|f+g\|_p = 0$.

Különben az a) bizonyítása szerint a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) „ügyes" alkalmazásával

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g|\, d\mu \le \int |f+g|^{p-1}|f|\, d\mu + \int |f+g|^{p-1}|g|\, d\mu \le$$

$$\||f+g|^{p-1}\|_s\cdot \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) = \|f+g\|_p^{p/s}\cdot \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big),$$

ahol az $1 < s < +\infty$ számra $1/p + 1/s = 1$ teljesül. Ha már most (amint azt feltételeztük) $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, akkor

$$\|f+g\|_p^{p/s}\cdot \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) = \|f+g\|_p^p.$$

Ebből kifolyólag az előbbi becslésekben minden $\le$ helyett $=$ van. Ez tehát egyrészt csak úgy lehetséges, hogy (a második $\le$-re tekintettel) a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásakor az

$$\int |f+g|^{p-1}|f|\, d\mu = \||f+g|^{p-1}\|_s\cdot \|f\|_p$$

és

$$\int |f+g|^{p-1}|g|\, d\mu = \||f+g|^{p-1}\|_s\cdot \|g\|_p$$

egyenlőségek állnak fenn. Ezért a mostani „szereposztással" (ld. 3.5.1. Tétel bizonyítása)

$$\frac{|f+g|^{(p-1)s}}{\|f+g\|_s^s} = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \quad \mu\text{-m.m.}$$

és

$$\frac{|f+g|^{(p-1)s}}{\|f+g\|_p^p} = \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} \quad \mu\text{-m.m.}$$

Azt kaptuk, hogy (pl.)

$$(*) \qquad |f| = \frac{\|f\|_p}{\|g\|_p} \cdot |g| \quad \mu\text{-m.m.}$$

Ugyanakkor a fent említett első $\leq$-ben is egyenlőségnek kell fennállni, azaz

$$\int |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \, d\mu = \int |f+g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|) \, d\mu,$$

amiből $|f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \leq |f+g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|)$ alapján (ld. 3.3.2.6. Tétel) egyszerűen adódik az

$$|f+g|^{p-1} \cdot (|f| + |g| - |f+g|) = 0 \quad \mu\text{-m.m.}$$

egyenlőség. Ha

$$A := \{f = -g\}, \; B := \{f \neq -g\},$$

akkor a fentiekkel analóg módon

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \cdot \chi_B \, d\mu = \|(f+g) \cdot \chi_B\|_p^p \leq$$

$$\|(f+g) \cdot \chi_B\|_p^{p/s} \cdot (\|f \cdot \chi_B\|_p + \|g \cdot \chi_B\|_p) \leq$$

$$\|(f+g) \cdot \chi_B\|_p^{p/s} \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) = \|f+g\|_p^p.$$

Tehát minden itteni $\leq$ helyett $=$ áll. Ezért

$$\|f\|_p + \|g\|_p =$$

$$\left(\int |f|^p \cdot \chi_A \, d\mu + \int |f|^p \cdot \chi_B \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \cdot \chi_A \, d\mu + \int |g|^p \cdot \chi_B \, d\mu \right)^{1/p} =$$

$$\|f \cdot \chi_B\|_p + \|g \cdot \chi_B\|_p = \left(\int |f|^p \cdot \chi_B \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \cdot \chi_B \, d\mu \right)^{1/p},$$

amiből

$$\int |f|^p \cdot \chi_A \, d\mu = \int |g|^p \cdot \chi_A \, d\mu = 0$$

következik. Ez azt jelenti (ld. 3.3.2.6. Tétel), hogy $f(x) = g(x) = 0$ (μ-m.m. $x \in A$). Ha viszont $x \in B$, akkor $f(x) + g(x) \neq 0$, így az előbbi

$$|f+g|^{p-1}\cdot(|f|+|g|-|f+g|)=0 \quad \mu\text{-m.m.}$$

egyenlőségből

$$(**) \qquad |f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)| \quad (\mu\text{-m.m. } x\in B)$$

adódik. Mivel $(*)$ miatt μ-m.m. $x\in X$ pontban $f(x)=g(x)=0$ vagy $f(x)\neq 0$ és $g(x)\neq 0$, ezért $(**)$ csak úgy lehetséges, hogy valamilyen $0\le\lambda_x\in\mathbf{R}$ számokkal (pl.)

$$f(x)=\lambda_x\cdot g(x) \quad (\mu\text{-m.m. } x\in B).$$

Ezt egybevetve az előbbi $(*)$ egyenlőséggel azt kapjuk, hogy

$$\lambda_x=\lambda:=\|f\|_p/\|g\|_p \quad (\mu\text{-m.m. } x\in B).$$

Viszont az $f(x)=\lambda\cdot g(x)$ egyenlőség nyilván teljesül azokban az $x\in X$ pontokban is, amelyekben $f(x)=g(x)=0$. Más szóval azt írhatjuk, hogy

$$f=\lambda\cdot g \quad \mu\text{-m.m.}$$

■

Az eddigi jelöléseket megtartva tekintsük ezek után a következő, a mérték-integrálelmélet keretein messze túlmutató elméleti és gyakorlati jelentőséggel bíró függvénytereket. Nevezetesen, adott $1\le p\le+\infty$ esetén legyen

$$L^p:=L^p(\mu):=\{f:X\to\mathbf{R}: f \text{ mérhető és } \|f\|_p<+\infty\}.$$

A következő tételben a most definiált függvényterek néhány alapvető tulajdonságát tekintjük át.

3.5.4. Tétel. *Legyen $1\le p\le+\infty$. Ekkor a fenti L^p-terekre az alábbi állítások teljesülnek:*

a) *az L^p lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett;*

b) *minden $f,g\in L^p$ esetén* $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}\in L^p$;

c) $f\in L^p \iff f^+,\ f^-\in L^p$;

d) *ha $1\le q\le+\infty$ és $1/p+1/q=1$, $f\in L^p$, $g\in L^q$, akkor $f\cdot g\in L^1$;*

e) *véges μ esetén $L^\infty\subset L^p\subset L^1$.*

Bizonyítás. Az a) állítás a 3.1.4. Tétel és a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel) alapján, a d) pedig a 3.1.4. Tétel és a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) miatt nyilvánvaló.

Mivel $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}:X\to\mathbf{R}$ mérhető függvények (ld. 3.1.5. Tétel) és

$$|\max\{f,g\}|,\ |\min\{f,g\}|\le|f|+|g|,$$

ezért $p < +\infty$ mellett az integrál monotonitására (ld. 3.3.2.2. Tétel), $p = +\infty$ esetén pedig az $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-m.m., $|g| \le \|g\|_\infty$ μ-m.m. becslésekre hivatkozva az előbb már idézett Minkowski-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\|\max\{f,g\}\|_p,\ \|\min\{f,g\}\|_p \le \||f|+|g|\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p < +\infty,$$

ezért a b) is igaz.

A c) állítás már egyszerűen következik az a)-ből és a b)-ből az

$$f^+ = \max\{f,0\},\ f^- = \max\{-f,0\},\ f = f^+ - f^-$$

egyenlőségekből.

Az e)-ben szereplő $L^p \subset L^1$ tartalmazás igazolásához nyilván feltehető, hogy $p > 1$. Legyen ekkor a $q \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $1/p + 1/q = 1$, és egy $c \in \mathbf{R}$ paraméterrel tekintsük a nyilván mérhető

$$f_c(x) := c \qquad (x \in X)$$

függvényt. Ekkor

$$\int |f_c|^q\, d\mu = |c|^q \cdot \mu(X) < +\infty,$$

így $f_c \in L^q$. Alkalmazzuk a d) állítást egy tetszőleges $f \in L^p$ és a $g := f_1 \in L^q$ függvényre, amikor is $f = f \cdot g \in L^1$, más szóval $L^p \subset L^1$. Az $L^\infty \subset L^p$-hez legyen $p < +\infty$ és $f \in L^\infty$. Ekkor $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ μ-m.m.m., így (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p\, d\mu \le \|f\|_\infty^p \cdot \mu(X) < +\infty,$$

következésképpen $f \in L^p$, tehát $L^\infty \subset L^p$. ■

Térjünk rá most a jelent pont fő tételének, az integrálelmélet egyik leggyakrabban idézett állításának a tárgyalására. Ez a Lebesgue-tételként idézett konvergencia-tétel – amint ezt az utóbbi elnevezés is sejtetni engedi – m.m. konvergens függvénysorozatok határfüggvényének az integrálhatóságáról, valamint a sorozat „tagonkénti integrálhatóságáról" is ad majd felvilágosítást.

3.5.5. Tétel (Lebesgue). *Legyen adott az* (X, Ω, μ) *mértéktér,* $1 \le p < +\infty$, *az* $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ *pedig legyen egy olyan függvénysorozat, amire a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *határérték* μ*-m.m.* $x \in X$ *helyen létezik. Tegyük fel továbbá, hogy egy* $F \in L^+$ *függvénnyel egyrészt* $\|F\|_p < +\infty$, *másrészt minden* $n \in \mathbf{N}$ *indexre* $|f_n(x)| \le F(x)$ μ*-m.m.* $x \in X$ *esetén teljesül. Ekkor*:

a) *van olyan* $f : X \to \mathbf{R}$ *mérhető függvény, hogy* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m.;

b) *minden* a)*-beli* f *függvényre* $f \in L^p$ *és* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Bizonyítás. Legyen először is az $A \in \Omega$ olyan halmaz, hogy $\mu(A) = 0$, és bármelyik $x \in X \setminus A$ pontban létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték. Mivel az (f_n) sorozatnak a feltételek miatt m.m. pontban van határértéke, ezért ilyen A halmaz valóban létezik.

Hasonlóan, legyen a $B \in \Omega$ olyan, hogy $\mu(B) = 0$ és $F(x) < +\infty$ $(x \in X \setminus B)$. Ilyen B halmaz az $\int F^p \, d\mu < +\infty$ feltételezés és a 3.3.2.6. Tétel alapján megadható.

Legyen $n \in \mathbf{N}$, ekkor az F-től megkövetelt majoráns-szerepre tekintettel valamilyen $C_n \in \Omega$ halmazzal $\mu(C_n) = 0$ és $|f_n(x)| \le F(x)$ $(x \in X \setminus C_n)$.

Ha már most

$$D := A \bigcup B \bigcup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \Big),$$

akkor $D \in \Omega$, $\mu(D) = 0$, és az előbb az A, B halmazokkal, valamint a C_n-ekkel kapcsolatban felsorolt valamennyi követelmény teljesül: ha $k \in \mathbf{N}$, $x \in Y := X \setminus D$, akkor

$$|f_k(x)| \le F(x) < +\infty, \text{ és létezik a } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ határérték.}$$

Definiáljuk ezek után az f függvényt a következőképpen:

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & (x \in Y) \\ 0 & (x \in D). \end{cases}$$

Az f függvény nem más, mint (ld. 3.1.4. Tétel) a mérhető függvényekből álló $(f_n \cdot \chi_Y)$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvénye. Ezért (ld. 3.1.5. Tétel, ill. az utána tett észrevétel) az f mérhető függvény. Mivel

$$|f(x)| = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le F(x) < +\infty & (x \in Y) \\ 0 & (x \in D), \end{cases}$$

ezért az f nyilván valós értékű: $f : X \to \mathbf{R}$. Továbbá $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in Y)$ miatt $f = \lim_n f_n$ μ-m.m. Más szóval az f-re igaz mindaz, amit az a)-ban állítottunk.

Ha egy f függvény eleget tesz az a)-nak, akkor (a mérhetősége és $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$ mellett) $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. szerint az f_n-ekre tett feltételből adódóan $|f|^p \le F^p$ μ-m.m. is teljesül. Következésképpen (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\int |f|^p \, d\mu \le \int F^p \, d\mu < +\infty.$$

Tehát $f \in L^p$.

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Legyen ehhez

$$g_n := |f - f_n|^p \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $g_n \in L^+$ és $g_n \leq 2^p \cdot F^p$ μ-m.m. $(n \in \mathbf{N})$. Ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel, ill. Fatou-lemma (3.3.2.7. Tétel))

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = 0,$$

hiszen $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ μ-m.m. Tehát (a nyilvánvaló $\limsup_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \geq 0$ egyenlőtlenség miatt)

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = 0,$$

amiből $\liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = 0$, azaz a

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = 0$$

határérték létezése már következik. Ez persze ugyanaz, mint a $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$ egyenlőség, amint azt állítottuk. ■

Ha a μ mérték véges, és a 3.5.5. Tételben valamilyen $c \geq 0$ konstanssal

$$|f_n| \leq c \;\; \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

igaz, akkor bármilyen $1 \leq p < +\infty$ mellett teljesül a Lebesgue-tétel valamennyi állítása. Ekkor ui. (ld. a tételben szereplő jelöléseket) az $F \equiv c$ választással olyan majoráns-függvényt kapunk, amelyikre

$$\int F^p \, d\mu = c^p \cdot \mu(X) < +\infty.$$

Szokás a 3.5.5. Tételnek ezt a speciális esetét „kis Lebesgue-tétel"-ként említeni.

Legyen az előző tételben $p = 1$. Ekkor

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Valóban (ld. 3.3.3.3. Tétel),

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, d\mu = \|f - f_n\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

A jelentősége miatt nem érdektelen külön állításként is szerepeltetni (formailag picit más megfogalmazásban) a most mondottakat, mint az új mérték-és integrálelmélet emblematikus tételét. Ez az az eredmény, ami választ ad a Riemann-integrál kritikája kapcsán az 1.2.2. pontban megfogalmazott elvárásoknak.

3.5.6. Tétel (Lebesgue). *Tegyük fel, hogy a 3.5.5. Tételben szereplő* (X, Ω, μ) *mértéktér esetén az integrálható* $f_n \in L$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvényekből álló sorozat* μ*-m.m. konvergens, és egy* $F \in L \cap L^+$ *integrálható (majoráns-)függvénnyel*

$$|f_n| \leq F \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor van olyan $f \in L$ *(integrálható) függvény, hogy* $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ μ*-m.m., és minden ilyen* f *(határ-)függvényre*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Ha tehát az $f, g \in L$ függvényekre $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. és $g := \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m., akkor $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ és $f = g$ μ-m.m. Jelöljük a $\lim_{n\to\infty} f_n$ szimbólummal az előbbi $f, g, \ldots$ függvények bármelyikét (ld. 3.3.3.), akkor azt írhatjuk, hogy

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

ami formálisan is markánsan kifejezi (a 3.5.6. Tételben tett feltételek mellett) az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségét.

Világos, hogy a 3.5.6. Tétel függvénysorokra való „átírása" a következőképpen szól: ha a $g_n \in L$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló $\sum(g_n)$ függvénysor μ-m.m. konvergens, és valamilyen $G \in L \cap L^+$ függvénnyel $|\sum_{k=0}^n g_k| \leq G$ μ-m.m. $(n \in \mathbf{N})$, akkor van olyan $g \in L$ függvény, hogy

$$g = \textstyle\sum_{n=0}^\infty g_n \quad \mu\text{-m.m.},$$

és

$$\int g \, d\mu = \sum_{n=0}^\infty \int g_n \, d\mu.$$

Ez a helyzet speciálisan akkor, ha a szóban forgó $\sum(g_n)$ függvénysor μ-m.m. abszolút konvergens, és $\sum_{n=0}^\infty |g_n| \in L$. Ekkor ui. a $G := \sum_{n=0}^\infty |g_n|$ függvény nyilván egy integrálható majoránsa az illető függvénysornak.

Jegyezzük meg, hogy az (f_n) sorozatra vonatkozó, az F majoránsfüggvénnyel megfogalmazott korlátossági feltétel nélkül a most kapott felcserélhetőségi állítás nem igaz. Legyen ui. (ld. 2.7.1.) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$, és

$$f_n := n \cdot \chi_{(0,1/n)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Az is nyilvánvaló, hogy ha valamilyen $F \in L^+$ függvénnyel $|f_n| \leq F$ μ-m.m. $(n \in \mathbf{N})$, akkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén

$$F(x) \geq n \quad (\mu\text{-m.m. } x \in I_n := (1/(n+1), 1/n)).$$

Más szóval $F \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{I_n}$ μ-m.m., ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel, 3.4. iii) megjegyzés)

$$\int F\, d\mu \geq \int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{I_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot \chi_{I_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1) = +\infty$$

miatt $F \notin L$. Röviden: a szóban forgó függvénysorozatnak nincs integrálható majoránsa.

Mennyiben játszik szerepet a 3.5.5. Tételben a $p < +\infty$ feltétel? Az alábbi nagyon egyszerű példa azt mutatja, hogy a $p = +\infty$ esetben a szóban forgó tétel b) állítása, azaz a $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ egyenlőség minden további nélkül nem teljesül. Legyen ui. (ld. 2.7.1.)

$$(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1), \quad f_n := \chi_{(0,1/n)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ekkor

$$f_n \in L^\infty \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \lim_{n\to\infty} f_n \equiv 0,$$

és (pl.) az $F \equiv 1$ függvény egy L^∞-beli majoránsa az (f_n) függvénysorozatnak. Világos, hogy ekkor minden, a 3.5.5. Tétel a) részében szereplő f függvény μ-m.m. nulla, de $\|f - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1$ $(n \in \mathbf{N})$.

Ugyanakkor újra végiggondolva a 3.5.5. Tétel bizonyítását, könnyen meggyőződhet arról az Olvasó, hogy a tétel a) része, és a b)-ből a $p = +\infty$-re megfelelően módosított $f \in L^\infty$ állítás igaz marad.

A következő tételben megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ függvény rendelkezik a számsorozatokkal kapcsolatban „érvényes" teljességi tulajdonsággal.

3.5.7. Tétel. *Tekintsük az eddigiekben is szereplő (X, Ω, μ) mértékteret, legyen továbbá $1 \leq p \leq +\infty$, az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig egy olyan függvénysorozat, amire teljesül az ún. Cauchy-kritérium: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ index, hogy hacsak $m, n \in \mathbf{N}$ és $m, n > N$, akkor*

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Ekkor:

a) *van olyan $f \in L^p$ függvény, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0;$$

b) *egy alkalmas $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal*

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \quad \mu\text{-m.m.}$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $p < +\infty$. Ekkor a tételben szereplő Cauchy-kritérium miatt van olyan $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozat, amivel

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k-1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad (k \in \mathbf{N}) \text{ és } g := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|,$$

akkor

$$\|g\|_p \le \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = 1.$$

Ui. egyrészt a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel) miatt minden $n \in \mathbf{N}$ index mellett

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \right\|_p = \left(\int \Big(\sum_{k=0}^{n} |g_k| \Big)^p d\mu \right)^{1/p} \le \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_p \le \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p \le 1.$$

Másrészt az itt szereplő $\left(\sum_{k=0}^{n} |g_k| \right)^p$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat nyilván monoton nőve tart a g^p-hez, ezért a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) alapján

$$\int g^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \Big(\sum_{k=0}^{n} |g_k| \Big)^p d\mu,$$

amiből a mondott becslés már triviálisan következik.

Tehát (ld. 3.3.2.6. Tétel) $g < +\infty$ μ-m.m., ami azt jelenti, hogy a $\sum(g_k)$ függvénysor μ-m.m. abszolút konvergens. Tekintve, hogy minden $k \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{i=0}^{k} g_i = f_{n_{k+1}} - f_{n_0},$$

ezért az f_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ sorozat is μ-m.m. konvergens. Azt is tudjuk viszont, hogy

$$|f_{n_{k+1}}| = \left| \sum_{i=0}^{k} g_i + f_{n_0} \right| \le g + |f_{n_0}|,$$

és (ld. 3.5.3. Tétel)

$$\|g + |f_{n_0}|\|_p \le \|g\|_p + \|f_{n_0}\|_p \le 1 + \|f_{n_0}\|_p < +\infty.$$

Így alkalmazható a 3.5.5. (Lebesgue-) Tétel, miszerint van olyan $f \in L^p$ függvény, amelyikkel

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \ \ \mu\text{-m.m. és } \lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_p = 0$$

igaz. Jól ismert azonban az az elemi tény, hogy ha egy Cauchy-sorozat valamilyen részsorozatáról már tudjuk, hogy konvergens, akkor maga a sorozat is konvergens. Tehát $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Ezzel „elintéztük" a $p < +\infty$ esetet. Ha $p = +\infty$, akkor a fenti bizonyításban csak a

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_p = 0$$

reláció igazolása igényel némi módosítást, ti. ekkor nem alkalmazható a Lebesgue-tétel (3.5.5. Tétel) megfelelő része. Azonban

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty < 2^{-k-1} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

amiből egyszerűen kapjuk az

$$\|f_{n_{k+m}} - f_{n_k}\|_\infty < 2^{-k} \qquad (m, k \in \mathbf{N})$$

becslést (ld. 3.5.3. Tétel):

$$\|f_{n_{k+m}} - f_{n_k}\|_\infty = \left\| \sum_{j=k}^{k+m-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \right\|_\infty \le \sum_{j=k}^{k+m-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_\infty <$$

$$\sum_{j=k}^{k+m-1} 2^{-j-1} < \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j-1} = 2^{-k}.$$

Innen viszont

$$|f - f_{n_k}| = \lim_{m\to\infty} |f_{n_{k+m}} - f_{n_k}| \le 2^{-k} \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\|f - f_{n_k}\|_\infty \le 2^{-k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

adódik, következésképpen $\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_\infty = 0$. ■

Az eddigiek alapján a következőket mondhatjuk: az L^p $(1 \le p \le +\infty)$ függvényhalmaz az $\mathbf{R}$ feletti lineáris tér (vektortér), az

$$L^p \ni f \mapsto \|f\|_p$$

leképezés félnorma az L^p-n. Ha valamilyen $p \in [1, +\infty]$ esetén az L^p vektortérben az

$$f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0 \qquad (f, g \in L^p)$$

utasítással definiált relációt tekintjük, akkor könnyen belátható módon a $\sim$ reláció ekvivalencia. Az általa generált L^p-beli ekvivalencia-osztályokra tehát az jellemző, hogy az

$f, g \in L^p$ függvények akkor és csak akkor tartoznak ugyanabba az ekvivalencia-osztályba, ha $f = g$ μ-m.m.

Jelöljük az $f \in L^p$ függvény által generált ekvivalencia-osztályt a következőképpen:

$$\hat{f} := \{g \in L^p : \|g - f\|_p = 0\},$$

és legyen $\mathbf{L}^p$ az $\hat{f}$ $(f \in L^p)$ ekvivalencia-osztályok halmaza (ld. 3.3.3.). A „szokásos" módon értelmezve az $\mathbf{L}^p$-ben a vektorműveleteket, az $\mathbf{L}^p$ lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett,

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p \qquad (\hat{f} \in \mathbf{L}^p)$$

pedig norma ezen a téren. A 3.5.7. Tételre tekintettel az $(\mathbf{L}^p, \|\cdot\|_p)$ teljes normált tér, a funkcionálanalízis nyelvén röviden fogalmazva: Banach-tér. (A későbbiekben nem teszünk jelölésbeli különbséget az $\mathbf{L}^p$ és az L^p terek között, azaz ezentúl az L^p „függvénytér" minden $f \in L^p$ eleme egyúttal az összes olyan $g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényt is jelöli, amire $\|f - g\|_p = 0$. Ebben az értelemben tehát minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $(L^p, \|\cdot\|_p)$ egy Banach-tér.)

Legyen pl. valamilyen $-\infty < a < b < +\infty$ esetén (ld. 2.7.1.)

$$X := [a, b], \;\; \Omega := \{A \in \mathcal{P}([a, b]) : A \in \hat{\Omega}_1\}, \;\; \mu(A) := \hat{\mu}_1(A) \qquad (A \in \Omega),$$

és tekintsük az (X, Ω, μ) mértékteret. A most bevezetett (teljes) mértéktérnek megfelelő L^p-tereket a következőképpen fogjuk jelölni:

$$L^p[a, b] := L^p \qquad (1 \le p \le +\infty).$$

Mivel a μ mérték véges, ezért (ld. 3.6. xi) megjegyzés)

$$L^\infty[a, b] \subset L^q[a, b] \subset L^p[a, b] \subset L^1[a, b] \qquad (1 \le p \le q \le +\infty).$$

Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény (klasszikus értelemben) *Lebesgue-integrálható*, ha $f \in L^1[a, b]$, és ebben az esetben az $\int f \, d\mu$ az f függvény (klasszikus) *Lebesgue-integrálja*. Ez utóbbira – hacsak nem okoz félreértést – használhatjuk a Riemann-integrállal kapcsolatban megszokott $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\, dx$ szimbólumokat is. A 3.5.5. Tétel alapján $f \in L^p[a, b]$ akkor és csak akkor igaz, ha $|f| \in L^p[a, b]$ $(1 \le p \le +\infty)$. Speciálisan egy $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható, ha az $|f|$ is az:

$$f \in L^1[a, b] \iff |f| \in L^1[a, b]$$

(ami a Riemann-integrálhatóságot illetően csak „félig" igaz).

Könnyű példát adni olyan Lebesgue-integrálható $f \in L^1[a, b]$ függvényre, amelyik nem Riemann-integrálható: $f \notin R[a, b]$. Ilyen pl. az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [a, b] \cap \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \in [a, b] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

(Dirichlet-)függvény, ami nem más, mint az $[a,b] \cap \mathbf{Q}$ halmaznak az $[a,b]$-re vonatkozó karakterisztikus függvénye. Mivel a szóban forgó halmaz megszámlálható, ezért (ld. 2.7.1.) (Lebesgue-)mérhető, és $\mu([a,b] \cap \mathbf{Q}) = 0$. Tehát valóban igaz, hogy $f \in L^1[a,b]$, továbbá $\int f\, d\mu = \mu([a,b] \cap \mathbf{Q}) = 0$. Ugyanakkor jól ismert az elemi analízisből, hogy az f nem Riemann-integrálható.

Mutassuk meg, hogy a fenti kompakt $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények egyúttal Lebesgue-integrálhatók is, és minden ilyen függvény Lebesgue-integrálja megegyezik a Riemann-integráljával. Sőt, igaz a

3.5.8. Tétel. *Tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható függvény esetén $f \in L^\infty[a,b]$, és az f Riemann-integrálja egyenlő a Lebesgue-integráljával.*

Bizonyítás. Mivel minden Riemann-integrálható függvény korlátos, ezért a tétel első felét jelentő $f \in L^\infty[a,b]$ állításhoz elég azt megmutatnunk, hogy az f mérhető, azaz minden $A \subset \mathbf{R}$ Borel-halmaznak az $f^{-1}[A]$ ősképe Lebesgue-mérhető. Legyen ehhez először is a τ_n $(n \in \mathbf{N})$ az $[a,b]$ intervallumnak egy „minden határon túl finomodó" felosztás-sorozata. Tehát minden $n \in \mathbf{N}$ mellett a $\tau_n \subset [a,b]$ egy véges halmaz, amire $a, b \in \tau_n$ és $\tau_n \subset \tau_{n+1}$, továbbá a τ_n elemeit x_{in}-ekkel $(i = 0, ..., s_n \in \mathbf{N})$ jelölve feltesszük, hogy

$$a = x_{0n} < x_{1n} < \ldots < x_{s_n n} = b$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \max\{x_{in} - x_{i-1n} : i = 1, ..., s_n\} = 0.$$

Ha $i = 1, ..., s_n$ és

$$m_{in} := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1n}, x_{in}]\},$$

$$M_{in} := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1n}, x_{in}]\},$$

akkor legyen

$$\varphi_n := \sum_{i=1}^{s_n-1} m_{in} \cdot \chi_{[x_{i-1n}, x_{in})} + m_{s_n n} \cdot \chi_{[x_{s_n-1n}, x_{s_n n}]},$$

$$\Phi_n := \sum_{i=1}^{s_n-1} M_{in} \cdot \chi_{[x_{i-1n}, x_{in})} + M_{s_n n} \cdot \chi_{[x_{s_n-1n}, x_{s_n n}]} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy a (φ_n) függvénysorozat monoton növekedő, a (Φ_n) pedig monoton fogyó, továbbá $\Phi_n \geq \varphi_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel a szóban forgó függvénysorozatokat lépcsősfüggvények alkotják (ld. 3.3.1.), és az előbbiek szerint a $(\Phi_n - \varphi_n)$ sorozat L_0^+-beli függvényekből álló monoton csökkenő sorozat, ezért (ld. 3.3.2.) a

$$\Psi := \lim_{n\to\infty} (\Phi_n - \varphi_n)$$

függvény L^+-beli. A Riemann-integrál definíciója miatt az

$$\int \varphi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{s_n} m_{in}(x_{in} - x_{i-1n}), \quad \int \Phi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{s_n} M_{in}(x_{in} - x_{i-1n}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(alsó- és felső Riemann-közelítő összegekből álló) számsorozatok az f függvény Riemann-integráljához konvergálnak (ld. 1.1.). Az is nyilvánvaló, hogy ha a $C \geq 0$ szám egy korlátja az f-nek, azaz

$$|f(x)| \leq C \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor $\Phi_n - \varphi_n \leq C$ $(n \in \mathbf{N})$.

Alkalmazzuk ezt az észrevételt és a (kis) Lebesgue-tételt (ld. 3.5.5. Tétel) a $(\Phi_n - \varphi_n)$ sorozatra:

$$\int \Psi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\Phi_n - \varphi_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \Phi_n \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = 0.$$

Ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel) $\Psi = 0$ μ-m.m. Innen a $\varphi_n \leq f \leq \Phi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ nyilvánvaló egyenlőtlenségek alapján (pl.)

$$f = g := \lim_{n\to\infty} \varphi_n \quad \mu\text{-m.m.}$$

Azt tudjuk, hogy a g függvény mérhető (ld. 3.1.5. Tétel), ezért bármilyen $A \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra $g^{-1}[A] \in \hat{\Omega}_1$. Továbbá

$$f^{-1}[A] = (f^{-1}[A] \cap \{f = g\}) \cup (f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\}) =$$
$$(g^{-1}[A] \cap \{f = g\}) \cup (f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\}),$$

ahol egy alkalmas $N \in \hat{\Omega}_1$, $\mu(N) = 0$ halmazzal $\{f \neq g\} \subset N$. A $\hat{\mu}_1$ mérték teljessége miatt (ld. a 2.7.1.) tehát $\{f \neq g\} \in \hat{\Omega}_1$, így $\{f = g\} \in \hat{\Omega}_1$ is igaz, ezért

$$g^{-1}[A] \cap \{f = g\} \in \hat{\Omega}_1.$$

Mivel

$$f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\} \subset \{f \neq g\},$$

ezért ismét a $\hat{\mu}_1$ teljessége miatt az is teljesül, hogy $f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\} \in \hat{\Omega}_1$. Következésképpen $f^{-1}[A] \in \hat{\Omega}_1$, azaz az f függvény mérhető.

Ezzel beláttuk, hogy $f \in L^\infty[a, b]$. Az integrálok egyenlőségéről mondottak igazolásához a (φ_n) sorozatra újra alkalmazhatjuk a fent említett Lebesgue-tételt (ld. 3.5.5. Tétel). Így egyrészt

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = \int f \, d\mu,$$

másrészt pedig a fentebb már mondottak szerint $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu$ éppen az f függvény Riemann-integrálja. ■

Külön is felhívjuk a figyelmet arra, hogy az f függvény mérhetőségének a bizonyítása közben erősen kihasználtuk azt a tényt, hogy a szóban forgó μ mérték (valójában a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mérték) teljes. Megmutatható, hogy az f Riemann-integrálhatóságából általában nem következik az, hogy tetszőleges $A \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra az $f^{-1}[A]$ őskép is Borel-halmaz.

3.6. Megjegyzések

i) A 3.5.1. Tétel bizonyításában szereplő

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (0 \le a, b \in \mathbf{R},\ 1 < p,\ q < +\infty,\ 1/p + 1/q = 1)$$

egyenlőtlenség az ln logaritmusfüggvény konkávitását felhasználva is belátható is. Ha ui. $a, b > 0$ (ami nyilván feltehető), akkor

$$\ln(a^p/p + b^q/q) \ge \frac{1}{p} \cdot \ln a^p + \frac{1}{q} \cdot \ln b^q = \ln(ab),$$

így

$$e^{\ln(a^p/p + b^q/q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge e^{\ln(ab)} = ab.$$

Speciálisan a $p = q = 2$ esetben az elemi $2ab \le a^2 + b^2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

ii) Ha a 3.5.1. Tételben (az ottani jelölésekkel) speciálisan $p = 2$, akkor $q = 2$. Ha tehát a mérhető $f,\ h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényekre $0 < \|f\|_2,\ \|h\|_2 < +\infty$ és $\|fh\|_1 = \|f\|_2 \cdot \|h\|_2$, akkor (az említett tétel bizonyítása szerint)

$$|f| = \frac{\|f\|_2}{\|h\|_2} \cdot |h| \quad \mu\text{-m.m.},$$

amiből (könnyen beláthatóan) egy alkalmas mérhető γ függvénnyel $f = \gamma \cdot h$ μ-m.m. adódik.

iii) Írjuk fel a 3.5.1. Tételben (a tételbeli mérhető $f,\ h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényekkel és az $1/p + 1/q = 1$ feltételnek eleget tevő $1 \le p, q \le +\infty$ kitevőkkel) szereplő

$$\|fh\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|h\|_q$$

Hölder-egyenlőtlenséget a normák értelmezését szem előtt tartva:

$$\int |fh|\, d\mu \le \begin{cases} \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |h|^q\, d\mu\right)^{1/q} & (1 < p, q < +\infty) \\ \|h\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu & (p = 1), \end{cases}$$

ahol – emlékeztetőül – $\|h\|_\infty = \inf\{\alpha \ge 0 : |h| \le \alpha \ \ \mu\text{-m.m.}\}$.

iv) Több szempontból is érdemes kiemelni az előző megjegyzésben a $p = q = 2$ esetet, amikor is (az ottani jelölésekkel)

$$\|fh\|_1 \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2,$$

vagy ugyanez „részletesen" kiírva

$$\int |fh|\, d\mu \le \sqrt{\int f^2\, d\mu} \cdot \sqrt{\int h^2\, d\mu}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget *Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Ha

$$\langle f, h\rangle := \int fh\, d\mu \qquad (f, h \in L^2)$$

az f és a h (mint ekvivalencia-osztályok (ld. 3.5.)) skaláris szorzata, akkor nyilván

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} \qquad (f \in L^2),$$

és az euklideszi terek elméletéből jól ismert (általános) Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$|\langle f, h\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2 \qquad (f, g \in L^2).$$

A 3.3.3.3. Tételből kifolyólag most az „erősebb"

$$|\langle f, h\rangle| \le \langle |f|, |h|\rangle \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2$$

becslés is teljesül.

Nem nehéz meggondolni, hogy a $\|\cdot\|_2$ előbbi „származtatása" a $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ normák körében általában egyedi. Ha ui. valamilyen $1 \le p \le +\infty$ esetén egy alkalmas

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \to \mathbf{R}$$

skaláris szorzással

$$\|f\|_p = \sqrt{\langle f, f\rangle} \qquad (f \in L^p),$$

akkor a skaláris szorzás axiómái alapján egyszerűen ellenőrizhető az alábbi azonosság:

$$\|f + h\|_p^2 + \|f - h\|_p^2 = 2(\|f\|_p^2 + \|h\|_p^2) \qquad (f, g \in L^p).$$

(Megjegyezzük, hogy ez utóbbi azonosság („paralelogramma-szabály") az ismert Neumann-Jordan-tétel miatt elégséges is ahhoz, hogy a szóban forgó norma skaláris szorzásból származzon.) Ha pl. itt

$$X := \mathbf{N},\ \Omega := \mathcal{P}(X),\ \mu(\{n\}) := 1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(azaz a μ az $\mathbf{N}$-beli számosságmérték) (ld. 2.4. iv) megjegyzés)), akkor (ld. 3.4. iv) megjegyzés) az

$$f := (1, 0, 0, ...),\ \ h := (0, 1, 0, ...)$$

függvényekre (számsorozatokra) $f,\, h \in L^p$, és $p < +\infty$ esetén

$$\|f+h\|_p = \|f-h\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f\|_p = \|h\|_p = 1.$$

Tehát

$$\|f+h\|_p^2 + \|f-h\|_p^2 = 2(\|f\|_p^2 + \|h\|_p^2) \iff 2\cdot 2^{2/p} = 4 \iff p = 2.$$

Ha $p = +\infty$, akkor pedig

$$\|f+h\|_\infty = \|f-h\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1,$$

ezért világos, hogy $\|f+h\|_\infty^2 + \|f-h\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2)$.

v) A 3.5.4. Tétel e) állítása nem véges μ mérték esetén általában nem igaz. Legyen ui. az (X, Ω, μ) mértéktér a vi) megjegyzésbeli, amikor is

$$L^p = \ell_p := \begin{cases} \left\{(x_k) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\right\} & (0 < p < +\infty) \\ \left\{(x_k) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sup_k |x_k| < +\infty\right\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

és $(x_k) \in \ell_p$ esetén

$$\|(x_k)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} & (0 < p < +\infty) \\ \sup_k |x_k| & (p = +\infty). \end{cases}$$

Ekkor tehát az L^p nem más, mint (pl.) a funkcionálanalízisből jól ismert sorozat-tér. Tudvalevő, hogy $p > 1$ esetén az említett e) állítással ellentétben éppen az ℓ_1 lesz egy valódi részhalmaza az ℓ_p-nek.

vi) A 3.5.3. Tétel b) állítására hivatkozva funkcionálanalízisbeli terminológiával élve azt mondjuk, hogy a $\|\cdot\|_p$ $(1 < p < +\infty)$ norma *szigorú norma,* vagy másképp fogalmazva az $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *szigorúan normált tér.* Ebből a szempontból az $1 < p < +\infty$ feltétel lényeges, mivel az $(L^1, \|\cdot\|_1)$, $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ terek általában nem szigorúan normáltak. Tekintsük ui. az $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tereket (ld. v) megjegyzés). Ekkor az

$$f := (f_n) := (1, 0, 0, ...), \; g := (g_n) := (0, 1, 0, 0, ...) \in \ell_1$$

függvényekre (sorozatokra)

$$\|f+g\|_1 = \|(1, 1, 0, 0, ...)\|_1 = 2 = \|f\|_1 + \|g\|_1,$$

de nincs olyan $\lambda \geq 0$ szám, amivel $f = \lambda\cdot g$ vagy $g = \lambda\cdot f$. Ti. az első esetben az $f_n = \lambda\cdot g_n \quad (n \in \mathbf{N})$ egyenlőségeknek kellene teljesülniük, ami $n = 1$-re a nem igaz

$1 = \lambda\cdot 0$ egyenlőséghez vezetne. A $g_n = \lambda\cdot f_n$ $(n \in \mathbf{N})$ esetben $n = 1$-ből $0 = \lambda\cdot 1$, amiből szükségszerűen $\lambda = 0$ adódna. Így $g = 0\cdot f$-hez jutnánk, ami nyilván nem igaz.

Hasonlóan, ha most

$$f := (f_n) := (1, 0, 0, ...),\ g := (g_n) := (1, 1, 0, 0, ...) \in \ell_\infty,$$

akkor

$$\|f + g\|_\infty = \|(2, 1, 0, 0, ...)\|_1 = 2 = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

és az előbbiekkel analóg módon juthatunk ellentmondásra a valamilyen $\lambda \geq 0$ mellett feltételezett $f = \lambda\cdot g$ vagy $g = \lambda\cdot f$ egyenlőségekből.

vii) Legyen $X \neq \emptyset$, ekkor tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér és $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény esetén

$$\mu\Big(\{|f| \geq y\}\Big) \leq \frac{1}{y^p}\cdot \int |f|^p\, d\mu \qquad (p,\, y > 0).$$

Ez az ún. *Markov-egyenlőtlenség* a 3.3.2.2. Tétel alapján egyszerűen következik az

$$y^{-p}\cdot |f|^p \geq \chi_{\{|f|\geq y\}}$$

becslésből. Ha itt valamilyen $0 < p < +\infty$ „kitevővel" $\|f\|_p < +\infty$, akkor minden $y > 0$ esetén nyilván $\mu(\{|f| > y\}) < +\infty$.

viii) A vii)-ben szereplő Markov-egyenlőtlenség egyik fontos következménye az alábbi *Csebisev-egyenlőtlenség*. Legyen ehhez az eddigi (X, Ω, μ) mértéktér esetén $f \in L(\mu)$, és tegyük fel, hogy az

$$F(x) := f(x) - \int f\, d\mu \qquad (x \in X)$$

függvényre $0 < \|F\|_2 < +\infty$ teljesül. Ekkor bármilyen $\lambda > 0$ számmal

$$\mu\Big(\{|F| \geq \lambda\cdot \|F\|_2\}\Big) \leq \lambda^{-2}.$$

Ha $\mu(X) = 1$, azaz (X, Ω, μ) Kolmogorov-mező (ld. 2.6. xvi) megjegyzés), akkor valószínűségszámítási terminológiával élve az f egy ún. *valószínűségi változó*, $\int f\, d\mu$ az f *várható értéke*, $\|F\|_2$ pedig az f *szórása*, ahol tehát

$$\|F\|_2 = \sqrt{\int \Big|f - \int f\, d\mu\Big|^2\, d\mu}.$$

ix) Jegyezzük meg, hogy a Minkowski-egyenlőtlenségben (ld. 3.5.3. Tétel) lényeges a $p \geq 1$ feltétel. Legyen ui.

$$X := \mathbf{N},\ \Omega := \mathcal{P}(X),\ \mu(\{n\}) := 1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(azaz a μ az $\mathbf{N}$-beli számosságmérték) (ld. 2.4. iv) megjegyzés)). Ekkor (ld. 3.4. iv) megjegyzés) az

$$f := (1, 0, 0, ...),\ g := (0, 1, 0, ...)$$

függvényekre (számsorozatokra) $f,\ g \in L^+$, és

$$\|f + g\|_{1/2} = 4,\ \|f\|_{1/2} = \|g\|_{1/2} = 1$$

adódik. Tehát $\|f + g\|_{1/2} \not\leq \|f\|_{1/2} + \|g\|_{1/2}$.

x) Az előző megjegyzéshez is kapcsolódva (az ottani jelölésekkel) egyszerűen megmutatható, hogy ha $0 < p < 1$, és az $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényeknek létezik az $f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ összege, akkor fennáll az alábbi becslés:

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu.$$

Ugyanis mindez következik az

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p \qquad (a,\ b \geq 0)$$

egyenlőtlenségből. Ez utóbbi igazolásához vegyük a

$$\varphi(t) := 1 + t^p - (1 + t)^p \qquad (t > 0)$$

függvényt, ami nyilván differenciálható, és

$$\varphi'(t) = p \cdot \left(t^{p-1} - (1 + t)^{p-1}\right) \qquad (t > 0),$$

így $0 < p < 1$ miatt $\varphi' > 0$. Ezért a φ függvény szigorúan monoton növekedő, amiből a $\varphi(+0) = 0$ egyenlőség figyelembevételével a $\varphi(t) > 0$ $(t > 0)$ becslést kapjuk. A $b \neq 0$ esetben a $t := a/b$ választással a jelzett egyenlőtlenséghez jutunk, ami viszont a $b = 0$-ra nyilvánvaló.

A $0 < t \mapsto t^{1/p}$ függvény konvexitását szem előtt tartva a fentiekből rögtön adódik a Minkowski-egyenlőtlenségnek (ld. 3.5.3. Tétel) a $0 < p < 1$ esetre vonatkozó alakja:

$$\|f + g\|_p = \left(\int |f + g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} =$$

$$(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p} \leq 2^{(1-p)/p} \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Ha tehát az L^p terek értelmezését (ld. 3.5.) a $p \geq 1$ esettel megegyező módon kiterjesztjük a $0 < p < 1$ kitevőkre is, akkor az így kapott $(L^p, \|\cdot\|_p)$ terek kvázinormált terek. Könnyű meggondolni, hogy a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) minden további nélkül igaz marad a $0 < p < 1$ esetben is. Sőt, ugyanez mondható el a 3.5.7. (teljességi) Tételt illetően is, ha a bizonyításban a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel) helyett a $\|\cdot\|_p$ $(0 < p < 1)$ kvázinorma tulajdonságaira támaszkodunk. Más szóval a $0 < p < 1$ kitevőkkel az $(L^p, \|\cdot\|_p)$ tér egy teljes kvázinormált tér.

xi) Ha az L^p-terek (ld. 3.5.) definíciójában szereplő μ mérték véges, akkor

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1 \qquad (1 \leq p \leq q \leq +\infty).$$

A 3.5.4. Tételre tekintettel ez nyilván már csak $1 < p < q < +\infty$ mellett kíván indokolást. Ekkor a Hölder-egyenlőtlenséget (ld. 3.5.1. Tétel) a

$$\tilde{p} := q/p, \ \tilde{q} := q/(q-p)$$

paraméterekkel alkalmazva $f \in L^q$ esetén azt kapjuk, hogy (a 3.5.4. Tétel bizonyításában szereplő $h := f_1 \equiv 1$ függvénnyel)

$$\|f\|_p^p = \||f|^p \cdot h\|_1 \leq \||f|^p\|_{\tilde{p}} \cdot \|h\|_{\tilde{q}} = \|f\|_q^p \cdot (\mu(X))^{1/\tilde{q}}.$$

Innen $\|f\|_p \leq \Big(\mu(X)\Big)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q < +\infty$ következik, tehát valóban $f \in L^p$.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi becslés $q = +\infty$ esetén is igaz:

$$\|f\|_p \leq \Big(\mu(X)\Big)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty,$$

ui. ($p < +\infty$ mellett) $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p$ μ-m.m. miatt (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int \|f\|_\infty^p \, d\mu\right)^{1/p} = \Big(\mu(X)\Big)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty.$$

Hasonlóan, ha $p = 1 < q \leq +\infty$, akkor a fenti $h \equiv 1$ függvénnyel a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) alapján

$$\|f\|_1 = \int |fh| \, d\mu \leq \|f\|_q \cdot \|h\|_r = \|f\|_q \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{1/r},$$

ahol $1 \leq r < +\infty$ és $1/q + 1/r = 1$.

Speciálisan, ha $\mu(X) \leq 1$, akkor a most mondottak szerint

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \qquad (1 \leq p \leq q \leq +\infty).$$

xii) Tegyük fel, hogy az előbbi megjegyzésben $1 \le p < q < +\infty$. Ekkor az L^q mindenütt sűrű az L^p-ben: tetszőleges $f \in L^p$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $g \in L^q$, hogy $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Ha ui. $f \in L^p$, akkor nyilván

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f \cdot \chi_{\{k \le |f| < k+1\}}.$$

Legyen

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} f \cdot \chi_{\{k \le |f| < k+1\}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor (ld. xi)) $f_n \in L^\infty \subset L^q \subset L^p$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, és $|f_n| \le |f| \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$. Ezért a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) szerint $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Alkalmas $n \in \mathbf{N}$ mellett tehát $\|f - f_n\|_p < \varepsilon$, így a $g := f_n \in L^q$ választással $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

xiii) A xi) megjegyzésben a Hölder-egyenlőtlenség egy jellemző alkalmazását mutattuk be. Magának az említett megjegyzésnek az állítása „elintézhető" az alábbi módon is. Legyen ui. az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvénnyel

$$A := \{|f| \ge 1\},\ B := X \setminus A = \{|f| < 1\},$$

ekkor az $1 < p < q < +\infty$ kitevőkkel

$$|f|^p = |f|^p \cdot \chi_A + |f|^p \cdot \chi_B \le |f|^q \cdot \chi_A + \chi_B \le |f|^q + 1.$$

Innen (a 3.3.2.2. Tételt figyelembe véve mindkét oldal integrálása után) rögtön azt kapjuk, hogy $f \in L^q$ esetén

$$\|f\|_p^p \le \|f\|_q^q + \mu(X) < +\infty.$$

Sőt, ezzel a „technikával" nem véges μ mérték mellett is kaphatunk egy jól használható formulát az $L^p(\mu)$ terek kapcsolatát illetően. Legyen ui.

$$1 \le p < r < q \le +\infty,$$

és $f \in L^r(\mu)$. Ekkor az előbbi A, B halmazok segítségével a következőket mondhatjuk:

$$\int |f \cdot \chi_A|^p \, d\mu \le \int |f \cdot \chi_A|^r \, d\mu \le \int |f|^r \, d\mu < +\infty,$$

valamint $q < +\infty$ esetén

$$\int |f \cdot \chi_B|^q \, d\mu \le \int |f \cdot \chi_B|^r \, d\mu \le \int |f|^r \, d\mu < +\infty,$$

így – lévén (ld. 3.1.4. Tétel) az $f\cdot\chi_A$, $f\cdot\chi_B$ függvények nyilván egyaránt mérhetők –

$$f\cdot\chi_A \in L^p(\mu),\ f\cdot\chi_B \in L^q(\mu).$$

Világos továbbá, hogy $f\cdot\chi_B \in L^\infty(\mu)$. Mivel $f = f\cdot\chi_A + f\cdot\chi_B$, ezért azt láttuk be, hogy

$$L^r(\mu) \subset L^p(\mu) + L^q(\mu) := \{g + h : X \to \mathbf{R} : g \in L^p(\mu),\ h \in L^q(\mu)\}.$$

Az $L^r(\mu)$ tér most kapott előállítása persze véges μ-re is „megy", csak éppen (ld. 3.5.4. Tétel) $L^q(\mu) \subset L^r(\mu) \subset L^p(\mu)$ miatt ez ekkor semmitmondó.

xiv) Az előzőekhez kapcsolódva (bizonyítás nélkül) jegyezzük meg, hogy amennyiben

$$L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$$

teljesül valamilyen $1 \le p < q \le +\infty$ mellett, akkor minden $1 \le r < s \le +\infty$ esetén igaz az $L^r(\mu) \subset L^s(\mu)$ reláció. Ugyanez mondható el akkor is, ha $\subset$ helyett $\supset$-et írunk. Számos egyéb ekvivalens feltétel ismeretes az $L^p(\mu)$ terek „tartalmazkodását" illetően, amelyekre itt nincs módunkban kitérni.

xv) A 3.5.2. Tétel állítása nem igaz (a valamilyen $0 < p < +\infty$ kitevővel megkövetelt) $\|f\|_p < +\infty$ feltétel nélkül. Legyen ui. (ld. 2.7.1.) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ és $f \equiv 1$. Ekkor minden $0 < q < +\infty$ mellett $\|f\|_q = +\infty$, de $\|f\|_\infty = 1$.

Ha viszont a szóban forgó (X, Ω, μ) mértékteret illetően a μ mérték véges, akkor tetszőleges $f \in L^\infty$ függvényre

$$\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty.$$

Ekkor ui. bármilyen $0 < p < +\infty$ mellett az $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ μ-m.m. becslésből (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\int |f|^p\, d\mu \le \|f\|_\infty^p \cdot \mu(X) < +\infty$$

következik, így alkalmazható a 3.5.2. Tétel.

Ha még $\mu(X) \le 1$ is igaz, akkor a ix) megjegyzés szerint minden $f \in L^\infty$ függvény esetén az

$$[1, +\infty] \ni q \mapsto \|f\|_q$$

leképezés monoton növekedő, ezért ekkor

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f\|_q : q \ge 1\}.$$

xvi) Az L^p terek viszonyát illetően az alábbi eseteket ajánljuk az Olvasónak meggondolásra:

a) $X := (0, 1/2)$, Ω az X-beli Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája, μ pedig a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.) leszűkítése az Ω-ra. Ha $1 \le p < +\infty$ és

$$f(x) := x^{-1/p} \cdot \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2/p} \qquad (x \in X),$$

akkor $f \in L^p(\mu)$, de $f \notin L^q(\mu)$ $(p < q \le +\infty)$;

b) az a)-beli (X, Ω, μ) mértéktér mellett a

$$g(x) := \ln \frac{1}{x} \qquad (x \in X)$$

függvényre $g \notin L^\infty(\mu)$, míg tetszőleges $1 \le p < +\infty$ esetén $g \in L^p(\mu)$;

c) az $\mathbf{R}$-en tekintsük az $(\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ Lebesgue-féle mértékteret (ld. 2.7.1.) és a

$$h(x) := |x|^{-1/2} \cdot \Big(1 + |\ln |x||\Big)^{-1} \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R})$$

függvényt, ekkor $h \in L^2(\hat{\mu}_1)$, azonban $h \notin L^p(\hat{\mu}_1)$, hacsak $2 \ne p \in [1, +\infty]$.

xvii) Könnyű példát konstruálni annak az igazolására, hogy ha a 3.3.3.5. Tételben szereplő f függvényre $f \in L^1(\tilde{\mu})$, akkor (ugyanott) általában nem lehet garantálni azt, hogy az $f_i \in L(\mu)$ $(i = 1, 2)$ függvények $L^1(\mu)$-ben lesznek. Legyen ui.

$$X := \mathbf{Z},\ \Omega := \{\emptyset, X\},\ \mu \equiv 0.$$

Ekkor nyilván $\tilde{\Omega} = \mathcal{P}(\mathbf{Z})$ és $\tilde{\mu} \equiv 0$. Ha

$$f(x) := x \qquad (x \in X),$$

akkor világos, hogy $f \in L^1(\tilde{\mu})$. Ugyanakkor f_i $(i = 1, 2)$ csak konstansfüggvény lehet, ezért $f_1 = -\infty$, $f_2 = +\infty$.

xviii) Ha (adott $X \ne \emptyset$ halmaz és (X, Ω, μ) mértéktér esetén) $f \in L^1$, akkor (ld. 3.3.2.) egy-egy alkalmas, monoton növekedő $g_n \in L_0^+$, $h_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbf{N})$ (azaz nem-negatív lépcsősfüggvényekből álló sorozattal) $\lim_{n\to\infty} g_n = f^+$, $\lim_{n\to\infty} h_n = f^-$ és

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int f^+ \, d\mu, \quad \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu = \int f^- \, d\mu$$

teljesül. Világos, hogy $f \in L^1$, azaz $f^+, f^- \in L^1$ miatt $g_n, h_n \in L^1$, és az

$$f_n := g_n - h_n \in L_0 \cap L^1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

lépcsősfüggvényekből álló sorozatra $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Továbbá

$$\|f - f_n\|_1 \le \|f^+ - g_n\|_1 + \|f^- - h_n\|_1 =$$

$$\int (f^+ - g_n)\, d\mu + \int (f^- - h_n)\, d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $L_0 \cap L^1$ halmaz az $\|\cdot\|_1$ norma szerint mindenütt sűrű az L^1-ben: bármilyen $f \in L^1$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\varphi_\varepsilon \in L_0 \cap L^1$, hogy $\|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

xix) Tegyük most fel, hogy az előző megjegyzésben az (X, Ω, μ) mértékteret egy (X-beli) $\mathcal{H}$ félgyűrűn értelmezett, σ-additív, nem-negatív $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény kiterjesztése révén kaptuk (ld. 2.3.1., 2.5.). Legyen $\mathcal{L}_0$ a χ_I $(I \in \mathcal{H})$ alakú függvények lineáris burka (azaz az említett függvények összes véges lineáris kombinációinak a halmaza). Könnyű megmutatni, hogy ekkor az $\mathcal{L}_0 \cap L^1$ altér is mindenütt sűrű az L^1-ben a $\|\cdot\|_1$ normára nézve: minden $f \in L^1$ és $\varepsilon > 0$ esetén megadható a $g \in \mathcal{L}_0 \cap L^1$ függvény úgy, hogy $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Legyen ui. $f \in L^1, \varepsilon > 0$, és $\varphi_\varepsilon \in L_0 \cap L^1$ a xviii)-beli függvény: $\|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Ekkor minden $0 \neq y \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}$ esetén

$$|y| \cdot \mu(\{\varphi_\varepsilon = y\}) \le \sum_{z \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}} |z| \cdot \mu(\{\varphi_\varepsilon = z\}) = \|\varphi_\varepsilon\|_1 < +\infty,$$

így $\mu(\{\varphi_\varepsilon = y\}) < +\infty$. Ugyanakkor tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazhoz és $\delta > 0$ számhoz van olyan $l_A^{(\delta)} \in \mathcal{L}_0$ lépcsősfüggvény, amelyikkel

$$\|\chi_A - l_A^{(\delta)}\|_1 < \delta.$$

A 2.6. xiii) megjegyzés alapján ui. tetszőleges $\delta > 0$ számhoz van olyan $B_\delta \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, hogy az

$$A \Delta B_\delta := (A \setminus B_\delta) \cup (B_\delta \setminus A)$$

jelöléssel $\mu(A \Delta B_\delta) < \delta$. Mivel

$$\|\chi_A - \chi_{B_\delta}\|_1 = \mu(A \Delta B_\delta) < \delta,$$

így (ld. 2.1.4. Tétel) az $\ell_A^{(\delta)} := \chi_{B_\delta} \in \mathcal{L}_0$ választás megfelelő.

Ezt felhasználva legyen a φ_ε függvény esetén

$$\Phi_\varepsilon := \sum_{0 \neq y \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}} y \cdot l_{\{\varphi_\varepsilon = y\}}^{(\delta)}.$$

Világos, hogy $\Phi_\varepsilon \in \mathcal{L}_0$, és

$$\|\Phi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_1 \le \sum_{y \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}} |y| \cdot \left\| \chi_{\{\varphi_\varepsilon = y\}} - l_{\{\varphi_\varepsilon = y\}}^{(\delta)} \right\|_1 \le \delta \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}} |y|.$$

Ha itt a $\delta > 0$ olyan, hogy $\delta \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_{\varphi_\varepsilon}} |y| < \varepsilon$, akkor $\|\Phi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Ezért

$$\|f - \Phi_\varepsilon\|_1 \le \|f - \varphi_\varepsilon\|_1 + \|\varphi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon\|_1 < 2\varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy az állításunk a $g := \Phi_{\varepsilon/2}$ választással igaz: $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

xx) Nem nehéz meggondolni, hogy a xviii)-xix) megjegyzések állításai igazak maradnak, ha azokban az L^1 teret, ill. az $\|\cdot\|_1$ normát L^p-re, ill. $\|\cdot\|_p$-ra $(1 < p < +\infty)$ cseréljük. Ha ui. a xviii) megjegyzésben $f \in L^p$, akkor $f^\pm \in L^+$, és

$$+\infty > \|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu = \int (f^+)^p \, d\mu + \int (f^-)^p \, d\mu$$

miatt $\int (f^\pm)^p \, d\mu < +\infty$. Így a xviii) megjegyzésben szereplő $g_n, h_n \in L_0^+$ függvényekkel $g_n \le f^+$, $h_n \le f^-$ miatt (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int g_n^p \, d\mu \le \int (f^+)^p \, d\mu < +\infty, \quad \int h_n^p \, d\mu \le \int (f^-)^p \, d\mu < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát $g_n, h_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) szerint az $f_n := g_n - h_n \in L_0 \cap L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekkel

$$\|f - f_n\|_p \le \|f^+ - g_n\|_p + \|f^- - h_n\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Innen már (értelemszerű módosítással) következik a xix) megjegyzés analogonja $\|\cdot\|_1$ helyett $\|\cdot\|_p$-ra.

Megjegyezzük, hogy a 3.5.7. Tétel bizonyításában követett gondolatmenettel azt kapjuk, hogy a xviii) és a xxi) megjegyzésben az (f_n) sorozatnak egy alkalmas részsorozata μ-m.m. is konvergál a szóban forgó függvényhez. Ezért (az (f_n)-et ezzel a részsorozatával helyettesítve) az említett megjegyzésekben azt is feltételezhetjük, hogy (a $\|\cdot\|_p$-ban való konvergencia mellett) az (f_n) sorozat μ-m.m. is konvergál az illető f-hez. Ugyanez igaz marad a μ mértékről a xix) megjegyzésben tett feltétel mellett, amikor is $f_n \in \mathcal{L}_0 \cap L^p$ $(n \in \mathbf{N})$.

xxi) Lássuk be, hogy a xviii) megjegyzés nem változik, ha abban az L^1-et L^∞-re, az $\|\cdot\|_1$ normát pedig $\|\cdot\|_\infty$-re cseréljük. Tehát tetszőleges $f \in L^\infty$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám mellett van olyan $g \in L_0 \cap L^\infty = L_0$, hogy $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Ha ui. $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ olyan számok, amikkel $f(x) \in [a, b)$ (μ-m.m. $x \in X$), akkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett osszuk fel az $[a, b)$-t n egyenlő részre:

$$I_k := \left[a + k \cdot \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

Az $A_k := f^{-1}[I_k]$ $(k = 0, ..., n-1)$ halmazok valamennyien mérhetők (ui. az f mérhető), és nyilván páronként diszjunktak. Világos, hogy a

$$g := \sum_{k=0}^{n-1} \Big(a + k\cdot \frac{b-a}{n}\Big)\cdot \chi_{A_k} \in L_0$$

függvényre $\|f-g\|_\infty \le 1/n$, ami az állításunk bizonyítását jelenti.

xxii) Az alábbi példa azt illusztrálja, hogy ugyanakkor a xix) megjegyzés $p = +\infty$ esetén általában nem igaz, azaz az $\mathcal{L}_0 \cap L^\infty = \mathcal{L}_0$ altér nem feltétlenül lesz mindenütt sűrű az L^∞-ben. Legyen ti. (ld. 2.7.1.)

$$(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy ekkor a $\mathcal{H}$ félgyűrű (az $\emptyset$-tól különböző) elemei az $[\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha < \beta)$ intervallumok.) Ha

$$f(x) := 1 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor nyilván $f \in L^\infty$. Legyen $g \in \mathcal{L}_0$, $a \in \mathbf{R}$ pedig olyan szám, hogy $g(x) = 0$ $(x > a)$, következésképpen

$$|f(x) - g(x)| = 1 \qquad (x > a).$$

Világos tehát, hogy $\|f-g\|_\infty \ge 1$, így $\overline{\mathcal{L}_0} \ne L^\infty$.

xxiii) A Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel az ottani jelölésekkel) bizonyítását az $1 \le p < +\infty$, $0 < \|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$ esetben a $0 \le t \mapsto t^p$ függvény konvexitását kihasználva „egy ütemben" is elvégezhetjük. Ti. vegyük észre, hogy tetszőleges α, β, z, $y \ge 0$ számokkal az $\alpha + \beta > 0$ feltételezés mellett

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot z + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y\right)^p \le \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot z^p + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y^p.$$

Legyen itt

$$\alpha := \|f\|_p,\ \ \beta := \|g\|_p,\ \ z := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\ \ y := \frac{|g(x)|}{\|g\|_p},$$

ahol μ-m.m. $x \in X$ esetén $|f(x)|, |g(x)| < +\infty$. Ezért μ-m.m. $x \in X$ mellett

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot z + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y =$$

$$\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\cdot \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_p} = \frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p},$$

valamint

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot z^p + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y^p =$$

$$\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\cdot\frac{|g(x)|^p}{\|g\|_p^p}.$$

Tehát integálás után (ld. 3.3.3.4. Tétel)

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{(\|f\|_p+\|g\|_p)^p} = \frac{1}{(\|f\|_p+\|g\|_p)^p}\cdot\int |f+g|^p\,d\mu \le$$

$$\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\cdot\int\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\,d\mu + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\cdot\int\frac{|g|^p}{\|g\|_p^p}\,d\mu = 1$$

következik. Átszorzással kapjuk az $\|f+g\|_p^p \le (\|f\|_p+\|g\|_p)^p$ becslést, ami nyilván u.az, mint a Minkowski-egyenlőtlenség.

xxiv) Egy érdekes „folytonossági" tulajdonsága a $\|\cdot\|_p$-normáknak a következő: ha a fentiekben szereplő (X,Ω,μ) mértéktér mellett $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény és

$$P_f := \{s \in [1,+\infty] : \|f\|_s < +\infty\},$$

akkor a P_f halmaz vagy az üreshalmaz, vagy 1-elemű, vagy pedig valódi intervallum. Legyen ui. ($P_f \neq \emptyset$ esetén)

$$\alpha := \inf P_f,\ \beta := \sup P_f.$$

Ha $\gamma := \alpha = \beta$, akkor nyilván $P_f = \{\gamma\}$. (Ez a helyzet pl. a xvi) megjegyzés c) függvényét illetően.) Ha viszont $\alpha < \beta$, akkor legyen $\alpha < r < \beta$, és válasszuk a $p,\ s \in P_f$ számokat úgy, hogy

$$\alpha < p < r < s < \beta$$

teljesüljön. Legyen

$$g := f\cdot\chi_{\{|f|>1\}},\ h := f\cdot\chi_{\{|f|\le 1\}},$$

ekkor

$$\int |f|^r\,d\mu = \int |g+h|^r\,d\mu = \int |g|^r\,d\mu + \int |h|^r\,d\mu \le$$

$$\int |g|^s\,d\mu + \int |h|^p\,d\mu \le \int |f|^s\,d\mu + \int |f|^p\,d\mu < +\infty.$$

Tehát $r \in P_f$, ezért a P_f halmaz csak az

$$(\alpha,\beta),\ [\alpha,\beta),\ [\alpha,\beta],\ (\alpha,\beta]$$

intervallumok valamelyike lehet.

Megjegyezzük, hogy (ld. 2.7.1.) az $(X,\Omega,\mu) := (\mathbf{R},\hat{\Omega}_1,\hat{\mu}_1)$ esetben az $f(x) := x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényre nyilván $P_f = \emptyset$.

xxv) A 3.5.8. Tételt figyelembe véve a Lebesgue-tétel (3.5.6. Tétel) – egészen pontosan a „kis" Lebesgue-tétel – megfelelője Riemann-integrálható függvényekből álló sorozatokra a következőképpen fogalmazható meg: ha $-\infty < a < b < +\infty$, az $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig Riemann-integrálható függvényeknek egy olyan pontonként konvergens sorozata, amelyikre

$$\sup\{|f_n(x)| \in \mathbf{R} : x \in [a,b],\ n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

valamint az $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in [a,b])$ függvény Riemann-integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

A most megfogalmazott állítás nem más, mint az Arzelà-tétel (ld. 1.2.2.2. Tétel). Ha itt az (f_n) sorozat monoton növekedését jelentő

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in [a,b])$$

kikötést tesszük, akkor a Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel) megfelelőjét kapjuk a Riemann-integrálható függvényekre. (A határfüggvény Riemann-integrálhatóságának a feltételezése itt sem hagyható el.) Viszont mind itt, mind pedig az Arzelà-tételben elegendő az (f_n) sorozat μ-m.m. való konvergenciáját feltenni.

xxvi) Ha az (X, Ω, μ) egy olyan mértéktér, amelyikre a μ véges (azaz $\mu(X) < +\infty$), akkor bármilyen egyenletesen konvergens $f_n \in L^1$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatra az $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény is L^1-ben van, és

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Egyrészt ui. – lévén az (f_n) sorozat pontonként is konvergens – az f mérhető (ld. 3.1.5. Tétel), másrészt az egyenletes konvergencia miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ természetes szám mellett

$$|f(x) - f_N(x)| < 1 \qquad (x \in X),$$

ezért $|f| < 1 + |f_N|$. Mivel a μ véges, ezért $1 + |f_N| \in L^1$. Ezért alkalmazható a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) az (f_n) sorozatra.

Ugyanakkor nem véges μ mellett mindez már érvényét veszti. Hiszen pl. (ld. 2.7.1.) az $(\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ mértéktér esetén tekintsük az

$$f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

sorozatot, ami nyilván egyenletesen konvergál az $f(x) := 0$ $(x \in \mathbf{R})$ mérhető függvényhez, de $\int f_n\,d\mu = 1$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = 1 \ne 0 = \int f\,d\mu$.

xxvii) Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ egy (nem egy pontból álló) intervallum,

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}(I) : A \in \hat{\Omega}_1\},$$

a μ mérték pedig (ld. 2.7.1.) a $\hat{\mu}_1$ leszűkítése az Ω-ra, és vegyük az (I, Ω, μ) mértékteret. Ha az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény az I bármelyik kompakt részintervallumán Riemann-integrálható, akkor a következőt mondhatjuk: az f függvény pontosan akkor tartozik az L^1 függvényosztályba (Lebesgue-integrálható), ha az $|f|$ függvénynek az I-n létezik az improprius Riemann-integrálja.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel ui., hogy $I = \mathbf{R}$. Az $f = f^+ - f^-$, valamint az $|f| = f^+ + f^-$ felbontásokra gondolva továbbá az is nyugodtan feltehető, hogy $f \geq 0$. Ha $I_n := [-n, n]$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az $f \cdot \chi_{I_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat nyilván monoton növekedő módon tart az f-hez, ezért a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) alapján $f \in L^+$, és

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \chi_{I_n} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x) \, dx,$$

ahol $q := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x) \, dx$ nem más, mint az állításban említett improprius Riemann-integrál. Tehát valóban igaz, hogy $f \in L^1 \iff q < +\infty$.

xxviii) Könnyű megmutatni viszont, hogy az előbbi megjegyzésben az f függvénynek az I-n való „abszolút" improprius Riemann-integrálhatósága nem helyettesíthető az f függvény I-n való improprius Riemann-integrálhatóságával. Legyen ui. a xxvii)-beli mértéktér esetén

$$I := (0, +\infty), \; f(x) := \frac{\sin x}{x} \qquad (x > 0).$$

Mivel az f függvény folytonos, ezért (ld. 3.1.) mérhető. Jól ismert az elemi analízisből, hogy létezik a

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x) \, dx$$

improprius Riemann-integrál. Ugyanakkor a bármilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett fennálló

$$|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\cdot \pi} \qquad (k\cdot \pi \leq x < (k+1)\cdot \pi)$$

becslés miatt

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx \geq \sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)\cdot \pi\Big)^{-1} \cdot \int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\cdot\pi} |\sin x| \, dx =$$

$$\pi^{-1} \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx \cdot \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{-1} =: A_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\|f\|_1 = +\infty$, azaz $f \notin L^1$.

xxix) Tegyük fel, hogy adott az (X, Ω, μ) mértéktér, a μ véges, és (ld. 2.6. xiii) megjegyzés)

$$\rho(A, B) := \mu(A \triangle B) \qquad (A, B \in \Omega)$$

(ahol $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (a szóban forgó halmazok *szimmetrikus differenciája*)). Ekkor az (Ω, ρ) teljes félmetrikus tér, azaz a ρ függvény félmetrika, és tetszőleges $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat esetén a

$$\rho(A_n, A_m) \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

Cauchy-feltételből következik olyan $A \in \Omega$ létetezése, hogy

$$\rho(A_n, A) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ui. a félmetrika tulajdonságai közül a

$$\rho(A, B) \geq 0, \ \rho(A, A) = 0, \ \rho(A, B) = \rho(B, A) \qquad (A, B \in \Omega)$$

állítások triviális módon teljesülnek. A

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \qquad (A, B, C \in \Omega)$$

háromszög-egyenlőtlenséghez vegyük észre, hogy

$$\rho(A, B) = \int \chi_{A \triangle B} \, d\mu = \int |\chi_A - \chi_B| \, d\mu = \|\chi_A - \chi_B\|_1 \qquad (A, B \in \Omega),$$

ezért a fenti A, B, C halmazokkal (ld. 3.5.3. Tétel)

$$\rho(A, B) = \|\chi_A - \chi_B\|_1 \leq \|\chi_A - \chi_C\|_1 + \|\chi_C - \chi_B\|_1 = \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

Tehát a ρ valóban félmetrika. Legyen most az $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat a ρ értelmében Cauchy-sorozat, azaz

$$\rho(A_n, A_m) = \|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\|_1 \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

A 3.5.6. Tétel szerint van olyan $f \in L^1$ függvény, hogy

$$\|f - \chi_{A_n}\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

és egy alkalmas (n_k) indexsorozattal, valamint egy $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \chi_{A_{n_k}}(x) \qquad (x \in X \setminus B).$$

Mivel $\chi_{A_{n_k}}(x) \in \{0, 1\} \ (k \in \mathbf{N})$, ezért $f(x) \in \{0, 1\} \ (x \in X \setminus B)$. Ha

$$C := \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_{n_j},$$

akkor világos, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{A_{n_k}}(x) = 1 \iff x \in C.$$

Tehát

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (X \setminus B) \cap C) \\ 0 & (x \in (X \setminus B) \setminus C), \end{cases}$$

ezért a

$$g := \chi_{(X\setminus B)\cap C}$$

függvénnyel

$$g(x) = f(x) \qquad (x \in X \setminus B).$$

Ez azt jelenti, hogy $g = f$ μ-m.m. Következésképpen (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\|g - \chi_{A_n}\|_1 = \|f - \chi_{A_n}\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Más szóval az $A := (X \setminus B) \cap C$ halmazzal

$$\rho(A_n, A) = \|\chi_{A_n} - \chi_A\|_1 = \|g - \chi_{A_n}\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezzel az állításunkat beláttuk. Jegyezzük meg, hogy ha $U, V \in \Omega$ és $\rho(U, V) = 0$, akkor $\mu(U \setminus V) = \mu(V \setminus U) = 0$. Így

$$\mu(U) = \mu((U \setminus V) \cup (U \cap V)) = \mu(U \setminus V) + \mu(U \cap V) = \mu(U \cap V),$$

és hasonlóan $\mu(V) = \mu(U \cap V)$.

xxx) Tekintsük a Lebesgue-féle (ld. 2.7.1.) $(\mathbf{R}^p, \hat{\Omega}_p, \hat{\mu}_p)$ mértékteret (ahol $1 \le p \in \mathbf{N}$), és az $f \in L^1(\hat{\mu}_p)$ (Lebesgue-integrálható) függvény, valamint egy $a \in \mathbf{R}^p$ esetén legyen

$$\tau_a f(x) := f(x + a) \qquad (x \in \mathbf{R}^p).$$

Mutassuk meg, hogy $\tau_a f \in L^1(\hat{\mu}_p)$, és

$$\int \tau_a f \, d\hat{\mu}_p = \int f \, d\hat{\mu}_p$$

(röviden: a Lebesgue-integrál *eltolásinvariáns*). Ha ui. itt valamilyen $A \in \hat{\Omega}_p$ halmazzal $f = \chi_A$, akkor $\tau_a f = \chi_{-a+A}$, ezért (ld. 2.7.1.) a Lebesgue-mérték eltolásinvarianciája alapján

$$\int \tau_a f \, d\hat{\mu}_p = \int \chi_{-a+A} \, d\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_p(-a + A) = \hat{\mu}_p(A) = \int f \, d\hat{\mu}_p.$$

A függvények mérhetőségének, valamint az integrálnak a linearitása miatt ugyanez igaz minden $f \in L_0^+(\hat{\mu}_p)$ lépcsősfüggvényre is. Ha pedig $f \in L^+(\hat{\mu}_p)$, akkor egy alkalmas $f_n \in L_0^+(\hat{\mu}_p)$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ és } \int f\, d\hat{\mu}_p = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\hat{\mu}_p.$$

Világos, hogy $\tau_a f_n \le \tau_a f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$, továbbá $\tau_a f = \lim_{n\to\infty} \tau_a f_n$. Ezért (ld. 3.3.2.3. Tétel) $\tau_a f \in L^+(\hat{\mu}_p)$, és (az előbbiekre tekintettel)

$$\int \tau_a f\, d\hat{\mu}_p = \lim_{n\to\infty} \int \tau_a f_n\, d\hat{\mu}_p = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\hat{\mu}_p = \int f\, d\hat{\mu}_p.$$

Innen tetszőleges $f \in L^1(\hat{\mu}_p)$ függvényre az állításunk már a „szokásos" $f = f^+ - f^-$ felbontásból következik.

Ugyanígy kapjuk az előbbi f függvényre és tetszőleges $0 \ne c \in \mathbf{R}$ számra, hogy a

$$\delta_c f(x) := f(cx) \qquad (x \in \mathbf{R}^p)$$

függvényre $\delta_c f \in L^1(\hat{\mu}_p)$, és

$$\int \delta_c f\, d\hat{\mu}_p = \frac{1}{|c|^p} \cdot \int f\, d\hat{\mu}_p.$$

3.7. Eloszlásfüggvény, monoton átrendezés

Legyen az $X \ne \emptyset$ halmaz és az (X, Ω, μ) mértéktér, valamint az $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvény esetén

$$\varphi_f(y) := \mu(\{|f| > y\}) \qquad (y \ge 0).$$

Az így definiált $\varphi_f : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ függvény az f függvény *eloszlásfüggvénye.*

Ha pl. valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a $c_1 > c_2 > \ldots > c_n > 0$ együtthatókkal és a páronként diszjunkt $A_j \in \Omega \quad (j = 1, ..., n)$ halmazokkal

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{A_j} \in L_0^+,$$

akkor – könnyen beláthatóan – a

$$c_{n+1} := \lambda_0 := 0,\ \lambda_j := \sum_{k=1}^{j} \mu(A_j) \qquad (j = 1, ..., n)$$

jelölésekkel

$$\varphi_f = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot \chi_{[c_{j+1}, c_j]}.$$

Az eloszlásfüggvény két karakterisztikus jellemzőjét – a gyakori alkalmazások miatt is – érdemes külön állítás formájában kiemelni.

3.7.1. Tétel. *A φ_f eloszlásfüggvény monoton fogyó, és minden pontban jobbról folytonos.*

Bizonyítás. Bármilyen $0 \le y < z < +\infty$ mellett $\{|f| > z\} \subset \{|f| > y\}$ miatt

$$\varphi_f(z) = \mu(\{|f| > z\}) \le \mu(\{|f| > y\}) = \varphi_f(y).$$

Tehát a φ_f függvény valóban monoton fogyó. Következésképpen minden $y \ge 0$ helyen létezik a $\varphi_f(y+0)$ jobb oldali határértéke. Legyen $y_n := y + 1/n$ és

$$A_n := \{|f| > y_n\} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ és $\{|f| > y\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(y_n) = \varphi_f(y+0),$$

azaz a φ_f az y-ban jobbról folytonos. ■

Megjegyezzük, hogy ha (ld. 2.7.1.) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ és

$$g := \chi_{[0,1)} + 2\cdot \chi_{[1,2]},$$

akkor

$$\varphi_g(y) = \begin{cases} 2 & (0 \le y < 1) \\ 1 & (1 \le y < 2) \\ 0 & (2 \le y). \end{cases}$$

Tehát a φ_g eloszlásfüggvény (pl.) az 1-ben balról nem folytonos.

A következő tételben az eloszlásfüggvény néhány további tulajdonságát soroljuk fel.

3.7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g, f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények mérhetők. Ekkor:*

a) $|g| \le |f|$ μ-m.m. *esetén* $\varphi_g \le \varphi_f$;

b) $\varphi_{cf}(y) = \varphi_f(y/|c|)$ $(0 \ne c \in \mathbf{R},\ y \ge 0)$;

c) $\varphi_{f+g}(y+z) \le \varphi_f(y) + \varphi_g(z)$ $(y, z \ge 0)$;

d) $\varphi_{fg}(yz) \le \varphi_f(y) + \varphi_g(z)$ $(y, z \ge 0)$;

e) *ha* $|f| \le \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ-m.m., *akkor* $\varphi_f \le \liminf_{n\to\infty} \varphi_{f_n}$;

f) *ha az* $(|f_n|)$ *sorozat monoton növekedő módon tart az* $|f|$ *függvényhez* μ-m.m., *akkor az eloszlásfüggvények* (φ_{f_n}) *sorozata is monoton növekedve tart a* φ_f*-hez.*

Bizonyítás. Az a)-ban tett feltétel miatt egy alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$\{|g| > y\} \setminus A \subset \{|f| > y\} \qquad (y \geq 0),$$

ezért

$$\varphi_g(y) = \mu(\{|g| > y\}) = \mu(\{|g| > y\} \setminus A) \leq \mu(\{|f| > y\}) = \varphi_f(y) \qquad (y \geq 0).$$

Tehát $\varphi_g \leq \varphi_f$, ami az a) állítás.

Legyen most $0 \neq c \in \mathbf{R}$, ekkor

$$\{|cf| > y\} = \{|f| > y/|c|\} \qquad (y \geq 0),$$

így

$$\varphi_{cf}(y) = \mu(\{|cf| > y\}) = \mu(\{|f| > y/|c|\}) = \varphi_f(y/|c|) \qquad (y \geq 0).$$

Ezzel a b)-t is beláttuk. Ha $y, z \geq 0$, akkor $|f + g| \leq |f| + |g|$ alapján világos, hogy

$$\{|f + g| > y + z\} \subset \{|f| > y\} \cup \{|g| > z\}.$$

Ezért

$$\varphi_{f+g}(y + z) = \mu(\{|f + g| > y + z\}) \leq \mu(\{|f| > y\}) + \mu(\{|g| > z\}) = \varphi_f(y) + \varphi_g(z),$$

ami meg a c) állítás.

A d) bizonyításához legyen $y, z \geq 0$. Ekkor

$$\{|fg| > yz\} \subset \{|f| > y\} \cup \{|g| > z\}$$

miatt

$$\varphi_{fg}(yz) = \mu(\{|fg| > yz\}) \leq \mu(\{|f| > y\}) + \mu(\{|g| > z\}) = \varphi_f(y) + \varphi_g(z).$$

Az e)-beli feltételek mellett legyen $y \geq 0$ és

$$A_n := \{|f_n| > y\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor egy alkalmas $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal

$$\{|f| > y\} \setminus B \subset \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n,$$

ezért (ld. 3.4. ix) megjegyzés)

$$\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\}) = \mu(\{|f| > y\} \setminus B) \leq \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) = \liminf_{n\to\infty} \varphi_{f_n}(y).$$

Az f) egyszerűen következik már az a) és az e) állításból. Ui. az a) miatt a (φ_{f_n}) sorozat monoton növő, az e) és $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ-m.m. alapján pedig

$$\varphi_f \le \liminf_{n\to\infty} \varphi_{f_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{f_n}.$$

Viszont $|f_n| \le |f|$ μ-m.m $(n \in \mathbf{N})$, így (ld. a) állítás) $\varphi_{f_n} \le \varphi_f$ $(n \in \mathbf{N})$, és ezért $\lim_{n\to\infty} \varphi_{f_n} \le \varphi_f$. ■

Valamilyen $X \ne \emptyset$ halmaz és az (X, Ω, μ) mértéktér esetén tekintsünk egy mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvényt, és legyen

$$\tilde{f}(t) := \inf\{y > 0 : \mu(\{|f| > y\}) \le t\} \qquad (t \ge 0)$$

(ahol – mint eddig is – $\inf \emptyset := +\infty$) az f ún. *monoton átrendezése.* Emlékeztetve a

$$\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\}) \qquad (y > 0)$$

eloszlásfüggvény fogalmára azt is írhatjuk, hogy

$$\tilde{f}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \qquad (t > 0).$$

Világos, hogy ha $\mu(X) < +\infty$, akkor minden $t > \mu(X)$ esetén tetszőleges $y > 0$ mellett

$$\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\}) \le \mu(X) < t.$$

Következésképpen $\tilde{f}(t) = \inf(0, +\infty) = 0$.

Ha pl. (ld. fent) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ és

$$f := \chi_{[0,1)} + 2\cdot \chi_{[1,2]},$$

akkor

$$\tilde{f}(t) = \varphi_f(t) = \begin{cases} 2 & (0 \le t < 1) \\ 1 & (1 \le t < 2) \\ 0 & (2 \le t). \end{cases}$$

Hasonlóan, ha $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ a 3.7. pont elején említett függvény, akkor – feltételezve, hogy az A_j-k valamennyien véges mértékűek – egyszerűen belátható, hogy (az ottani jelölésekkel)

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{[\lambda_{j-1}, \lambda_j)}.$$

A fenti $\tilde{f} : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ monoton átrendezésre az alábbi karakterisztikus állítások teljesülnek:

3.7.3. Tétel. *Tetszőleges* $f : X \to \mathbf{R}$ *mérhető függvény esetén*

1° *az* $\tilde{f}$ *függvény monoton fogyó;*

2° *minden* $t \geq 0$ *helyen* $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t+0)$ (*azaz az* $\tilde{f}$ *jobbról folytonos*);

3° (ld. 2.7.1.) *az* $\tilde{f}$ *függvény Lebesgue-mérhető, és*

$$\hat{\mu}_1(\{\tilde{f} > y\}) = \mu(\{|f| > y\}) \qquad (y \geq 0).$$

A 3° állítás alapján tehát azt mondhatjuk, hogy $\varphi_f = \varphi_{\tilde{f}}$: az f és az $\tilde{f}$ függvény azonos eloszlású.

Bizonyítás. Az 1° bizonyítását illetően legyen $0 \leq t < \tau$, és tegyük fel, hogy egy $y > 0$ szám esetén $\mu(\{|f| > y\}) \leq t$. Ekkor nyilván $\mu(\{|f| > y\}) \leq \tau$ is fennáll, így

$$\{y > 0 : \mu(\{|f| > y\}) \leq t\} \subset \{z > 0 : \mu(\{|f| > z\}) \leq \tau\}.$$

Ezért

$$\tilde{f}(\tau) = \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq \tau\} \leq \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \leq t\} = \tilde{f}(t).$$

Megjegyezzük, hogy ha a fenti y nem létezik (amikor is $\tilde{f}(t) = \inf \emptyset = +\infty$), akkor az $\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(t)$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Ezzel az 1°-et beláttuk. Minden $t \geq 0$ helyen létezik tehát az

$$\tilde{f}(t+0) = \sup\{\tilde{f}(\tau) : t < \tau\}$$

jobb oldali határérték, és $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t+0)$. A 2°-höz azt kell megmutatnunk, hogy

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t+0) = \sup\{\tilde{f}(\tau) : t < \tau\}.$$

Indirekt módon induljunk ki ehhez abból, hogy

$$\tilde{f}(t) > \sup\{\tilde{f}(\tau) : t < \tau\},$$

és legyen $\sup\{\tilde{f}(\tau) : t < \tau\} < a < \tilde{f}(t)$, ahol tehát

$$\tilde{f}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \leq t\}.$$

Legyen a $t_n > t$ $(n \in \mathbf{N})$ számsorozat konvergens, és $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Mivel

$$\tilde{f}(t_n) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \leq t_n\} < a,$$

ezért az infimum értelmezését szem előtt tartva van olyan $0 < y_n < a$ szám, hogy

$$\varphi_f(y_n) \leq t_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így kapott (y_n) sorozat nyilván korlátos, ezért van konvergens részsorozata, legyen ez mindjárt maga az előbbi (y_n) sorozat, továbbá

$$z := \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Ekkor a következőket mondhatjuk. Ha kiválasztható az (y_n)-ből olyan (y_{n_k}) részsorozat, amire $y_{n_k} \geq z \quad (k \in \mathbf{N})$ teljesül, akkor (ld. 3.7.1. Tétel) a φ_f függvény jobb oldali folytonosságára hivatkozva azt kapjuk, hogy

$$\varphi_f(z) = \lim_{k\to\infty} \varphi_f(y_{n_k}) \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t.$$

Tehát a $z \leq a < \tilde{f}(t)$ helyen $\varphi_f(z) \leq t$, ami ellentmond annak, hogy

$$\tilde{f}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \leq t\}.$$

Ha viszont az (y_n)-ből nem választható ki az előbbi tulajdonságú (y_{n_k}) részsorozat, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett $y_n < z \quad (N < n \in \mathbf{N})$. Mivel az előbb már idézett 3.7.1. Tétel szerint a φ_f eloszlásfüggvény monoton fogyó, ezért létezik a $\varphi_f(z-0)$ bal oldali határérték, és

$$\varphi_f(z) \leq \varphi_f(z-0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(y_n) \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t.$$

Innen ugyanúgy jutunk ellentmondásra, mint az előbb.

Így a 2° állítást is beláttuk. Az $\tilde{f}$ függvény Lebesgue-mérhetősége (ld. 2.7.1.) az 1° alapján már könnyen „elintézhető". Legyen most az $y > 0$ olyan, hogy

$$\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\}) = +\infty.$$

Ekkor 1° miatt minden $0 < z \leq y$ esetén is $\varphi_f(z) = +\infty$. Ezért tetszőleges $t \geq 0$ mellett

$$\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\} \subset (y, +\infty).$$

Ez azt jelenti, hogy $\tilde{f}(t) \geq y$. Lássuk be, hogy $\tilde{f}(t) > y$. Ui. $\varphi_f(y+0) = +\infty$, különben (ld. 2°) $\varphi_f(y) = \varphi_f(y+0) < +\infty$ lenne. Ha van olyan $q > y$, hogy $\varphi_f(q) = +\infty$, akkor (ld. 2°) bármilyen $y \leq z \leq q$ mellett $\varphi_f(z) = +\infty$. Így

$$\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\} \subset (q, +\infty),$$

és ezért $\tilde{f}(t) \geq q > y$.

Ha ilyen q nem létezik, akkor $\varphi_f(y+0) = \varphi_f(y) = +\infty$ miatt van olyan $s > y$, hogy $\varphi_f(s) > t$, következésképpen $y \leq z \leq s$ esetén is (ld. 1°) $\varphi_f(z) > t$. Így

$$\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\} \subset (s, +\infty),$$

amiből $\tilde{f}(t) \geq s > y$ adódik. Ezzel azt láttuk be, hogy a $\varphi_f(y) = +\infty$ esetben tetszőleges $t > 0$ helyen $\tilde{f}(t) > y$, más szóval

$$\hat{\mu}_1(\{\tilde{f} > y\}) = \varphi_{\tilde{f}}(y) = \hat{\mu}_1\Big((0, +\infty)\Big) = +\infty = \varphi_f(y).$$

Ha $y > 0$ és $\varphi_f(y) < +\infty$, akkor az $\tilde{f}$ definíciója alapján

$$\tilde{f}(\varphi_f(y)) \leq y,$$

és (ld. 1°) egyúttal minden $s \geq \varphi_f(y)$ helyen is $\tilde{f}(s) \leq y$. Ha tehát $\tilde{f}(z) > y$, akkor $0 < z < \varphi_f(y)$, azaz

$$\{\tilde{f} > y\} \subset (0, \varphi_f(y)).$$

Innen

$$\varphi_{\tilde{f}}(y) = \hat{\mu}_1(\{\tilde{f} > y\}) \leq \hat{\mu}_1\Big((0, \varphi_f(y))\Big) = \varphi_f(y)$$

adódik. A fordított irányú $\varphi_f(y) \leq \varphi_{\tilde{f}}(y)$ becsléshez legyen $z > 0$. Mivel (ld. 1°) az $\tilde{f}$ függvény monoton fogyó, ezért az $\{\tilde{f} > z\}$ halmaz intervallum. Legyen

$$v := \sup\{\tilde{f} > z\},$$

ekkor

$$\varphi_{\tilde{f}}(z) = \hat{\mu}_1(\{\tilde{f} > z\}) = v.$$

Tegyük fel, hogy $v < +\infty$, és gondoljuk meg, hogy $\tilde{f}(v) \leq z$. Valóban, $\tilde{f}(v) > z$ esetén (ld. 2°) lenne olyan $q > v$, hogy $\tilde{f}(q) > z$. Ekkor viszont (ld. 1°) minden $v < c \leq q$ helyen is $\tilde{f}(c) > z$, ami ellentmond a v definíciójának.

Mindezt szem előtt tartva legyen először

$$z = \tilde{f}(v) = \inf\{s > 0 : \varphi_f(s) \leq v\}.$$

Ekkor egy alkalmas $z \leq s_n$, $\varphi_f(s_n) \leq v$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\lim_{n\to\infty} s_n = z$. A φ_f jobbról folytonos (ld. 3.7.1. Tétel), ezért

$$\varphi_f(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(s_n) \leq v.$$

Ha most abból indulunk ki, hogy

$$z > \tilde{f}(v) = \inf\{s > 0 : \varphi_f(s) \leq v\},$$

akkor egy $0 < s_n < z$, $\varphi_f(s_n) \leq v$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\lim_{n\to\infty} s_n = z$, és (a φ_f függvény monoton fogyása (ld. 3.7.1. Tétel) alapján)

$$\varphi_f(z) \leq \varphi_f(z - 0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(s_n) \leq v.$$

Ezzel azt láttuk be, hogy

$$\varphi_f(z) \le v = \varphi_{\tilde{f}}(z).$$

Mivel most $\varphi_f(y) < +\infty$, ezért a fenti $\varphi_{\tilde{f}} \le \varphi_f$ becslés miatt egyúttal $\varphi_{\tilde{f}}(y) < +\infty$. Ez azt jelenti, hogy az előbbiekben $z := y$ is írható, amikor is a

$$\varphi_f(y) \le \varphi_{\tilde{f}}(y)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az előzményekkel együtt tehát $\varphi_f(y) = \varphi_{\tilde{f}}(y)$. ■

A következő tételben az $\tilde{f}$ monoton átrendezés néhány további tulajdonságát fogalmazzuk meg.

3.7.4. Tétel. *Tetszőleges $f, g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényekre*

1° *ha $y, t \ge 0$ és $\varphi_f(y)$, $\tilde{f}(t) < +\infty$, akkor $\tilde{f}(\varphi_f(y)) \le y$, $\varphi_f(\tilde{f}(t)) \le t$;*

2° $|g| \le |f|$ μ-m.m. $\Longrightarrow$ $\tilde{g} \le \tilde{f}$;

3° $\widetilde{|f|} = \tilde{f}$;

4° $\widetilde{cf} = |c| \cdot \tilde{f}$ $(c \in \mathbf{R})$;

5° *ha $F := f + g$, akkor $\tilde{F}(t + \tau) \le \tilde{f}(t) + \tilde{g}(\tau)$ $(t, \tau > 0)$;*

6° *ha $G := fg$, akkor $\tilde{G}(t + \tau) \le \tilde{f}(t) \cdot \tilde{g}(\tau)$ $(t, \tau > 0,\ \tilde{f}(t),\ \tilde{g}(\tau) < +\infty)$;*

7° *ha a mérhető $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozatra az $(|f_n|)$ függvénysorozat monoton nőve konvergál az $|f|$ függvényhez μ-m.m., (ahol az $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető), akkor az $(\tilde{f}_n)$ sorozat is monoton nőve tart az $\tilde{f}$-hoz.*

8° *ha az $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ mérhető függvényekből álló sorozat, és az f mérhető függvényre $|f| \le \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ-m.m., akkor $\tilde{f} \le \liminf_{n\to\infty} \tilde{f}_n$;*

9° *tetszőleges $0 < p < +\infty$ esetén $\widetilde{|f|^p} \le (\tilde{f})^p$.*

Bizonyítás. Az 1°-ben mondott $\tilde{f}(\varphi_f(y)) \le y$ egyenlőtlenség közvetlen folyománya az $\tilde{f}$ függvény definíciójának. Ui. $\tilde{f}(\varphi_f(y)) = \inf X_y$, ahol

$$X_y := \{s > 0 : \varphi_f(s) \le \varphi_f(y)\}.$$

Világos, hogy $y \in X_y$, így valóban igaz, hogy $\tilde{f}(\varphi_f(y)) \le y$.

Hasonlóan, $\tilde{f}(t) = \inf\{s > 0 : \varphi_f(s) \le t\}$ és az infimum tulajdonságai miatt egy alkalmas

$$s_n \ge \tilde{f}(t) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozattal $\varphi_f(s_n) \le t$ $(n \in \mathbf{N})$ és $\tilde{f}(t) = \lim_{n\to\infty} s_n$. Ezért a φ_f függvény jobb oldali folytonossága (ld. 3.7.1. Tétel) alapján

$$\varphi_f(\tilde{f}(t)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(s_n \le t.$$

A 2° állítást illetően emlékeztetünk a 3.7.2. Tételre, miszerint $\varphi_g \le \varphi_f$. Tehát tetszőleges $t \ge 0$ helyen

$$\{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \subset \{y > 0 : \varphi_g(y) \le t\},$$

és így

$$\tilde{g}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \le \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} = \tilde{f}(t),$$

ami a 2°-beli állítás.

A 3° igazolásához vegyük észre, hogy

$$\varphi_{|f|}(y) = \mu(\{|f| > y\}) = \varphi_f(y) \qquad (y > 0),$$

amiből

$$\{y > 0 : \varphi_{|f|}(y) \le t\} = \{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \qquad (t \ge 0),$$

azaz az $\tilde{f}$ definíciója alapján az $\widetilde{|f|}(t) = \tilde{f}(t)$ egyenlőség azonnal következik.

Lássuk most be a 4° egyenlőséget. Ha itt $c \ne 0$, akkor (ld. 3.7.2. Tétel)

$$\varphi_{cf}(y) = \varphi_f(y/|c|) \qquad (y \ge 0).$$

Ezért

$$\tilde{f}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_{cf}(y) \le t\} = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y/|c|) \le t\} =$$
$$|c|\cdot \inf\{y/|c| > 0 : \varphi_f(y/|c|) \le t\} = |c|\cdot \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \le t\} = |c|\cdot \tilde{f}(t) \qquad (t \ge 0).$$

Ha viszont $c = 0$, akkor nyilván $\varphi_{cf} \equiv 0$, és így

$$\widetilde{cf}(t) = \inf\{y > 0 : 0 \le t\} = \inf(0, +\infty) = 0 = c\cdot \tilde{f}(t) \qquad (t \ge 0).$$

Az 5° bizonyításához legyen $t, \tau \ge 0$, és vezessük be az alábbi halmazokat:

$$A_t := \{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\},\ B_\tau := \{z > 0 : \varphi_g(z) \le \tau\}.$$

A 3.7.2. Tétel szerint

$$\varphi_{f+g}(y + z) \le \varphi_f(y) + \varphi_g(z) \qquad (y, z \ge 0),$$

ezért – A_t, $B_\tau \ne \emptyset$ esetén – tetszőleges $y \in A_t$, $z \in B_\tau$ választással

$$y + z \in \{s > 0 : \varphi_{f+g}(s) \le t + \tau\}.$$

Innen az következik, hogy

$$\tilde{F}(t + \tau) = \inf\{s > 0 : \varphi_{f+g}(s) \le t + \tau\} \le y + z.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $y \in A_t$, $z \in B_\tau$ esetén fennáll, így

$$\tilde{F}(t+\tau) \le \inf A_t + \inf B_\tau = \tilde{f}(t) + \tilde{g}(\tau)$$

is igaz.

Ha itt valamilyen $t \ge 0$ (vagy $\tau \ge 0$) helyen $A_t = \emptyset$ (vagy $B_\tau = \emptyset$), akkor $\tilde{f}(t) = +\infty$ (vagy $\tilde{g}(\tau) = +\infty$), és az 5°-beli állítás triviálisan igaz.

A 6° az előbbiekhez hasonlóan bizonyítható be. Ha $t, \tau \ge 0$, akkor a feltételek szerint $\tilde{f}(t)$, $\tilde{g}(\tau) < +\infty$, ezért a fenti A_t, B_τ halmazok egyike sem üres. A 3.7.2. Tétel miatt

$$\varphi_{fg}(yz) \le \varphi_f(y) + \varphi_g(z) \qquad (y, z \ge 0).$$

Ezért bármilyen $y \in A_t$, $z \in B_\tau$ mellett

$$yz \in \{s > 0 : \varphi_{fg}(s) \le t + \tau\},$$

hiszen az ellenkező esetben a lehetetlen

$$t + \tau < \varphi_{fg}(yz) \le \varphi_f(y) + \varphi_g(z) \le t + \tau$$

egyenlőtlenségeknek kellene teljesülni. Tehát

$$\tilde{G}(t+\tau) = \inf\{s > 0 : \varphi_{fg}(s) \le t + \tau\} \le yz$$

következik, és így

$$\tilde{G}(t+\tau) \le \inf A_t \cdot \inf B_\tau = \tilde{f}(t) \cdot \tilde{g}(\tau).$$

Most lássuk be a 7° állítást. Az $|f_n| \le |f_{n+1}| \le |f|$ μ-m.m. $(n \in \mathbf{N})$ feltétel és $2^o, 3^o$ miatt az $(\widetilde{f_n})$ sorozat is monoton növekedő, és

$$h := \lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n} \le \tilde{f}.$$

Tehát $h \le \tilde{f}$, speciálisan $t \ge 0$, $h(t) = +\infty$ esetén $h(t) = \tilde{f}(t) = +\infty$. Legyen $n \in \mathbf{N}$, ekkor $\widetilde{f_n} \le h$, és az eloszlásfüggvény monoton fogyása (ld. 3.7.1. Tétel) miatt a $t \ge 0$, $h(t) < +\infty$ pontokban (ld. 1°)

$$\varphi_{f_n}(h(t)) \le \varphi_{f_n}(\widetilde{f_n}(t)) \le t.$$

A 3.7.2. Tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{f_n}(h(t)) = \varphi_f(h(t)),$$

ezért $\varphi_f(h(t)) \le t$, következésképpen

$$h(t) \in \{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \qquad (t > 0,\ h(t) < +\infty).$$

Így

$$\tilde{f}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y) \le t\} \le h(t) \qquad (t > 0,\ h(t) < +\infty).$$

Más szóval $\tilde{f} \le h$ is igaz, tehát a fenti $h \le \tilde{f}$ becslést is figyelembe véve $\tilde{f} = h$.

A 8° az előzőhöz hasonlóan „intézhető" el.

Végül a 9° egyenlőséget látjuk be. Ha $0 < p < +\infty$ és $y > 0$, akkor

$$\varphi_{|f|^p}(y) = \mu(\{|f|^p > y\}) = \mu(\{|f| > y^{1/p}\}) = \varphi_f(y^{1/p}).$$

Ezért tetszőleges $t \ge 0$ helyen

$$\widetilde{|f|^p}(t) = \inf\{y > 0 : \varphi_{|f|^p}(y) \le t\} = \inf\{y > 0 : \varphi_f(y^{1/p}) \le t\} =$$

$$\inf\{z^p > 0 : \varphi_f(z) \le t\} = \Big(\inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \le t\}\Big)^p = (\tilde{f}(t))^p.$$

■

3.8. Megjegyzések

i) Tekintsük pl. valamilyen $1 \le p \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < +\infty$ esetén (ld. 2.7.1.) az $(\mathbf{R}^p, \hat{\Omega}_p, \hat{\mu}_p)$ Lebesgue-féle mértékteret, és az

$$f(x) := \frac{1}{1 + \|x\|_2^\alpha} \qquad (x \in \mathbf{R}^p)$$

függvényt. Világos, hogy $y \ge 1$ mellett $\{|f| > y\} = \emptyset$, míg ha $0 < y < 1$, akkor

$$\{|f| > y\} = \{x \in \mathbf{R}^p : \|x\|_2 < (1/y - 1)^{1/\alpha}\}.$$

Ha tehát $0 < y < 1$ és $r := (1/y - 1)^{1/\alpha}$, akkor $\{|f| > y\} = K_r(0) = r \cdot K_1(0)$, következésképpen (ld. 2.7.2.1. Tétel)

$$\hat{\mu}_p(\{|f| > y\}) = r^p \cdot \hat{\mu}_p(K_1(0)) = r^p \cdot V_p(1).$$

Így azt mondhatjuk, hogy

$$\varphi_f(y) = \begin{cases} 0 & (y \ge 1) \\ V_p(1) \cdot \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{p/\alpha} & (0 < y < 1). \end{cases}$$

Innen az is rögtön adódik, hogy

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{(t/V_p(1))^{\alpha/p} + 1} \qquad (t \ge 0).$$

ii) Ha az előző megjegyzésbeli $(\mathbf{R}^p, \hat{\Omega}_p, \hat{\mu}_p)$ Lebesgue-tér esetén most

$$f(x) := 1 - e^{-\|x\|_2^2} \qquad (x \in \mathbf{R}^p),$$

akkor rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$\varphi_f(y) = \begin{cases} 0 & (y \geq 1) \\ \\ +\infty & (0 < y < 1). \end{cases}$$

Ezért $\tilde{f} \equiv 1$.

iii) Gondoljuk meg, hogy $\tilde{f}(0) = \|f\|_\infty$. Valóban, ha $0 < \|f\|_\infty < +\infty$, akkor a $\|\cdot\|_\infty$ definíciója (ld. 3.5.) miatt

$$\varphi_f(\|f\|_\infty) = \mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

Ezért $\|f\|_\infty \in \{z > 0 : \varphi_f(z) \leq 0\} = \{z > 0 : \varphi_f(z) = 0\}$, és így

$$\tilde{f}(0) = \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq 0\} \leq \|f\|_\infty.$$

Legyen továbbá $z > 0$ olyan, hogy $\varphi_f(z) = \mu(\{|f| > z\}) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $|f| \leq z$ μ-m.m., tehát $\|f\|_\infty \leq z$. Következésképpen

$$\|f\|_\infty \leq \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) = 0\} = \tilde{f}(0).$$

iv) A 3.7.3. Tételbeli jelölésekkel legyen valamilyen $t > 0$ helyen

$$y := \tilde{f}(t) = \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\} < +\infty.$$

Az infimum tulajdonságai alapján tehát egy alkalmas $z_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$y \leq z_n, \ \varphi_f(z_n) \leq t \ \ (n \in \mathbf{N}), \ \lim_{n\to\infty} z_n = y.$$

Mivel (ld. 3.7.1. Tétel) a φ_f eloszlásfüggvény monoton fogyó és jobbról folytonos, ezért egyrészt

$$\varphi_f(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_f(z_n) \leq t.$$

Másrészt $\varphi_f(y) < t$ esetén tetszőleges $\varphi_f(y) < \tau < t$ helyeken (ld. 3.7.3. Tétel)

$$y \geq \tilde{f}(\varphi_f(y)) \geq \tilde{f}(\tau) \geq \tilde{f}(t) = y,$$

ezért $\tilde{f}(\tau) = \tilde{f}(t) = y$. Következésképpen ekkor az $\tilde{f}$ függvény a t-ben balról is folytonos, röviden: folytonos a t-ben. Ez azt jelenti, hogy amennyiben az $\tilde{f}$ nem folytonos a t-ben, akkor

$$y = \tilde{f}(t) \implies \varphi_f(y) = t.$$

Megjegyezzük, hogy ebből a szempontból az $\tilde{f} \notin C\{t\}$ diszkontinuitási feltétel lényeges, hiszen a 3.7.3. Tétel előtt szereplő $\tilde{f}$ függvényre (pl.) $\tilde{f} \in C\{1/2\}$, de $\tilde{f}(1/2) = 2$ és $\varphi_f(2) = 0$. (Ugyanakkor pl. $\tilde{f}(1) = 1$ és $\varphi_f(1) = 1$, vagy $\tilde{f}(2) = 0$ és $\varphi_f(0) = 2$, ahol $\tilde{f} \notin C\{1, 2\}$.)

v) A iv) megjegyzéshez hasonlóan (az ottani jelölésekkel) mutassuk meg, hogy amennyiben $0 < y, t < +\infty$, akkor $\varphi_f \notin C\{y\}$ esetén

$$t = \varphi_f(y) \implies \tilde{f}(t) = y.$$

Ha ui. $t = \varphi_f(y)$, akkor (ld. 3.7.4. Tétel) $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(\varphi_f(y)) \leq y$. Tegyük fel, hogy itt $\tilde{f}(\varphi_f(y)) < y$. Vegyük figyelembe, hogy ezért

$$\tilde{f}(\varphi_f(y)) = \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq \varphi_f(y)\}$$

alapján van olyan $\tilde{f}(\varphi_f(y)) \leq z < y$, hogy

$$\varphi_f(z) \leq \varphi_f(y).$$

Viszont a φ_f függvény monoton fogyása miatt $\varphi_f(z) \geq \varphi_f(y)$. Más szóval igaz a $\varphi_f(z) = \varphi_f(y)$ egyenlőség, és így minden $z \leq \xi \leq y$ helyen is $\varphi_f(\xi) = \varphi_f(y)$. Tudjuk (ld. 3.7.1. Tétel), hogy a φ_f jobbról folytonos, ezért az utóbbi egyenlőségből $\varphi_f \in C\{y\}$ következik. Ez nyilván ellentmond a kiindulási $\varphi_f \notin C\{y\}$ feltételnek, és így $\tilde{f}(\varphi_f(y)) = y$.

vi) Folytatva az $\tilde{f}, \varphi_f$ függvényeknek az előző megjegyzésekben elkezdett vizsgálatát, lássuk most be azt, hogy (az eddigi jelölésekkel) tetszőleges $0 \leq y, t < +\infty$ esetén az alábbi ekvivalencia igaz:

$$\tilde{f}(t) > y \iff t < \varphi_f(y).$$

Ha ui. $y < \tilde{f}(t)$, akkor az $X_t := \{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\}$ jelöléssel $\tilde{f}(t) = \inf X_t$ miatt $y \notin X_t$. Ezért $\varphi_f(y) > t$.

Fordítva, ha most abból indulunk ki, hogy $t < \varphi_f(y)$ és (indirekt módon gondolkodva) $\tilde{f}(t) \leq y$, akkor a φ_f monoton fogyása alapján (ld. 3.7.4. Tétel)

$$\varphi_f(y) \leq \varphi_f(\tilde{f}(t)) \leq t,$$

ami nem igaz.

vii) Részben az előbbi megjegyzésben szereplő ekvivalenciára támaszkodva belátjuk, hogy bármilyen $0 < q < +\infty$ kitevővel

$$\sup_{t>0} \left(t^q \cdot \tilde{f}(t)\right) = \sup_{y>0} \left(y \cdot \varphi_f(y)^q\right).$$

Ehhez tegyük fel először azt, hogy $\varphi_f(y) < +\infty \quad (y \geq 0)$. Legyen ekkor $y > 0$ olyan, hogy $\varphi_f(y) > 0$, és válasszuk a $0 < \varepsilon < y$ számot úgy, hogy $\varphi_f(y) - \varepsilon > 0$. A $t := \varphi_f(y) - \varepsilon$ jelöléssel a iv)-beli ekvivalencia szerint a nyilvánvaló $t < \varphi_f(y)$ egyenlőtlenség miatt

$$\tilde{f}(\varphi_f(y) - \varepsilon) > y.$$

Következésképpen

$$\sup_{\tau>0}\Big(\tau^q\cdot\tilde f(\tau)\Big)\ge(\varphi_f(y)-\varepsilon)^q\cdot\tilde f(\varphi_f(y)-\varepsilon)>y\cdot(\varphi_f(y)-\varepsilon)^q.$$

Ha itt $\varepsilon\to 0$, akkor $\sup_{\tau>0}\Big(\tau^q\cdot\tilde f(\tau)\Big)\ge y\cdot\varphi_f(y)^q$, és így

$$\sup_{\tau>0}\Big(\tau^q\cdot\tilde f(\tau)\Big)\ge\sup_{y>0,\varphi_f(y)>0}\Big(y\cdot\varphi_f(y)^q\Big)=\sup_{y>0}\Big(y\cdot\varphi_f(y)^q\Big)$$

adódik.

Most tegyük fel azt, hogy $\tilde f(t)<+\infty$ $(t\ge 0)$, és egy $t>0$, $\tilde f(t)>0$ esetén legyen $0<\varepsilon<\tilde f(t)$. Ekkor iv) szerint az $y:=\tilde f(t)-\varepsilon$ szereposztással (lévén $y<\tilde f(t)$)

$$\varphi_f(\tilde f(t)-\varepsilon)>t.$$

Tehát az előbbiekhez hasonlóan

$$\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)\ge(\tilde f(t)-\varepsilon)\cdot\varphi_f(\tilde f(t)-\varepsilon)^q>t^q\cdot(\tilde f(t)-\varepsilon),$$

és $\varepsilon\to 0$ után $\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)\ge t^q\cdot\tilde f(t)$. Ezért

$$\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)\ge\sup_{t>0,\tilde f(t)>0}\Big(t^q\cdot\tilde f(t)\Big)=\sup_{t>0}\Big(t^q\cdot\tilde f(t)\Big).$$

Amennyiben az $\tilde f(t),\varphi_f(y)<+\infty$ $(t,y\ge 0)$ feltételek valamelyike nem teljesül, akkor a következőket mondhatjuk. Ha valamilyen $t>0$ esetén $\tilde f(t)=+\infty$, akkor nyilván

$$\sup_{\tau>0}\Big(\tau^q\cdot\tilde f(\tau)\Big)=+\infty.$$

Mivel ekkor

$$+\infty=\tilde f(t)=\inf\{z>0:\varphi_f(z)\le t\},$$

így minden $z>0$ mellett $\varphi_f(z)>t$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)\ge\sup_{z>0}(zt^q)=+\infty,$$

tehát $\sup_{\tau>0}\Big(\tau^q\cdot\tilde f(\tau)\Big)=\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)=+\infty$.

Hasonlóan, ha létezik olyan $y>0$, hogy $\varphi_f(y)=+\infty$, akkor egyrészt

$$\sup_{z>0}\Big(z\cdot\varphi_f(z)^q\Big)=+\infty,$$

másrészt bármelyik $t > 0$ számra

$$\tilde{f}(t) = \inf\{z > 0 : \varphi_f(z) \leq t\} \geq y.$$

Ha ui. valamilyen $t > 0$ mellett $\tilde{f}(t) < y$ teljesülne, akkor egyúttal egy alkalmas $\tilde{f}(t) \leq \xi < y$ helyen $\varphi_f(\xi) \leq t$ is fennállna. Ekkor viszont a φ_f monotonitására tekintettel $\varphi_f(\xi) \geq \varphi_f(y) = +\infty$, más szóval $\varphi_f(\xi) = +\infty$, ami nem igaz. Tehát

$$\sup_{t>0}\left(t^q \cdot \tilde{f}(t)\right) \geq \sup_{t>0}(t^q y) = +\infty,$$

ezért ismét csak $\sup_{\tau>0}\left(\tau^q \cdot \tilde{f}(\tau)\right) = \sup_{z>0}\left(z \cdot \varphi_f(z)^q\right) = +\infty$.

3.9. Konvergencia

Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz, $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és $\mu : X \to [0, +\infty]$ mérték esetén tekintsük (egyúttal a későbbiekben is) az (X, Ω, μ) mértékteret. Az eddigiekben is volt már szó a valamilyen mérhető $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat konvergenciájáról. Ez utóbbin vagy az ún. *pontonkénti konvergenciát* értettük, amikor is minden (vagy μ-m.m.) $x \in X$ helyen a helyettesítési értékekből álló $(f_n(x))$ (szám)sorozat konvergens. Ugyanakkor fontos állítások az (f_n) sorozat *normában való konvergenciájával* voltak kapcsolatosak, ahol normán adott $0 < p \leq +\infty$ mellett a $\|\cdot\|_p$ normát (vagy kvázinormát) értettük. A továbbiakban a most említetteket kibővítve a konvergencia további lehetséges értelmezéseivel, jellemzésével foglalkozunk.

3.9.1. Konvergencia normában, majdnem mindenütt

Ha $1 \leq p \leq +\infty$ és $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az (f_n) függvénysorozatot $\|\cdot\|_p$*-ban konvergensnek* neveztük, ha alkalmas $f \in L^p$ függvénnyel

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Ha $g \in L^p$ és $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_p = 0$ is igaz, akkor

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\|f - g\|_p = 0$, azaz (ld. 3.5.) $f = g$ μ-m.m. Következésképpen a fenti f, az (f_n) függvénysorozat $\|\cdot\|_p$*-ban vett határfüggvénye* μ-m.m. értelemben egyértelműen létezik. Tudjuk (ld. 3.5.6. Tétel), hogy mindez azzal ekvivalens, hogy teljesül az

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

Cauchy-feltétel.

A mérhető $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat *μ-majdnem mindenütt* (μ-m.m.) konvergál az $f : X \to \mathbf{R}$ függvényhez, ha egy alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal $\mu(A) = 0$, és

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X \setminus A).$$

A valós számsorozatokra vonatkozó elemi Cauchy-kritérium szerint ez azzal ekvivalens, hogy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \qquad (x \in X \setminus A,\ n, m \to \infty).$$

Az itt szereplő f *μ-m.m. értelemben vett határfüggvény* „lényegében" egyértelműen létezik: ha valamilyen $g : X \to \mathbf{R}$ függvénnyel és $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X \setminus B)$$

is teljesül, akkor nyilván $f(x) = g(x)$ $(X\setminus(A\cup B))$, ahol $\mu(A\cup B) = 0$. Tehát $f = g$ μ-m.m.

Az előbbi μ-m.m. értelemben vett határfüggvényről feltehető, hogy mérhető, hiszen az értelmezés szerint pl. (ld. 3.1.) egy alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (f_n(x) \cdot \chi_{X\setminus A}) \qquad (x \in X)$$

függvény ilyen.

A 3.5.7. Tétel b) részének a bizonyítására gondolva a következő állítást kapjuk:

3.9.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $1 \le p \le +\infty$, és az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat $\|\cdot\|_p$-ban konvergál az $f \in L^p$ függvényhez. Ekkor van olyan (n_k) indexsorozat, hogy az (f_{n_k}) részsorozat μ-m.m. konvergál az f-hez.*

Jegyezzük meg, hogy ha a 3.8.1.1. Tételben $p = +\infty$, más szóval az $f_n \in L^\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|\cdot\|_\infty$ normában konvergál az $f \in L^\infty$ függvényhez, akkor a szóban forgó tételben $n_k = k$ $(k \in \mathbf{N})$ is írható:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad (x \in X \setminus A)$$

(alkalmas $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ mellett). Ekkor ui.

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_\infty = 0$$

miatt bármilyen $0 < j \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $N_j \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\|f - f_k\|_\infty < \frac{1}{j} \qquad (N_j \le k \in \mathbf{N}).$$

Tehát valamilyen $A_{jk} \in \Omega$, $\mu(A_{jk}) = 0$ $(N_j \le k \in \mathbf{N})$ halmazzal

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{j} \qquad (x \in X \setminus A_{jk},\ N_j \le k \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=N_j}^{\infty} A_{jk},$$

akkor $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor a $0 < j \in \mathbf{N}$ indexet az $1/j < \varepsilon$ becslésnek megfelelően választva $x \in X \setminus A$ esetén egyúttal $x \in X \setminus A_{jk}$ $(N_j \le k \in \mathbf{N})$, így

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{j} < \varepsilon \qquad (N_j \le k \in \mathbf{N}).$$

Tehát $\lim_{k\to\infty} |f(x) - f_k(x)| = 0$ $\qquad (x \in X \setminus A)$.

Mindezek azonban $p < +\infty$ esetén nem igazak, azaz ekkor egy $\|\cdot\|_p$-ban konvergens sorozat nem feltétlenül konvergens μ-m.m. is. Legyen ti. (ld. 2.7.1.) $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$, és az

$$I_n := \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right) \qquad (n = 2^k + j \ \ (k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1))$$

jelöléssel $f_n := \chi_{I_n}$. Ekkor minden $1 \le p < +\infty$ kitevőre $\|f_n\|_p = 2^{-k/p}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, tehát $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$. Ugyanakkor az $(f_n(x))$ (szám)sorozat egyetlen $x \in [0, 1)$ mellett sem konvergens, hiszen végtelen sok $n, m \in \mathbf{N}$ indexre lesz $f_n(x) = 1$ és $f_m(x) = 0$.

3.9.2. μ-véges norma-konvergencia

A továbbiakban azt mondjuk, hogy az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ sorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint *μ-végesen konvergál* az $f \in L^p$ függvényhez, ha tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmaz esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - f_n)\cdot \chi_A\|_p = 0.$$

Ha ez az f helyett egy $g \in L^p$ függvénnyel is teljesül, akkor $\|(f - g)\cdot \chi_A\|_p = 0$, így $\chi_A(x) = 1$ $(x \in A)$ miatt $f(x) = g(x)$ (μ-m.m. $x \in A$). Speciálisan, ha a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), azaz létezik olyan

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$$

felbontás, ahol $X_k \in \Omega$, $X_k \cap X_j = \emptyset$ $(k \ne j \in \mathbf{N})$ és $\mu(X_j) < +\infty$ $(j \in \mathbf{N})$, akkor egy-egy $Y_k \subset X_k$, $\mu(Y_k) = 0$ halmazzal $f(x) = g(x)$ $(x \in X_k \setminus Y_k,\ k \in \mathbf{N})$. Ezért az

$$Y := \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k \in \Omega$$

halmazra $\mu(Y) = 0$ és $f(x) = g(x)$ $(x \in X \setminus Y)$, más szóval $f = g$ μ-m.m. Ez azt jelenti, hogy ekkor az (f_n) sorozatnak a $\|\cdot\|_p$ norma szerint vett f *μ-véges határfüggvénye* m.m. értelemben egyértelműen létezik.

Világos, hogy ha $\|f - f_n\|_p \to \infty$ $(n \to \infty)$, azaz az (f_n) sorozat a $\|\cdot\|_p$ normában konvergál az f-hez, akkor az (f_n) a $\|\cdot\|_p$ norma szerint μ-végesen is konvergál az f-hez. Ui. ekkor bármilyen $A \in \Omega$ halmazzal

$$\|(f - f_n)\cdot \chi_A\|_p \le \|f - f_n\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha a μ véges, azaz $\mu(X) < +\infty$, akkor a $\|\cdot\|_p$ norma szerinti konvergencia és a μ-véges konvergencia nyilván ekvivalens, hiszen ekkor

$$\|(f - f_n)\cdot \chi_X\|_p = \|f_n - f\|_p \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor (ld. 2.7.1.) az $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ esetben az

$$f_n := \chi_{[n,n+1)} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat a $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < +\infty)$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \equiv 0$ függvényhez, míg

$$\|f_n - f_m\|_p = 2^{1/p} \qquad (m, n \in \mathbf{N},\ m \ne n)$$

miatt (ld. 3.5.7. Tétel) nem konvergens a $\|\cdot\|_p$ normában. Valóban, az állítás első feléhez annyit kell csupán megjegyezni, hogy $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ esetén a $p < +\infty$ kitevőkre

$$\|f_n\cdot \chi_A\|_p^p = \mu(A \cap [n, n+1)) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és

$$\mu(A \cap [0, +\infty)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap [n, n+1)) \le \mu(A) < +\infty$$

alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [n, n+1)) = 0,$$

így $\lim_{n\to\infty} \|f_n\cdot \chi_A\|_p = 0$: az (f_n) sorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \equiv 0$ függvényhez.

Világos, hogy itt lényeges a $p < +\infty$ feltétel. Ha ui.

$$A := \bigcup_{k=0}^{\infty} [k, k + 2^{-k-1}),$$

akkor $\mu(A) = \hat{\mu}_1(A) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} < +\infty$, de

$$\|f_n\cdot \chi_A\|_\infty = \|\chi_{A\cap[n,n+1)}\|_\infty = \|\chi_{[n,n+2^{-n-1})}\|_\infty = 1 \not\to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért a $p = +\infty$ esetben legyen (ld. 2.4. ii) megjegyzés) az (X, Ω, μ) mértéktér a következő: $X := \mathbf{R}$, $A \in \Omega \iff A$ vagy $\mathbf{R} \setminus A$ legfeljebb megszámlálható, és

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ legfeljebb megszámlálható}) \\ \\ +\infty & (\mathbf{R} \setminus A \text{ legfeljebb megszámlálható}) \end{cases} \qquad (A \in \Omega).$$

Ekkor az $f_n \equiv 1$ $(n \in \mathbf{N})$ (nyilván L^∞-beli) függvényekből álló sorozat a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \equiv 0$ függvényhez. Ti. tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra egyúttal $\mu(A) = 0$, így $f_n \cdot \chi_A = 0$ μ-m.m., azaz $\|f_n \cdot \chi_A\|_\infty = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Ugyanakkor $\|f_n\|_\infty = 1$ $(n \in \mathbf{N})$.

Tegyük fel, hogy az előbbi értelemben az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \in L^p$ függvényhez. Ha $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$, akkor a 3.5.7. Tétel bizonyítására gondolva a következőt kapjuk: alkalmas (n_k) indexsorozattal

$$f = \lim_{k\to\infty}(f_{n_k} \cdot \chi_A) \quad \mu\text{-m.m.}$$

Amennyiben a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), akkor

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k,$$

ahol a mérhető X_k $(k \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és valamennyien véges mértékűek. Ezért a fentiek szerint van az (f_n) sorozatnak olyan $(f_n^{(0)})$ részsorozata, hogy egy alkalmas $Y_0 \subset X_0$ halmazzal $\mu(Y_0) = 0$ és

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(x) \quad (x \in X_0 \setminus Y_0).$$

Mivel az $(f_n^{(0)})$ részsorozat is a $\|\cdot\|_p$ norma szerint nyilván μ-végesen konvergál az f-hez, így hasonlóan az előbbiekhez, az $(f_n^{(0)})$-nak van olyan $(f_n^{(1)})$ résszorozata, hogy valamilyen $Y_1 \subset X_1$, $\mu(Y_1) = 0$ halmazzal

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x) \quad (x \in X_1 \setminus Y_1).$$

Ezt az eljárást folytatva (ld. teljes indukció) kapjuk az $(f_n^{(k)})$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozatnak egy olyan $(f_n^{(k+1)})$ részsorozatát, amire egy $Y_{k+1} \subset X_{k+1}$ halmazzal

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k+1)}(x) \quad (x \in X_{k+1} \setminus Y_{k+1}).$$

Az „átlós" $(f_n^{(n)})$ sorozat minden $k \in \mathbf{N}$ indexre (véges sok tagtól eltekintve) részsorozata az $(f_n^{(k)})$-nak, következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x) = f(x) \quad (x \in X_k \setminus Y_k).$$

Ha tehát

$$Y := \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k,$$

akkor $Y \in \Omega$, $\mu(Y) = 0$, és minden $x \in X \setminus Y$ elemre valamilyen $k \in \mathbf{N}$ indexszel $x \in X \setminus Y_k$. Ezért

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(x) \quad (x \in X \setminus Y),$$

azaz $f = \lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}$ μ-m.m.

Ezzel beláttuk, hogy igaz a

3.9.2.1. Tétel. *Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér esetén legyen $1 \le p \le +\infty$, és tegyük fel, hogy az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \in L^p$ függvényhez. Ekkor:*

a) *bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra az (f_n) valamilyen (f_{n_k}) részsorozata az A halmazon μ-m.m. konvergál az f-hez: létezik olyan $Y \in \Omega$, $\mu(Y) = 0$ halmaz, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad (x \in A \setminus Y);$$

b) *ha a μ mérték szigma-véges, akkor van olyan (f_{ν_k}) részsorozat, hogy*

$$\lim_{k\to\infty}(f_{\nu_k}) = f \quad \mu\text{-m.m.}$$

Gondoljuk meg, hogy ha a 3.8.2.1. Tételben $p = +\infty$, azaz az $f_n \in L^\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \in L^\infty$ függvényhez, akkor az említett tételben tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra $n_k = k$ $(k \in \mathbf{N})$ is írható:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad (x \in A \setminus Y)$$

(alkalmas $Y \in \Omega$, $\mu(Y) = 0$ mellett). Valóban, (a 3.8.1.1. Tétel után mondottakkal analóg módon) ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \|(f - f_k)\cdot \chi_A\|_\infty = 0$$

miatt bármilyen $0 < j \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $N_j \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\|(f - f_k)\cdot \chi_A\|_\infty < \frac{1}{j} \qquad (N_j \le k \in \mathbf{N}).$$

Más szóval valamilyen $Y_{jk} \in \Omega$, $\mu(Y_{jk}) = 0$ $(N_j \le k \in \mathbf{N})$ halmazzal

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{j} \qquad (x \in A \setminus Y_{jk},\ N_j \le k \in \mathbf{N}).$$

Ha itt

$$Y := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=N_j}^{\infty} Y_{jk},$$

akkor $Y \in \Omega$, $\mu(Y) = 0$. Legyen már most $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor a $0 < j \in \mathbf{N}$ megválasztható úgy, hogy $1/j < \varepsilon$. Ha $x \in A \backslash Y$, akkor egyúttal $x \in A \backslash Y_{jk}$ $(N_j \leq k \in \mathbf{N})$, miáltal

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{j} < \varepsilon \qquad (N_j \leq k \in \mathbf{N}).$$

Tehát $\lim_{k\to\infty} |f(x) - f_k(x)| = 0$ $(x \in A \backslash Y)$. Sőt, ha a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), azaz

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$$

alkalmas $X_k \in \Omega$, $X_k \cap X_j = \emptyset$ $(k \neq j \in \mathbf{N})$ halmazokkal és $\mu(X_j) < +\infty$ $(j \in \mathbf{N})$, akkor a fentiekben az (f_n) sorozat μ-m.m. konvergál az f-hez. Ti. az előbbiek szerint minden $j \in \mathbf{N}$ mellett egy alkalmas $A_j \in \Omega$, $\mu(A_j) = 0$ halmazzal

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X_j \setminus A_j).$$

Ekkor viszont az $A := \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ jelöléssel

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X \setminus A),$$

ahol $A \in \Omega$ és $\mu(A) = 0$. Speciálisan ez a helyzet, ha a μ véges.

A 3.9.2.1. Tétel nem „megfordítható", speciálisan: egy függvénysorozat μ-m.m. vett konvergenciájából általában nem következik a valamilyen $\|\cdot\|_p$-ban $(1 \leq p \leq +\infty)$ való konvergenciája. Legyen ui. pl. (ld. 2.7.1.) az

$$X := (0,1), \quad \Omega := \hat{\Omega}_1 \cap \mathcal{P}((0,1)), \quad \mu(A) := \hat{\mu}_1(A) \quad (A \in \Omega)$$

(Lebesgue-)esetben

$$f_n(x) := \begin{cases} n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & (1/n \leq x < 1) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in (0,1)$ helyen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, de

$$\|f_n\|_p = \begin{cases} n^{1-1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ n & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

így az (f_n) sorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint nem konvergens.

3.9.3. Sztohasztikus konvergencia

Tekintsük továbbra is az (X, Ω, μ) tetszőleges mértékteret (ahol – mint eddig – $X \neq \emptyset$), és tegyük fel, hogy – most az $1 \leq p < +\infty$ kitevő mellett – az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat a $\|\cdot\|_p$ norma értelmében μ-végesen konvergál az $f \in L^p$ függvényhez (ld. 3.8.2.). Ekkor minden $y > 0$, $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ esetén

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| \geq y\} \cap A) = 0.$$

Ui. a Markov-egyenlőtlenség (ld. 3.6. vii) megjegyzés) alapján

$$\mu(\{|f - f_n| \geq y\} \cap A) = \mu(\{|f - f_n| \cdot \chi_A \geq y\}) \leq$$

$$\frac{1}{y^p} \cdot \|(f - f_n) \cdot \chi_A\|_p^p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

A fentiek szerint (ld. 3.9.2.), ha a μ mérték véges, akkor az előbbiekben elhagyható a „$\cap A$" feltétel, azaz ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| \geq y\}) = 0.$$

Könnyű példát mutatni arra, hogy a most mondottak „megfordítása" nem igaz, azaz a $(*)$-ból nem következik a szóban forgó (f_n) sorozatnak a $\|\cdot\|_p$ norma szerinti μ-véges konvergenciája. Legyen ui. (ld. 2.7.1.) (X, Ω, μ) a Lebesgue-féle $(\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ mértéktér, és

$$f_n := n \cdot \chi_{(0,1/n)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy ha a mérhető $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre $f = 0$ μ-m.m., akkor a $(*)$ feltétel teljesül, de ugyanakkor

$$\|(f - f_n) \cdot \chi_{[0,1]}\|_p = \|f_n\|_p = n^{1-1/p} \geq 1 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Nem nehéz belátni, hogy ha a fentiekben az $f_n, f \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ feltétel helyett egy mérhető függvényekből álló, μ-m.m. konvergens $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat szerepel, továbbá az $f : X \to \mathbf{R}$ egy mérhető függvény, amivel minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra

$$f \cdot \chi_A = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \chi_A \quad \mu\text{-m.m.}$$

(ami – amint azt már korábban megjegyeztük – szigma-véges μ-re ugyanaz, mint az A halmazzal való „korlátozás" nélküli $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. reláció), akkor a $(*)$ továbbra is igaz marad. Ui. nyilván elegendő ezt csak véges μ esetén megmutatni (különben szűkítsük le a μ-t az $\{A \cap Y : Y \in \Omega\}$ szigma-algebrára), amihez tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ számok és egy $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozat mellett az

$$A_k := \{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

halmazokra $\mu(A_k) \geq \delta$ $(k \in \mathbf{N})$ teljesül. Ekkor (ld. 3.4. x) megjegyzés)

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu(A_k) \geq \delta.$$

Mivel a

$$D := \limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

halmaz minden egyes x pontjában az $|f_{n_i}(x) - f(x)| > \varepsilon$ becslés végtelen sok i indexre fennáll, ezért az (f_n) sorozat a D halmaz pontjaiban nem konvergálhat az f-hez. A fentiek szerint $\mu(D) > 0$, ami ellentmond az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. feltételnek.

A fentiek az alábbi értelmezést motiválják. Legyenek ti. adottak az

$$f_n,\ f : X \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

mérhető függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat *sztohasztikusan* (vagy *mértékben*) *konvergál* az f-hez, ha minden

$$y > 0,\ A \in \Omega,\ \mu(A) < +\infty$$

esetén igaz a $(*)$ egyenlőség:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| \geq y\} \cap A) = 0.$$

Ha ugyanez egy $g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényre is fennáll, akkor tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazt is véve $f \cdot \chi_A = g \cdot \chi_A$ μ-m.m. teljesül. Ehhez ui.

$$A \cap \{|f - g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{|f - g| \geq 1/k\} \cap A)$$

miatt elég azt megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ szám mellett $\mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$. Vegyük azonban észre, hogy a triviális

$$|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$$

egyenlőtlenségből adódóan

$$\{|f - g| \geq \varepsilon\} \cap A \subset (\{|f - f_n| \geq \varepsilon/2\} \cap A) \cup (\{|f_n - g| \geq \varepsilon/2\} \cap A) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért a $(*)$ alapján

$$\mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq$$

$$\mu(\{|f - f_n| \geq \varepsilon/2\} \cap A) + \mu(\{|f_n - g| \geq \varepsilon/2\} \cap A) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Speciálisan, ha a μ mérték szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), azaz megadhatók olyan $A_n \in \Omega$, $\mu(A_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazok, hogy $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, akkor a fenti f *sztohasztikus limesz* μ-m.m. értelemben egyértelműen létezik. Ekkor ui. (az eddigi jelölésekkel) alkalmas $B_n \subset A_n$, $\mu(B_n) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$f(x) = g(x) \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in A_n \setminus B_n).$$

Következésképpen az

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega$$

halmazra $\mu(A) = 0$ és $f(x) = g(x)$ $(x \in X \setminus A)$ teljesül, röviden: $f = g$ μ-m.m.

Azt mondhatjuk tehát, hogy ha a szóban forgó mérhető függvényekből álló (f_n) sorozat tetszőleges véges mértékű halmazon μ-m.m. konvergál egy mérhető függvényhez, akkor az (f_n) sztohasztikusan is konvergál ugyanahhoz a függvényhez. Könnyű példával illusztrálni azt, hogy a most kapott következtetés megfordítása nem igaz. Vegyük ehhez (ld. 2.7.1.) az $(\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ mértékteret, és az alábbi $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(2 \le n \in \mathbf{N})$ sorozatot:

$$f_{2^n+k}(x) := \begin{cases} 1 & (k/2^n \le x \le (k+1)/2^n) \\ 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus [k/2^n, (k+1)/2^n]) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R},\, 1 \le n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., 2^n - 1).$$

Ekkor az $f \equiv 0$ függvénnyel nyilván minden $y > 0$ esetén

$$\mu(\{|f - f_{2^n+k}| \ge y\}) = \mu(\{f_{2^n+k} \ge y\}) \le 2^{-n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, k = 0, ..., 2^n - 1),$$

ezért világos, hogy az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál az f-hez. Ugyanakkor a $[0,1]$ intervallum bármelyik $x \in [0,1]$ pontjában végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ indexre $f_n(x) = 1$, és így az (f_n) sorozat nem konvergál az f-hez μ-m.m.

Az előbbi példában azért az (f_n) sorozatnak az (f_{2^n}) részsorozatára igaz a $\lim_{n\to\infty} f_{2^n}(x) = 0$ $(0 \ne x \in \mathbf{R})$ egyenlőség. Az alábbi tétel azt mutatja, hogy ez nem „véletlen".

3.9.3.1. Tétel (Riesz). *Legyen $X \ne \emptyset$, az (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér, és tegyük fel, hogy a mérhető függvényekből álló $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat sztohasztikusan konvergál a mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvényhez. Ekkor*:

a) *bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmaz esetén egy alkalmas (n_k) indexsorozattal*
$$\lim_{k\to\infty}(f_{n_k} \cdot \chi_A) = f \cdot \chi_A \quad \mu\text{-m.m.};$$

b) *ha a μ mérték szigma-véges, akkor van olyan (f_{ν_k}) részsorozat, hogy*
$$\lim_{k\to\infty}(f_{\nu_k}) = f \quad \mu\text{-m.m.}$$

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához most is feltehető, hogy a μ mérték véges. Legyen az $\varepsilon_k > 0$ $(k \in \mathbf{N})$ számsorozat nullasorozat, azaz $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. A sztohasztikus konvergenciát jelentő fenti $(*)$ feltételből adódóan van olyan (n_k) indexsorozat, hogy az

$$X_k := \{|f_{n_k} - f| > \varepsilon_k\}$$

halmazokra $\mu(X_k) < 2^{-k}$ $(k \in \mathbf{N})$ igaz. Tehát egyúttal

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(X_k) < +\infty$$

is teljesül, így a minden $n \in \mathbf{N}$ esetén fennálló

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} X_k) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu(X_k)$$

becslésből $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(X_k) = 0$ alapján $\mu(\limsup_{k\to\infty} X_k) = 0$ adódik. Ha viszont

$$x \in X \setminus \limsup_{k\to\infty} X_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus X_k),$$

akkor van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy

$$x \in X \setminus X_k, \quad \text{azaz } |f_{n_k}(x) - f(x)| \le \varepsilon_k \qquad (k \in \mathbf{N},\, k \ge n).$$

Innen már triviálisan következik az, hogy $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ μ-m.m.

Ezzel az a)-t beláttuk. A b) állítás bizonyítása analóg a 3.9.3.1. Tétel b) részének a bizonyításával. ■

A következő tételből az derül ki, hogy ennél sokkal „szorosabb" a sztohasztikus és a m.m. értelemben vett konvergencia.

3.9.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az eddigi (X, Ω, μ) mértéktér szigma-véges is, az*

$$f_n,\ f : X \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények pedig valamennyien mérhetők. Ekkor az (f_n) sorozat f-hez való sztohasztikus konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy az (f_n) bármelyik részsorozatának legyen olyan részsorozata, ami μ-m.m. konvergál az f-hez.

Bizonyítás. A tétel feltételének az elégségességét illetően induljunk ki abból, hogy az (f_n) sorozat minden (f_{n_k}) részsorozatának van μ-m.m. értelemben (az f-hez konvergáló)

konvergens részsorozata. Ez maga után vonja annak a sztohasztikus konvergenciáját is. Más szóval tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmaz és $y > 0$ szám esetén a

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq y\} \cap A) \qquad (k \in \mathbf{N})$$

számsorozatnak van olyan részsorozata, ami a 0-hoz konvergál. Mivel ez minden (n_k) indexsorozatra fennáll, ezért a $\mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat szükségszerűen 0-hoz kell, hogy konvergáljon. Különben valamilyen $\delta > 0$ számmal és (f_{n_k}) részsorozattal

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq y\} \cap A) \geq \delta \qquad (k \in \mathbf{N})$$

teljesülne, következésképpen a $\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq y\} \cap A)$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozatnak nem lenne 0-hoz tartó részsorozata. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = 0,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy az (f_n) függvénysorozat sztohasztikusan tart az f-hez. (Ebből a szempontból lényegtelen volt, hogy a μ mérték szigma-véges-e vagy sem.)

A tétel szükségesség része nyilván következik a 3.9.3.2. Tételből. Ha ui. az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál az f-hez, akkor minden (f_{n_k}) részsorozat is nyilván sztohasztikusan konvergál az f-hez. Ezért a 3.9.3.2. Tétel értelmében az (f_{n_k}) sorozatnak egy alkalmas részsorozata μ-m.m. is konvergál az f-hez. ■

Mutassuk meg, hogy véges mértékek esetén a sztohasztikus konvergencia is jellemezhető egyfajta „Cauchy-tulajdonsággal". Nevezetesen igaz a

3.9.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott az (X, Ω, μ) mértéktér, ahol $X \neq \emptyset$, a μ mérték pedig véges. Legyenek továbbá az $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények mérhetők. Ekkor az alábbi ekvivalencia teljesül: az (f_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál sztohasztikusan, ha bármilyen $\varepsilon, y > 0$ számokhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy*

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq y\} < \varepsilon \qquad (N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítás. Ha az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál a mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvényhez, akkor (lévén a μ véges) minden $y > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} = 0.$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amivel

$$\mu(\{|f_n - f| \geq y\} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f_m - f|$, ezért

$$\{|f_n - f_m| \geq y\} \subset \{|f_n - f| \geq y/2\} \cup \{|f_m - f| \geq y/2\} \qquad (n, m \in \mathbf{N}),$$

így

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq y\}) \leq$$

$$\mu(\{|f_n - f| \geq y/2\}) + \mu(\{|f_m - f| \geq y/2\}) < \varepsilon \qquad (N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Ezzel a tételben szereplő Cauchy-feltétel szükségességét beláttuk. Most tegyük fel azt, hogy ez utóbbi teljesül az (f_n) sorozatra. Ekkor minden $k \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $n_k \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\mu(\{|f_m - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\}) \leq 2^{-k} \qquad (n_k \leq m \in \mathbf{N}).$$

Nyilván feltehető, hogy $n_k < n_{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$, azaz, hogy az így definiált (n_k) sorozat indexsorozat. Ha

$$B_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty,$$

következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Legyen

$$B := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k,$$

amikor is

$$\mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) = 0,$$

így $\mu(B) = 0$. Ha viszont $x \in X \setminus B$, akkor az

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k}$$

egyenlőtlenség legfeljebb véges sok $k \in \mathbf{N}$ mellett igaz. Így a

$$\sum \Big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\Big)$$

végtelen (szám)sor abszolút konvergens, és ebből kifolyólag a

$$\sum_{k=0}^{s-1} \Big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\Big) = f_{n_s}(x) - f_{n_0}(x) \qquad (s \in \mathbf{N})$$

egyenlőségre tekintettel az $\Big(f_{n_k}(x)\Big)$ (szám)sorozat konvergens. Azt kaptuk ezzel, hogy az (f_{n_k}) (függvény)sorozat μ-m.m. konvergens: a fenti $B \in \Omega$, $\mu(B) = 0$ halmazzal létezik a mérhető

$$f := \lim_{k\to\infty} (f_{n_k} \cdot \chi_{X\setminus B})$$

függvény.

Az (f_{n_k}) sorozat tehát μ-m.m., és ezért sztohasztikusan is konvergál az f-hez. Belátjuk, hogy (a „teljes") (f_n) sorozat is sztohasztikusan konvergál az f függvényhez. Legyen ehhez $y > 0$. Ekkor egyrészt az (f_{n_k}) sztohasztikus konvergenciája, másrészt a Cauchy-feltétel miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq y/2\}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(\{|f_n - f_m| \geq y/2\}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N < k, n, m \in \mathbf{N}).$$

Ezért tetszőleges $N < n, k \in \mathbf{N}$ indexekre – figyelembe véve, hogy ekkor $n_k \geq k > N$ is teljesül –

$$\mu(\{|f_n - f| \geq y\}) \leq$$

$$\mu(\{|f_n - f_{n_k}| \geq y/2\}) + \mu(\{|f_{n_k} - f| \geq y/2\}) < \varepsilon.$$

Másképpen fogalmazva $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\}) = 0$, azaz az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál az f-hez. ■

A sztohasztikus konvergencia „metrikus" jellemzéséhez vezessük be a következő jelöléseket: ha

$$\mathcal{F} := \{h : X \to \mathbf{R} : h \text{ mérhető}\},$$

akkor az $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazzal legyen

$$\rho_A(f, g) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \varepsilon\} \qquad (f,\, g \in \mathcal{F}).$$

3.9.3.4. Tétel. *A fenti jelölésekkel minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ esetén a következőket mondhatjuk:*

a) *a $\rho_A : \mathcal{F}^2 \to [0, +\infty)$ leképezés félmetrika;*

b) *az f, $g \in \mathcal{F}$ függvényekre a $\rho_A(f, g) = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = g(x)$ (μ-m.m. $x \in A$);*

c) *tetszőleges $f_n, f \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekre az (f_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál sztohasztikusan az f-hez, ha bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazzal $\lim_{n\to\infty} \rho_A(f_n, f) = 0$.*

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy minden $f, g \in \mathcal{F}$ függvényre a fenti $\rho_A(f, g)$ egy nem-negatív szám. Ugyanis az $\{|f - g| \geq n\} \cap A$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton fogyó módon tart az $\emptyset$-hoz, így $\mu(\{|f - g| \geq n\} \cap A) \leq \mu(A) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - g| \geq n\} \cap A) = 0.$$

Ezért egy alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal $\mu(\{|f-g| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \varepsilon$, amiből $\rho_A(f,g) < +\infty$ már következik.

Mivel $\{|f-f| \geq \varepsilon\} \cap A = \emptyset$ $(f \in \mathcal{F},\, \varepsilon > 0)$, ezért $\mu(\{|f-f| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0 < \varepsilon$ alapján

$$\rho_A(f,f) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(\{|f-f| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \varepsilon\} = \inf\{t \in \mathbf{R} : t > 0\} = 0.$$

A félmetrika többi axiómája közül a $\rho_A(f,g) = \rho_A(g,f)$ $(f,g \in \mathcal{F})$ szimmetria triviálisan igaz. A

$$\rho_A(f,g) \leq \rho_A(f,h) + \rho_A(h,g) \qquad (f,g,h \in \mathcal{F})$$

háromszög-egyenlőtlenséget illetően: ha az $f,g,h \in \mathcal{F}$ függvényekkel és az $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ számokkal

$$\mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \varepsilon,\ \mu(\{|h-g| \geq \delta\} \cap A) \leq \delta,$$

akkor $|f-g| \leq |f-h| + |h-g|$ miatt

$$\{|f-g| \geq \varepsilon + \delta\} \cap A) \subset (\{|f-h| \geq \varepsilon\} \cap A) \cup (\{|h-g| \geq \delta\} \cap A),$$

így

$$\mu(\{|f-g| \geq \varepsilon + \delta\} \cap A) \leq \mu((\{|f-h| \geq \varepsilon\} \cap A) \cup (\{|h-g| \geq \delta\} \cap A)) \leq$$
$$\mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\} \cap A) + \mu(\{|h-g| \geq \delta\} \cap A) \leq \varepsilon + \delta.$$

Tehát

$$\rho_A(f,g) \leq \varepsilon + \delta.$$

Ugyanakkor tetszőleges $\eta > 0$ esetén (az infimum tulajdonságai miatt) a fenti ε, δ számok megválaszthatók úgy, hogy

$$\varepsilon < \rho_A(f,h) + \eta \ \text{ és } \ \delta < \rho_A(h,g) + \eta.$$

Következésképpen

$$\rho_A(f,g) < \rho_A(f,h) + \rho_A(h,g) + 2\eta.$$

Itt az $\eta > 0$ bármelyik pozitív szám lehetett, ezért a fenti háromszög-egyenlőtlenség már adódik, amivel az a) állítást beláttuk.

A b)-beli ekvivalencia igazolásához tegyük fel először azt, hogy $f,g \in \mathcal{F}$ és $\rho_A(f,g) = 0$. Ekkor egy alkalmas monoton fogyó, nullához tartó δ_n $(n \in \mathbf{N})$ számsorozattal

$$\mu(\{|f-g| \geq \delta_n\} \cap A) \leq \delta_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az $\{|f-g| \geq \delta_n\} \cap A$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton növekedő módon tart az $\{|f-g| > 0\} \cap A$ halmazhoz, azaz

$$\{|f-g| \geq \delta_n\} \cap A \subset \{|f-g| \geq \delta_{n+1}\} \cap A \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\{|f-g|\geq\delta_n\}\cap A)=\{|f-g|>0\}\cap A,$$

ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(\{|f-g|>0\}\cap A)=\lim_{n\to\infty}\mu(\{|f-g|\geq\delta_n\}\cap A)\leq\lim_{n\to\infty}\delta_n=0.$$

Más szóval $\mu(\{|f-g|>0\}\cap A)=0$, azaz $f(x)=g(x)$ (μ-m.m. $x\in A$).

Fordítva, ha $f(x)=g(x)$ (μ-m.m. $x\in A$), akkor minden $\varepsilon>0$ szám mellett a nyilvánvaló

$$\{|f-g|\geq\varepsilon\}\cap A\subset\mu(\{|f-g|>0\}\cap A$$

tartalmazás miatt

$$\mu(\{|f-g|\geq\varepsilon\}\cap A)\leq\mu(\{|f-g|>0\}\cap A)=0<\varepsilon,$$

azaz $\rho_A(f,g)\leq\varepsilon$. Tekintve, hogy itt az $\varepsilon>0$ tetszőleges volt, ezért a $\rho_A(f,g)=0$ egyenlőség valóban igaz.

A c) állítás bizonyításához induljunk ki először abból, hogy az $f_n,f\in\mathcal{F}$ ($n\in\mathbf{N}$) függvényekkel az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál az f-hez. Ezért azt mondhatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ és $A\in\Omega$, $\mu(A)<+\infty$ mellett

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}\cap A)=0.$$

Tehát van olyan $N\in\mathbf{N}$, hogy $\mu(\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}\cap A)\leq\varepsilon$ ($N<n\in\mathbf{N}$). Ez a ρ_A definíciója alapján meg azt jelenti, hogy

$$\rho_A(f_n,f)\leq\varepsilon\qquad(N<n\in\mathbf{N}),$$

azaz azt, hogy $\lim_{n\to\infty}\rho_A(f_n,f)=0$.

Ha már most ez utóbbit tételezzük fel (tetszőleges $A\in\Omega$, $\mu(A)<+\infty$ esetén) és $y>0$, akkor bármilyen $0<\varepsilon<y$ választással egy alkalmas $N\in\mathbf{N}$ mellett

$$\rho_A(f_n,f)=\inf\{\delta>0:\mu(\{|f_n-f|\geq\delta\}\cap A)\leq\delta\}<\varepsilon\qquad(N<n\in\mathbf{N}).$$

Így az infimum értelmezését figyelembe véve van olyan $0<\delta_n<\varepsilon$, hogy

$$\mu(\{|f_n-f|\geq\delta_n\}\cap A)\leq\delta_n\qquad(N<n\in\mathbf{N}).$$

Mivel $\{|f_n-f|\geq y\}\cap A\subset\{|f_n-f|\geq\delta_n\}\cap A$, ezért egyúttal

$$\mu(\{|f_n-f|\geq y\}\cap A)\leq\mu(\{|f_n-f|\geq\delta_n\}\cap A)\leq\delta_n<\varepsilon\qquad(N<n\in\mathbf{N})$$

is igaz. Ezzel azt láttuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = 0$. ■

Legyen továbbra is $X \neq \emptyset$, az (X, Ω, μ) mértéktér tetszőleges, és az $A \in \Omega$ mérhető halmaz esetén

$$\sigma_A(f, g) := \int \frac{f - g|}{1 + |f - g|} \cdot \chi_A \, d\mu = 0 \qquad (f, g \in \mathcal{F}).$$

Világos (ld. 3.1.), hogy egyrészt az itt szereplő integrandus mérhető függvény, másrészt a nyilvánvaló

$$\frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \cdot \chi_A \leq \chi_A$$

egyenlőtlenség miatt (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\sigma_A(f, g) \leq \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) < +\infty,$$

hacsak $\mu(A) < +\infty$. Az utóbbi feltétel mellett tehát $\sigma_A : \mathcal{F}^2 \to [0, +\infty)$.

3.9.3.5. Tétel. *A fenti (X, Ω, μ) mértéktér és bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmaz esetén*

a) *a $\sigma_A : \mathcal{F}^2 \to [0, +\infty)$ leképezés félmetrika;*

b) *ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor $\sigma_A(f, g) = 0 \iff f(x) = g(x)$ (μ-m.m. $x \in A$);*

c) *tetszőleges $f_n, f \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbf{N}$) függvényekkel az (f_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál sztohasztikusan az f-hez, ha bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazzal $\lim_{n\to\infty} \sigma_A(f_n, f) = 0$.*

Bizonyítás. Az a) igazolásához először is jegyezzük meg, hogy a

$$\sigma_A(f, f) = 0, \quad \sigma_A(f, g) = \sigma_A(g, f) \qquad (f, g \in \mathcal{F})$$

egyenlőségek nyilvánvalóak. A

$$\sigma_A(f, g) \leq \sigma_A(f, h) + \sigma_A(h, g) \qquad (f, g, h \in \mathcal{F})$$

háromszög-egyenlőtlenség belátásához vegyük észre, hogy a

$$\Phi(t) := \frac{t}{1 + t} \qquad (t \geq 0)$$

függvénnyel

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} = \Phi(|f(x) - g(x)|) \qquad (x \in X).$$

A

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \qquad (t \geq 0)$$

átalakításból világos, hogy a Φ függvény monoton növekedő. Továbbá

$$\Phi(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq$$

$$\frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = \Phi(t) + \Phi(s) \qquad (t, s \geq 0).$$

Következésképpen

$$|f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \qquad (x \in X)$$

miatt

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} = \Phi(|f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|) \leq$$

$$\Phi(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leq \Phi(|f(x) - h(x)|) + \Phi(|h(x) - g(x)|) =$$

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{1 + |f(x) - h(x)|} + \frac{|h(x) - g(x)|}{1 + |h(x) - g(x)|} \qquad (x \in X).$$

Ezért a szóban forgó f, g, h függvényekre és az A halmazra egyúttal

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \cdot \chi_A \leq \frac{|f-h|}{1+|f-h|} \cdot \chi_A + \frac{|h-g|}{1+|h-g|} \cdot \chi_A$$

is igaz. Innen viszont (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\sigma_A(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \cdot \chi_A \, d\mu \leq$$

$$\int \frac{|f-h|}{1+|f-h|} \cdot \chi_A \, d\mu + \int \frac{|h-g|}{1+|h-g|} \cdot \chi_A \, d\mu = \rho_A(f,h) + \rho_A(h,g)$$

adódik.

A b) állítás bizonyításához emlékeztetünk a 3.3.2.6. Tételre, miszerint

$$\sigma_A(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \cdot \chi_A \, d\mu = 0 \iff \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \cdot \chi_A = 0 \quad \mu\text{-m.m.}$$

Mivel minden $x \in A$ helyen $\chi_A(x) = 1$, ezért az előbbiekre tekintettel a b) már következik.

Lássuk be most a c)-ben mondottakat. Induljunk ki először abból, hogy az (f_n) sorozat sztohasztikusan konvergál az f-hez: tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ és $y > 0$ esetén

$$\mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha valamilyen $\varepsilon > 0$ szám mellett

$$A_n := \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}, \;\; B_n := \{|f_n - f| < \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $A_n \cap B_n = \emptyset$, $X = A_n \cup B_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt (a fenti Φ függvény monotonitását is kihasználva)

$$\sigma_A(f_n, f) = \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_A \, d\mu =$$

$$\int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_{A \cap A_n} \, d\mu + \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_{A \cap B_n} \, d\mu \leq$$

$$\int \chi_{A \cap A_n} \, d\mu + \int \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \chi_{A \cap B_n} \, d\mu =$$

$$\mu(A \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \mu(A \cap B_n) \leq \mu(A \cap A_n) + \varepsilon \cdot \mu(A).$$

Mivel a feltételezett sztohasztikus konvergencia miatt $\lim_{n \to \infty} \mu(A \cap A_n) = 0$, ezért egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\sigma_A(f_n, f) < \varepsilon + \varepsilon \cdot \mu(A) \qquad (N < n \in \mathbf{N}),$$

így $\lim_{n \to \infty} \sigma_A(f_n, f) = 0$.

Ha most azt tesszük fel, hogy (bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazt is véve) $\lim_{n \to \infty} \sigma_A(f_n, f) = 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$ szám esetén (az előbbi jelölésekkel) a fenti

$$\sigma_A(f_n, f) = \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_A \, d\mu =$$

$$\int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_{A \cap A_n} \, d\mu + \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \cdot \chi_{A \cap B_n} \, d\mu \qquad (n \in \mathbf{N})$$

felbontás alapján (megint csak a Φ monotonitására gondolva) a

$$\sigma_A(f_n, f) \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \mu(A \cap A_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

becslést kapjuk. Innen világos, hogy

$$\mu(A \cap A_n) \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \rho_A(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

és ezért $\mu(A \cap A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, ami az (f_n) sorozatnak (az f-hez való) sztohasztikus konvergenciáját jelenti. ■

3.9.4. Gyenge konvergencia normában

Adott $X \neq \emptyset$ halmaz és az (X, Ω, μ) mértéktér esetén legyen $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$, valamint az $1 \leq p < +\infty$ „kitevő" mellett a mérhető $f,\ g : X \to \mathbf{R}$ függvényekre

$$\nu_{p,A}(f,g) := \sup\{y \cdot \mu(\{|f-g| \geq y\} \cap A)^{1/p} : y > 0\}.$$

A Markov-egyenlőtlenség (ld. 3.6. vii) megjegyzés) alapján világos, hogy

$$\nu_{p,A}(f,g) \leq \|(f-g) \cdot \chi_A\|_p.$$

Ha tehát (ld. 3.9.2.) az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint μ-végesen konvergál az $f \in L^p$ függvényhez, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{p,A}(f_n, f) = 0.$$

Mutassuk meg, hogy mindez „fordítva" nem igaz. Legyen ui. (ld. 2.7.1.)

$$X := [0,1],\ \Omega := \{A \subset [0,1] : A \in \hat{\Omega}_1\},\ \mu(A) := \hat{\mu}_1(A) \quad (A \in \Omega),$$

és adott $0 < a_n < 1$ $(n \in \mathbf{N})$ számok esetén

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x < a_n) \\ \dfrac{1}{nx} & (a_n \leq x \leq 1) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in L^1$ és (ld. 3.6. xxvii) megjegyzés)

$$\int |f_n|\, d\mu = \int_{a_n}^1 \frac{dx}{nx} = \frac{1}{n} \cdot |\ln a_n| \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy az $f \equiv 0$ függvénnyel

$$\{|f_n - f| \geq y\} = \begin{cases} \emptyset & (y > 1/(na_n)) \\ [a_n, 1/(ny)] & (1/n \leq y \leq 1/(na_n)) \\ [a_n, 1] & (0 < y \leq 1/n) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$y \cdot \mu(\{|f_n - f| \geq y\}) = \begin{cases} 0 & (y > 1/(na_n)) \\ 1/n - ya_n & (1/n \leq y \leq 1/(na_n)) \\ y - ya_n & (0 < y \leq 1/n) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\nu(f_n, f) := \nu_{1,X}(f_n, f) \le \frac{1}{n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \nu(f_n, f) = 0$, ugyanakkor

$$\liminf_{n\to\infty} (|\ln a_n|/n) > 0$$

esetén az $(\|f_n - f\|_1)$ sorozat nem tart a 0-hoz. Ez a helyzet pl. akkor, ha

$$a_n := e^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amikor is

$$\|f_n - f\|_1 = 1 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

(A most tárgyalt példa értelemszerű módosítással kiterjeszthető tetszőleges $1 \le p < +\infty$ kitevőre is.)

Mindezeket figyelembe véve azt mondjuk, hogy az $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ mérhető függvényekből álló sorozat a $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < +\infty)$ norma szerint *gyengén konvergál* a mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvényhez, ha minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazzal

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{p,A}(f_n, f) = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy ez utóbbi esetben az (f_n) sorozat sztohasztikusan is konvergál az f-hez. Ha ui. $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$, akkor tetszőleges $y > 0$ számra

$$\mu(\{|f_n - f| \ge y\} \cap A) \le \frac{\nu_{p,A}(f_n, f)^p}{y^p} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy (ld. 3.9.3.) szigma-véges μ mérték esetén az előbbi (f_n) sorozatnak a $\|\cdot\|_p$ norma szerinti f *gyenge limesze* m.m. értelemben egyértelműen létezik (és megegyezik a sztohasztikus limesszel). Ugyanakkor (ld. 2.7.1.) az $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ esetben az

$$f_n := n\cdot \chi_{(0,1/n)} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat (amint azt a 3.9. pontban már említettük) sztohasztikusan konvergál az $f \equiv 0$ függvényhez. Viszont tetszőleges $1 \le p < +\infty$ mellett

$$y\cdot \mu(\{|f_n| \ge y\})^{1/p} = \begin{cases} 0 & (y > n) \\ y\cdot n^{-1/p} & (0 < y \le n) \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\nu_{p,A}(f_n, f) = n^{1-1/p} \ge 1 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

következik. Tehát az (f_n) sorozat a $\|\cdot\|_p$ norma szerint nem konvergál gyengén az f-hez.

Legyen $0 < p < +\infty$, és az $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvény esetén

$$\|f\|_{p,*} := \sup\{y\cdot \mu(\{|f| \geq y\})^{1/p} : y > 0\}$$

az f függvény *gyenge p-normája,* továbbá

$$L^p_* := \{f : X \to \mathbf{R} : f \text{ mérhető és } \|f\|_{p,*} < +\infty\}.$$

A $\varphi_f(y) = \mu(\{|f| > y\})$ $(y \geq 0)$ eloszlásfüggvény (ld. 3.7.) felhasználásával könnyen beláthatóan azt is írhatjuk, hogy

$$\|f\|_{p,*} := \sup\{y\cdot \varphi_f(y)^{1/p} : y > 0\}.$$

Világos, hogy tetszőleges $f, g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényekre és $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra

$$\nu_{p,A}(f, g) = \|(f - g)\cdot \chi_A\|_{p,*}.$$

Ha $f \in L^p$, akkor (ld. 3.6. vii) megjegyzés) $\|f\|_{p,*} \leq \|f\|_p < +\infty$ miatt $f \in L^p_*$, ezért $L^p \subset L^p_*$. Ugyanakkor pl. (ld. 2.7.1.) az $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ (Lebesgue-)esetben az

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1/p} & (x > 0) \\ \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

függvényre (ld. 3.6. xxvii) megjegyzés)

$$\int |f|^p \, d\mu = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

miatt $f \notin L^p$. Viszont

$$\{|f| \geq y\} = (0, y^{-p}] \qquad (y > 0)$$

szerint

$$\|f\|_{p,*} = \sup\{y\cdot y^{-1} : y > 0\} = 1,$$

így $f \in L^p_*$.

Világos, hogy $f \in L^p_*$, $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$ esetén

$$\{|\lambda f| \geq y\} = \{|f| \geq y/|\lambda|\} \qquad (y > 0),$$

ezért

$$\|\lambda f\|_{p,*} = \sup\{y\cdot \mu(\{|\lambda f| \geq y\})^{1/p} : y > 0\} = \sup\{y\cdot \mu(\{|f| \geq y/|\lambda|\})^{1/p} : y > 0\} =$$

$$|\lambda|\cdot \sup\{y/|\lambda|\cdot \mu(\{|f| \geq y/|\lambda|\})^{1/p} : y > 0\} =$$

$$|\lambda|\cdot \sup\{z\cdot \mu(\{|f| \geq z\})^{1/p} : z > 0\} = |\lambda|\cdot \|f\|_{p,*},$$

tehát (a nyilvánvaló $\|0\cdot f\|_{p,*} = 0 = 0\cdot \|f\|_{p,*}$ egyenlőséggel együtt)

$$\|\lambda f\|_{p,*} = |\lambda|\cdot \|f\|_{p,*} \qquad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Ha $1 \le p < +\infty$, $f, g \in L^p_*$, akkor $|f+g| \le |f| + |g|$ miatt

$$\{|f+g| \ge y\} \subset \{|f| \ge y/2\} \cup \{|g| \ge y/2\} \qquad (y > 0),$$

és így

$$\mu(\{|f+g| \ge y\}) \le \mu(\{|f| \ge y/2\}) + \mu(\{|g| \ge y/2\}) \qquad (y > 0).$$

Innen azt kapjuk, hogy (ld. 3.6. x) megjegyzés)

$$y\cdot \mu(\{|f+g| \ge y\})^{1/p} \le y\cdot \Big(\mu(\{|f| \ge y/2\}) + \mu(\{|g| \ge y/2\})\Big)^{1/p} \le$$

$$2\cdot \Big(\frac{y}{2}\cdot \mu(\{|f| \ge y/2\})^{1/p} + \frac{y}{2}\cdot \mu(\{|g| \ge y/2\})^{1/p}\Big) \qquad (y > 0).$$

Következésképpen

$$\|f+g\|_{p,*} = \sup\{y\cdot \mu(\{|f+g| \ge y\})^{1/p} : y > 0\} \le$$

$$2\cdot \Big(\sup\{z\cdot \mu(\{|f| \ge z\})^{1/p} : z > 0\} + \sup\{z\cdot \mu(\{|g| \ge z\})^{1/p} : z > 0\}\Big) =$$

$$2\cdot (\|f\|_{p,*} + \|g\|_{p,*}).$$

Más szóval beláttuk az alábbi tételt:

3.9.4.1. Tétel. *Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér és $1 \le p < +\infty$ kitevő esetén az $(L^p_*, \|\cdot\|_{p,*})$ egy kvázi-normált tér.*

Megjegyezzük (ld. 3.10. xi) megjegyzés), hogy az $(L^p_*, \|\cdot\|_{p,*})$ tér teljes is.

3.10. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy $X \ne \emptyset$, és valamilyen (X, Ω, μ) mértéktér esetén az L^1 tér az $\|\cdot\|_1$ norma szerint szeparábilis, azaz van olyan legfeljebb megszámlálható $\mathcal{S} \subset L^1$ halmaz, ami mindenütt sűrű az L^1-ben. Ez más szóval azt jelenti, hogy tetszőleges $f \in L^1$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám mellett egy alkalmas $g \in \mathcal{S}$ függvénnyel $\|f-g\|_1 < \varepsilon$ teljesül. Elemi meggondolásokkal innen az is adódik, hogy a χ_A (ahol $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$) függvények halmaza is szeparábilis a $\|\cdot\|_1$ norma szerint. Így létezik olyan $A_n \in \Omega$ ($\mu(A_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$) halmazsorozat, hogy minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmaz és $\varepsilon > 0$ szám esetén valamilyen $m \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\|\chi_A - \chi_{A_m}\|_1 = \mu((A \setminus A_m) \cup (A_m \setminus A)) < \varepsilon.$$

Vegyük észre, hogy ez a 2.6. xiii) megjegyzésben bevezetett félmetrikus tér szeparábilitását jelenti. Éppen ezért ekkor azt mondjuk, hogy a μ mérték *szeparábilis*.

Könnyen belátható, hogy a μ szeparábilitása elégséges is ahhoz, hogy az L^1 tér a $\|\cdot\|_1$ norma szerint szeparábilis legyen. Ha ui. az $A_n \in \Omega \quad (\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N}))$ sorozat a μ mérték szeparábilitásának a fenti definíciójában szereplő halmazsorozat, akkor a

$$\textstyle\sum_{k\in\mathcal{N}} \alpha_k \cdot \chi_{A_k} \quad (\mathcal{N} \subset \mathbf{N} \text{ véges}, \ \alpha_k \in \mathbf{Q} \ \ (k \in \mathcal{N}))$$

alakú függvények (nyilván legfeljebb megszámlálható) halmazáról nem nehéz megmutatni, hogy mindenütt sűrű az L^1 térben a $\|\cdot\|_1$ norma szerint. Ui. (ld. 3.6. xviii) megjegyzés) tetszőleges $f \in L^1$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan

$$\varphi := \sum_{k\in\mathcal{N}} \beta_k \cdot \chi_{A_k} \in L_0 \cap L^1$$

lépcsősfüggvény (ahol tehát az $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmaz véges, $0 \neq \beta_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathcal{N})$), hogy $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Ha tehát (egyelőre) tetszőleges $\alpha_k \in \mathbf{Q} \quad (k \in \mathcal{N})$ racionális számokkal

$$\Phi := \sum_{k\in\mathcal{N}} \alpha_k \cdot \chi_{A_k},$$

akkor

$$\|\varphi - \Phi\|_1 \leq \sum_{k\in\mathcal{N}} |\alpha_k - \beta_k| \cdot \|\chi_{A_k}\|_1 = \sum_{k\in\mathcal{N}} |\alpha_k - \beta_k| \cdot \mu(A_k) \leq$$

$$\max\{|\alpha_k - \beta_k| : k \in \mathcal{N}\} \cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} \mu(A_k).$$

Mivel $\varphi \in L^1$ miatt minden itt szereplő $A_k \quad (k \in \mathcal{N})$ halmaz mértéke véges, ezért $\delta := \sum_{k\in\mathcal{N}} \mu(A_k) < +\infty$. Világos, hogy az α_k-k megválaszthatók úgy, hogy

$$\delta \cdot \max\{|\alpha_k - \beta_k| : k \in \mathcal{N}\} < \varepsilon$$

igaz legyen, amikor is

$$\|f - \Phi\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \Phi\|_1 < 2\varepsilon.$$

ii) Tekintsük az előbbi megjegyzésbeli (X, Ω, μ) mértéktér mellett az L^2 „kvázi" euklideszi teret (ld. 3.6. iv) megjegyzés) az

$$\langle f, g \rangle := \sqrt{\int f g \, d\mu} \qquad (f, g \in L^2)$$

(kvázi) skaláris szorzással. Legyen adott egy $\mathcal{R} := (f_n \in L^2, n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{R}$ *ortonormált rendszer*, ha

$$\langle f_n, f_k \rangle = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Azt mondjuk továbbá, hogy az $\mathcal{R}$ rendszer *teljes*, ha a $g \in L^2$ függvénnyel minden $\mathbf{N} \ni n$-re a $\langle g, f_n \rangle = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $g = 0$ μ-m.m.

Nem nehéz belátni, hogy ha a μ mérték *nem atomos* – azaz tetszőlegesen választott $A \in \Omega$, $\mu(A) > 0$ halmazhoz megadható az A-nak olyan mérhető $B \subset A$ részhalmaza, hogy $0 < \mu B) < \mu(A)$, – és az L^2-ben van teljes ortonormált rendszer, akkor a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció). Valóban, legyen a $q > 0$ számmal

$$A_{n,q} := \{|f_n| > q\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor (ld. 3.1) $A_{n,q} \in \Omega$. Mivel (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$1 = \langle f, f \rangle = \int f_n^2 \, d\mu \geq \int f_n^2 \cdot \chi_{A_{n,q}} \, d\mu \geq$$

$$\int q^2 \cdot \chi_{A_{n,q}} \, d\mu = q^2 \cdot \mu(A_{n,q}) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért minden $q > 0$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén $\mu(A_{n,q}) < +\infty$. Az $A_{n,q}$ halmazok értelmezése miatt

$$Y := X \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,1/k} \right) = \{x \in X : f_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})\} \in \Omega.$$

Ha $\mu(Y) = +\infty$ lenne, akkor (a „nem atomosság" feltétele alapján) egy alkalmasan választott

$$Z \subset Y, \ Z \in \Omega, \ 0 < \mu(Z) < +\infty$$

halmazzal $\chi_Z \in L^2$ és $\int f_n \cdot \chi_Z \, d\mu = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ is teljesülne. Mivel az $\mathcal{R}$ rendszer teljes, ezért $\chi_Z = 0$ μ-m.m., amiből $\mu(Z) = 0$ következne, ellentmondva a pozitivitási $\mu(Z) > 0$ feltételnek.

Tehát $\mu(Y) < +\infty$, és

$$X = Y \bigcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,1/k} \right).$$

(Megjegyezzük, hogy az előbbi okfejtésből az is rögtön kiderül, hogy $\mu(Y) = 0$.) Az X-nek ebben a felbontásában szereplő valamennyi (legfeljebb megszámlálható sok) halmaz véges mértékű, következésképpen a μ szigma-véges.

iii) Lássuk be, hogy (ld. 2.7.1.) az $(X, \Omega, \mu) := (\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ Lebesgue-féle mértéktér esetén egy $f_n \in L^\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál a $\|\cdot\|_\infty$ normában az $f \in L^\infty$ függvényhez, ha a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint μ-végesen konvergál az f-hez. A 3.8. pontban mondottakra tekintettel ehhez elég már csak azt belátni, hogy a $\|\cdot\|_\infty$ normára nézve μ-véges konvergenciából következik a $\|\cdot\|_\infty$ normában vett konvergencia. Más szóval: ha az $f_n \in L^\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat a $\|\cdot\|_\infty$ normában nem konvergál az $f \in L^\infty$ függvényhez, akkor a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint μ-végesen sem konvergál az f-hez. Ekkor ui. egy alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal és valamilyen (n_k) indexsorozattal

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty > \varepsilon \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Tehát minden $k \in \mathbf{N}$ esetén létezik olyan $A_k \in \hat{\Omega}_1$ halmaz, hogy $\hat{\mu}_1(A_k) > 0$ és

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon \qquad (x \in A_k).$$

Ha $k \in \mathbf{N}$, az $I_{jk} \subset \mathbf{R}$ $(j \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt intervallumok pedig olyanok, hogy $|I_{jk}| = 2^{-k}$ $(j \in \mathbf{N})$ és

$$\mathbf{R} = \bigcup_{j=0}^{\infty} I_{jk},$$

akkor $\hat{\mu}_1(A_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\mu}_1(A_k \cap I_{jk})$ miatt van olyan $j_k \in \mathbf{N}$, hogy

$$0 < \hat{\mu}_1(A_k \cap I_{j_k k}) \leq \hat{\mu}_1(I_{j_k k}) = 2^{-k}.$$

Ha

$$A := \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap I_{j_k k}),$$

akkor $\hat{\mu}_1(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$ és

$$\|(f_{n_k} - f) \cdot \chi_A\|_\infty \geq \varepsilon \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Így az $(f_{n_)k})$ sorozat, és emiatt az (f_n) sorozat is a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint nem konvergál μ-végesen az f-hez.

A fentiek nyilván elmondhatók minden olyan (X, Ω, μ) mértéktér esetén, amelyik rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) > 0$ halmazhoz és $\delta > 0$ számhoz van olyan $B \subset A$ halmaz, hogy $B \in \Omega$ és $0 < \mu(B) < \delta$.

iv) Legyen $X \neq \emptyset$, és az (X, Ω, μ) mértéktér teljes (ld. 2.5.), a mérhető $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozatról pedig tegyük fel, hogy valamilyen $f : X \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor a 3.5.7. Tétel bizonyításában látottakkal analóg módon kapjuk azt, hogy az f függvény is mérhető. Jegyezzük meg, hogy ebből a szempontból a μ mérték teljessége lényeges. Legyen ui.

$$X := \mathbf{R}, \quad \Omega := \{\mathbf{R}, \emptyset, [0,1], \mathbf{R} \setminus [0,1]\}, \quad \mu \equiv 0.$$

Ha

$$f := \chi_{[0,1/2]}, \quad f_n := \chi_{[0,1]} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in \mathbf{R}\setminus[0,1])$. Mivel $\mu([0,1]) = 0$, ezért azt mondhatjuk, hogy $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. Ugyanakkor – bár $[0,1] \in \Omega$ alapján minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvény mérhető – $[0,1/2] \notin \Omega$ miatt az f függvény nem mérhető.

v) Tegyük fel, hogy egy tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz és az (X, Ω, μ) mértéktér esetén az $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat sztohasztikusan konvergál az f függvényhez. Ekkor tetszőlegesen adott $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ halmazra és $y > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| < y\} \cap A) = \mu(A).$$

Ti.

$$A = (\{|f_n - f| < y\} \cap A) \cup (\{|f_n - f| \geq y\} \cap A),$$

$$(\{|f_n - f| < y\} \cap A) \cap (\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = \emptyset \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = 0$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| < y\} \cap A) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A) - \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A)) =$$

$$\mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = \mu(A).$$

vi) Ha $X \neq \emptyset$ és az (X, Ω, μ) mértéktér nem szigma-véges, akkor előfordulhat, hogy egy mérhető $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat sztohasztikusan konvergens ugyan, de alkalmas $f, g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényekkel tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$, $y > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq y\} \cap A) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - g| \geq y\} \cap A) = 0,$$

azaz az (f_n) sorozat sztohasztikusan tart az f-hez is és a g-hez is, és ugyanakkor $\mu(\{f \neq g\}) > 0$. Legyen ui.

$$X := \mathbf{N}, \ \Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N}), \ \mu(\{0\}) := +\infty, \ \mu(\{k\}) := 2^{-k} \ \ (1 \leq k \in \mathbf{N})$$

(amivel nyilván meghatároztuk a μ mértéket). Világos, hogy a μ mérték nem szigma-véges. Tekintsük az

$$f_n(k) := \begin{cases} n & (k=0) \\ 0 & (k=0,...,n) \\ 1 & (k>n) \end{cases} \qquad (n,k \in \mathbf{N})$$

képlettel definiált (f_n) függvénysorozatot. Ekkor bármilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett az (f_n) az

$$f_\alpha(k) := \begin{cases} \alpha & (k=0) \\ 0 & (k>0) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

előírással megadott f_α függvényhez konvergál sztohasztikusan, ám $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}$ esetén

$$\mu(\{f_\alpha \neq f_\beta\}) = \mu(\{0\}) = +\infty.$$

vii) Az előbbi megjegyzésben szereplő példa egyúttal azt is illusztrálja, hogy a 3.8.2. Tétel b) állítása (vagy a 3.8.3. Tétel) általában nem igaz akkor, ha a szóban forgó mértéktér nem szigma-véges. Ui. bármilyen (n_k) indexsorozattal tetszőleges $0 \neq j \in \mathbf{N}$ helyen (ld. vii)) $f_{n_k}(j) = 0$ $(k \in \mathbf{N}, j \leq n_k)$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(j) = 0,$$

míg $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(0) = \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Mivel $\mu(\{0\}) \neq 0$, így az (f_{n_k}) részsorozat nem konvergál μ-m.m.

viii) Tegyük fel, hogy adott az (X, Ω, μ) mértéktér, ahol a μ mérték véges, és legyen (ld. 2.6. xiii) megjegyzés)

$$\rho(A,B) := \mu(A \triangle B) := \mu\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \qquad (A, B \in \Omega).$$

Ekkor tetszőleges $A_n, A \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok esetén az alábbi ekvivalencia igaz: az (A_n) halmazsorozat a ρ félmetrika értelmében akkor és csak akkor konvergál az A-hoz, ha a (χ_{A_n}) függvénysorozat sztohasztikusan konvergál a χ_A függvényhez.

Valóban, mindez egyszerűen következik abból, hogy

$$\mu(\{|\chi_{A_n} - \chi_A| \geq y\}) =$$

$$\mu(\{\chi_{A_n \triangle A} \geq y\}) = \begin{cases} 0 & (y>1) \\ \mu(A_n \triangle A) = \rho(A_n, A) & (0 < y \leq 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

ix) Tekintsük az (X, Ω, μ) mértékteret $(X \neq \emptyset)$, legyen a μ mérték véges. Adott

$$f_n,\ f : X \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

mérhető függvények esetén az (f_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál μ-m.m. értelemben az f-hez, ha minden $\alpha > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{\sup_{m\geq n} |f_m - f| \geq \alpha\}) = 0.$$

Ha ui.

$$A_n^\alpha := \{\sup_{m\geq n} |f_m - f| \geq \alpha\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor (ld. 3.1.5. Tétel) $A_n^\alpha \in \Omega$ és $A_n^\beta \subset A_n^\alpha$ $(n \in \mathbf{N},\ 0 < \alpha \leq \beta)$. Legyen továbbá

$$A := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0\},$$

ekkor nyilván

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus A_n^{1/k}).$$

Így $A \in \Omega$. Világos, hogy

$$(*) \qquad X \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^{1/k} = \bigcup_{0<\alpha\in\mathbf{R}} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha,$$

amiből $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \subset X \setminus A$ $(\alpha > 0)$ rögtön következik. A 2.3.1.4. Tétel szerint $A_{n+1}^\alpha \subset A_n^\alpha$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt tehát

$$\lim_{n\to\infty} A_n^\alpha = \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha\Big) \leq \mu(X \setminus A).$$

Így ha az (f_n) sorozat μ-m.m értelemben konvergál az f-hez, azaz

$$\mu(X \setminus A) = 0,$$

akkor $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n^\alpha) = 0$.

Fordítva, ha ez az utóbbi egyenlőség igaz, akkor a $B_k := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^{1/k}$ $(1 \leq k \in \mathbf{N})$ jelöléssel $B_k \in \Omega$, $B_k \subset B_{k+1}$ $(1 \leq k \in \mathbf{N})$, és (ld. 2.3.1.4. Tétel) a $(*)$ egyenlőségre tekintettel (az $\alpha := 1/k$ $(k = 1, 2, ...)$ választással)

$$\mu(X \setminus A) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^{1/k}\Big) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^{1/k}) = 0,$$

azaz az (f_n) sorozat μ-m.m értelemben konvergál az f-hez.

x) A 3.8. v) megjegyzés alapján a gyenge p-norma (ld. 3.9.4.) alábbi ekvivalens meghatározását kapjuk: ha (az eddigi és a 3.7. pontbeli jelölésekkel) az $f : X \to \mathbf{R}$ függvény mérhető, akkor

$$\|f\|_{p,*} = \sup_{t>0} \left(t^{1/p} \cdot \tilde{f}(t)\right) \qquad (0 < p < +\infty).$$

xi) Legyen $X \neq \emptyset$ és adott az (X, Ω, μ) mértéktér. Tetszőleges $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényre és $0 < p, q \leq +\infty$ „kitevőkre" definiáljuk az $\|f\|_{p,q}$-t a az alábbi módon:

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \sup\{t^{1/p} \cdot \tilde{f}(t) : t > 0\} & (q = +\infty) \\ \left(\int_0^{+\infty} t^{q/p-1} \cdot (\tilde{f}(t))^q \, dt\right)^{1/q} & (q < +\infty). \end{cases}$$

Legyen továbbá a fenti paraméterekkel értelmezett *Lorentz-tér* a következő:

$$L^{p,q} := \{f : X \to \mathbf{R} : \|f\|_{p,q} < +\infty\}.$$

Ekkor

$$L^{\infty,\infty} = L^\infty, \; L^{p,\infty} = L^p_*, \; L^{p,p} = L^p \quad (p < +\infty).$$

Megmutatható, hogy ha $p < +\infty$, akkor

$$\|f\|_{p,q} = p^{1/q} \cdot \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} \cdot \varphi_f(y)^{q/p} \, dy\right)^{1/q}.$$

Speciálisan (ld. 3.16. v) megjegyzés), ha $p = q \, (< +\infty)$, akkor az előzőek szerint

$$\|f\|_p^p = p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot \varphi_f(y) \, dy.$$

A Lorentz-terek egymáshoz való viszonyát illetően azt mondhatjuk, hogy

$$L^{p,q} \subset L^{p,r} \qquad (0 < p \leq +\infty, \, 0 < q < r \leq +\infty).$$

Mindez nyilván következik abból, hogy létezik olyan, csak a jelzett p, q, r-től függő $c_{p,q,r} \geq 0$ konstans, hogy tetszőleges mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvényre

$$\|f\|_{p,r} \leq c_{p,q,r} \cdot \|f\|_{p,q}.$$

Megjegyezzük, hogy a $\|\cdot\|_{p,q}$-ra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ugyanakkor a mérhető $f, h : X \to \mathbf{R}$ függvények $F := f + h$ összegére fennálló (ld. 3.7.4. Tétel)

$$\widetilde{F}(t) \leq \tilde{f}(t/2) + \tilde{h}(t/2) \qquad (t \geq 0)$$

becslés alapján a $c_{p,q} := 2^{1/p} \cdot \max\{1, 2^{1/q-1}\}$ együtthatóval

$$\|f + h\|_{p,q} \leq c_{p,q} \cdot (\|f\|_{p,q} + \|h\|_{p,q}).$$

Világos, hogy $\|f\|_{p,q} = 0$ esetén $f = 0$ μ-m.m. Ezért az $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ tér egy kvázinormált tér. Belátható, hogy ez utóbbi teljes, azaz: ha $f_n \in L^{p,q}$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$\|f_n - f_m\|_{p,q} \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

akkor van olyan $f \in L^{p,q}$ függvény, hogy

$$\|f - f_n\|_{p,q} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

A részletek mellőzésével csak az alábbiakat jegyezzük meg. Könnyen belátható, hogy a fenti Cauchy-tulajdonságból következik az, hogy a szóban forgó (f_n) sorozatra

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq y\} \to 0 \qquad (y > 0,\, n, m \to \infty)$$

is teljesül. Ezért a 3.9.3.3. Tétel bizonyításában látottak szerint egy alkalmas (n_k) indexsorozattal és egy $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvénnyel $f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ μ-m.m. Ha itt rözítünk egy k_0 indexet, akkor nyilván

$$|f - f_{n_{k_0}}| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k_0}}| \quad \mu\text{-m.m.}$$

Ezért (ld. 3.7.4. Tétel) az $F := f - f_{n_{k_0}}$, $F_k := f_{n_k} - f_{n_{k_0}}$ $(k \in \mathbf{N})$ jelölésekkel

$$\widetilde{F} \leq \liminf_{k\to\infty} \widetilde{F_k}.$$

Innen a Fatou-lemma alapján (ld. 3.3.2.7. Tétel) már egyszerűen kapjuk azt, hogy

$$\|f - f_{n_{k_0}}\|_{p,q}^q \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|_{p,q}^q,$$

és $k_0 \to \infty$ után (emlékeztetve az $\|f_n - f_m\|_{p,q} \to 0$ $(n, m \to \infty)$ Cauchy-tulajdonságra)

$$\|f - f_{n_k}\|_{p,q} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

is következik. Ez utóbbiból viszont standard módon adódik a „teljes" (f_n) sorozat konvergenciája is:

$$\|f - f_n\|_{p,q} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Végül megjegyezzük, hogy az $L^{p,\infty} = L^p_*$ egyenlőségre utalva kapjuk az $(L^p_*, \|\cdot\|_{p,*})$ tér teljességét is.

3.11. Radon-Nikodym-tétel

A címben jelzett tétel előkészítéseként először röviden összefoglaljuk az abszolút folytonos mértékekről azokat az ismereteket, amik a későbbiekben alapvető szerepet játszanak.

Az abszolút folytonosság definíciójának a jobb megvilágításához elsőként annak egy speciális esetével foglalkozunk. Sőt, éppen a Radon-Nikodym-tétel az, aminek az alapján aztán majd kiderül, hogy bizonyos feltételek mellett az előbbi „speciális" jelzőt el is hagyhatjuk. Legyen tehát $X \neq \emptyset$, az (X, Ω, μ) egy mértéktér, $f \in L^+$, és az $A \in \Omega$ halmaz esetén vezessük be a következő jelölést:

$$\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu := \int f \cdot \chi_A\, d\mu$$

(az f függvény *integrálja* az A halmazon). Megjegyezzük, hogy ha $A = X$, akkor

$$\int_X f\, d\mu = \int f \cdot \chi_X\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Ezért is szokták $\int f\, d\mu$ helyett gyakran az $\int_X f\, d\mu$ írásmódot használni.

Ezzel tehát egy $\mu_f : \Omega \to [0, +\infty]$ leképezést definiáltunk, amiről a jelen pont első tételeként megmutatjuk, hogy mérték.

3.11.1. Tétel. *A μ_f leképezés minden $f \in L^+$ függvényre mérték.*

Bizonyítás. A $\mu_f \geq 0$ becslés nyilvánvaló. Mivel

$$f \cdot \chi_\emptyset = \chi_\emptyset \in L_0^+,$$

ezért $\mu_f(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Ha adott az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt, mérhető halmazoknak egy sorozata, és $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, akkor

$$f \cdot \chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n}.$$

Innen a Beppo Levi-tétel sorokra vonatkozó alakjából (ld. 3.4. iii) megjegyzés)

$$\mu_f(A) = \int f \cdot \chi_A\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f \cdot \chi_{A_n}\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_f(A_n),$$

így a μ_f szigma-additív is. ■

Szokás a μ_f mértéket az f *függvény által generált mértéknek,* magát az f függvényt pedig (a μ_f mérték vonatkozásában) *súlyfüggvénynek* nevezni. Ha $f(x) := 1$ $(x \in X)$, akkor a triviális $\mu_f = \mu$ egyenlőséget kapjuk.

A következő tételben a μ_f mérték legfontosabb tulajdonságait soroljuk fel. (Emlékeztetünk arra, hogy a függvényterek jelölésénél (ha szükséges) időnként a szóban forgó mérték szimbólumát is feltüntetjük: $L_0^+(\mu)$, $L^+(\mu)$, $L(\mu)$, stb.)

3.11.2. Tétel. *Tetszőleges* $f, g \in L^+(\mu)$ *és* $h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvényekek esetén az alábbi állítások igazak*:

a) $\int g\, d\mu_f = \int gf\, d\mu$;

b) $h \in L(\mu_f) \iff fh \in L(\mu)$;

c) $h \in L(\mu_f) \Longrightarrow \int h\, d\mu_f = \int fh\, d\mu$;

d) $f = g \;\; \mu\text{-m.m.} \;\; \Longrightarrow \mu_f = \mu_g$;

e) $f \in L(\mu) \cap L^+(\mu),\; \mu_f = \mu_g \Longrightarrow f = g \;\; \mu\text{-m.m.}$

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához legyen először

$$g = \sum_i y_i \cdot \chi_{A_i} \in L_0^+(\mu) = L_0^+(\mu_f),$$

ahol tehát a „$\sum_i$" összegzés egy véges összeget jelent, és minden egyes benne szereplő i-re $y_i \geq 0$, $A_i \in \Omega$. Ekkor (ld. 3.3.1.4. Tétel)

$$\int g\, d\mu_f = \sum_i y_i \cdot \mu_f(A_i) = \sum_i y_i \cdot \int f \cdot \chi_{A_i}\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

Ha viszont a $g \in L^+(\mu) = L^+(\mu_f)$ egy tetszőleges függvény, akkor egy alkalmas monoton növekedő $g_n \in L_0^+(\mu)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, amiből persze az (fg_n) sorozat monoton növekedése, valamint az

$$fg = \lim_{n\to\infty} (fg_n)$$

egyenlőség is következik. A Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) és a már bebizonyított előbbi speciális eset miatt innen a kívánt

$$\int fg\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int fg_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu_f = \int g\, d\mu_f$$

egyenlőséget kapjuk.

A b), c) állításokat illetően a $h^\pm \in L^+(\mu)$ függvényekre alkalmazható az a) eset, miszerint

$$\int h^+\, d\mu_f = \int fh^+\, d\mu,\; \int h^-\, d\mu_f = \int fh^-\, d\mu.$$

Ha tehát $h \in L(\mu_f)$, akkor

$$\int h\, d\mu_f = \int h^+\, d\mu_f - \int h^-\, d\mu_f = \int fh^+\, d\mu - \int fh^-\, d\mu = \int fh\, d\mu.$$

Fordítva, ha $fh \in L(\mu)$, akkor

$$(fh)^\pm = fh^\pm \in L(\mu) \cap L^+(\mu),$$

amiből a μ_f mérték definíciója miatt $h^{\pm} \in L(\mu_f)$ adódik. Tehát valóban igaz (ld. 3.3.3.2. Tétel), hogy $h \in L(\mu_f)$.

Lássuk be most a d) állítást: bármelyik $A \in \Omega$ halmazt is véve, a feltételek szerint teljesül az $f \cdot \chi_A = g \cdot \chi_A$ μ-m.m. egyenlőség, amiből (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\mu_f(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu = \int g \cdot \chi_A \, d\mu = \mu_g(A)$$

következik, amint azt állítottuk.

Az e)-ben tett feltételek alapján

$$\mu_g(X) = \int g \, d\mu = \mu_f(X) = \int f \, d\mu < +\infty,$$

tehát $g \in L(\mu) \cap L^+(\mu)$. Legyen $N := \{f > g\}$, ekkor egyrészt (ld. 3.1.) $N \in \Omega$, másrészt az előzőek miatt

$$H := f \cdot \chi_N - g \cdot \chi_N \in L^+(\mu).$$

Mivel $f \cdot \chi_N \leq f$ és $g \cdot \chi_N \leq g$, ezért $f \cdot \chi_N, g \cdot \chi_N \in L(\mu)$, továbbá

$$\mu_f(N) = \int f \cdot \chi_N \, d\mu = \mu_g(N) = \int g \cdot \chi_N \, d\mu.$$

Így tehát $\int H \, d\mu = 0$, következésképpen (ld. 3.3.2.6. Tétel) $H = 0$ μ-m.m. A H függvény definíciója miatt $H(x) > 0$ $(x \in N)$, ezért $H = 0$ μ-m.m. csak úgy lehetséges, ha $\mu(N) = 0$. Hasonlóan kapjuk a $\mu(\{f < g\}) = 0$ egyenlőséget, amit a $\mu(N) = 0$ és az $\{f \neq g\} = \{f > g\} \cup \{f < g\}$ egyenlőségekkel egybevetve a bizonyítandó $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ állítás, azaz e) adódik. ■

Később majd megmutatjuk, hogy az előbbi tétel e) állítása az „$f \in L(\mu)$" feltétel helyett a kevesebbet kívánó „μ szigma-véges" kikötés mellett is igaz.

Tekintsük a kiindulópontként szolgáló (X, Ω, μ) mértékteret, és legyen a

$$\nu : \Omega \to [0, +\infty]$$

valamilyen mérték. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett létezik olyan $f \in L^+(\mu)$ függvény, hogy $\nu = \mu_f$? Egy erre vonatkozó szükséges feltételt könnyen megfogalmazhatunk. Ha ui. van ilyen f függvény, tehát amivel $\nu = \mu_f$, akkor minden egyes $A \in \Omega$ halmazra

$$\nu(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu.$$

Amennyiben itt $\mu(A) = 0$, akkor nyilván $f \cdot \chi_A = 0$ μ-m.m. Ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel) $\nu(A) = 0$.

A most mondottakat szem előtt tartva vezessük be a következő definíciót.

3.11.3. Definíció. Tegyük fel, hogy az (X, Ω) mérhető tér esetén adottak a

$$\nu,\ \mu : \Omega \to [0, +\infty]$$

mértékek.Azt mondjuk, hogy a ν mérték *abszolút folytonos* a μ mértékre nézve, ha minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz esetén $\nu(A) = 0$.

Állapodjunk meg abban, hogy ha a 3.11.3. Definícióban mondottak teljesülnek, úgy ezt a

$$\nu \ll \mu$$

szimbólummal fogjuk jelölni.

Így pl. a fentiek szerint tetszőleges $f \in L^+(\mu)$ (súly)függvény esetén $\mu_f \ll \mu$. Könnyű ugyanakkor példával illusztrálni azt a tényt, hogy nem minden, a valamilyen μ-re nézve abszolút folytonos mérték állítható elő egy alkalmas $f \in L^+(\mu)$ függvény segítségével μ_f alakban. Legyen ui. az X egy kontinuum számosságú halmaz, $\mathcal{P}_0(X)$ az X legfeljebb megszámlálható, $\mathcal{P}_1(X)$ pedig az X véges részhalmazainak a halmaza,

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ vagy } X \setminus A \in \mathcal{P}_0(X)\}.$$

Definiáljuk az Ω-n a ν, μ mértékeket a következőképpen:

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & (A \in \mathcal{P}_0(X)) \\ +\infty & (X \setminus A \in \mathcal{P}_0(X)) \end{cases},\ \mu(A) := \begin{cases} [A] & (A \in \mathcal{P}_1(X)) \\ +\infty & (A \notin \mathcal{P}_1(X)) \end{cases} \qquad (A \in \Omega),$$

ahol az $[A]$ szimbólum az A halmaz elemeinek a számát jelöli. Ekkor (ld. 2.3.) a ν, μ leképezések mértékek az Ω-n, és nyilván igaz, hogy $\nu \ll \mu$. Ui. $\mu(A) = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $A = \emptyset$. Ha lenne olyan $f \in L^+(\mu)$ függvény, amivel $\nu = \mu_f$, akkor bármelyik $x \in X$ mellett

$$0 = \nu(\{x\}) = \mu_f(\{x\}) = \int f \cdot \chi_{\{x\}}\, d\mu = f(x) \cdot \mu(\{x\}) = f(x),$$

amiből $f \equiv 0$ adódna. Ekkor viszont $\nu = \mu_f = 0$ lenne, ami pedig nem igaz.

Legyen $X \neq \emptyset$, az (X, Ω) egy mérhető tér (ld. 2.5.), a

$$\mu,\ \nu : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

leképezések pedig előjeles mértékek az Ω-n (ld. 2.11.). Azt mondjuk, hogy a ν *abszolút folytonos* a μ-re nézve, ha minden olyan $A \in \Omega$ halmazra, amelyikre $[\mu](A) = 0$, egyúttal $\nu(A) = 0$ is igaz. (A $[\mu]$ értelmezését illetően ld. 2.11.4. Definíció.) Ebben az esetben is a $\nu \ll \mu$ jelölést fogjuk használni. Világos, hogy amennyiben a ν, μ függvények mértékek, akkor a 3.11.3. Definíciót ismételtük meg. Továbbá

$$\nu \ll \mu \iff [\nu] \ll [\mu] \iff (\nu^+ \ll \mu \text{ és } \nu^- \ll \mu)\,.$$

Részben a címben szereplő Radon-Nikodym-tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány, önmagában is fontos és érdekes állításra, amelyeket lemmák alakjában fogunk szerepeltetni. Ezek közül az első mindjárt rávilágít a 3.11.3. Definícióban olvasható „folytonos" jelzőre, mintegy magyarázatul is szolgálva a terminológiára.

3.11.4. Lemma. *Legyen (X, Ω, ν) és (X, Ω, μ) egy-egy mértéktér, és tegyük fel, hogy a ν véges. Ekkor a $\nu \ll \mu$ feltétel ekvivalens azzal, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $A \in \Omega$ és $\mu(A) < \delta$, akkor $\nu(A) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy $\nu \ll \mu$, és – az állítással ellentétben – van olyan $\varepsilon > 0$ pozitív szám, hogy egy alkalmas $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozattal teljesülnek a $\mu(A_n) < 2^{-n}$, $\nu(A_n) > \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N})$ becslések. Legyen

$$A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad (\in \Omega),$$

ekkor $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt

$$\mu(A) \le \mu\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) \le \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) < \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen nyilvánvaló, hogy $\mu(A) = 0$, ezért $\nu \ll \mu$ alapján $\nu(A) = 0$. Ugyanakkor a ν végességére tekintettel (ld. 3.4. x) megjegyzés)

$$\nu(A) \ge \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \ge \varepsilon,$$

ami nyilván ellentmond az előbb kapott $\nu(A) = 0$ egyenlőségnek.

A fordított irányú állítás bizonyítása meglehetősen triviális. Ha ui. valamilyen $A \in \Omega$ halmazra $\mu(A) = 0$ igaz, akkor a tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz az állításban szereplő feltétel szerint létező $\delta > 0$ mellett $\mu(A) < \delta$ is igaz, tehát $\nu(A) < \varepsilon$ is fennáll. Ez csak úgy lehetséges, ha $\nu(A) = 0$. ■

Vegyük észre, hogy az előbbi bizonyítás szerint a 3.11.4. Lemma egyik „iránya" akkor is igaz, ha a ν mérték nem véges, nevezetesen: ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amivel $A \in \Omega$, $\mu(A) < \delta$ esetén $\nu(A) < \varepsilon$, akkor $\nu \ll \mu$.

3.11.5. Lemma. *Legyen adott az (X, Ω, μ) mértéktér. Ekkor a μ mérték szigma-végessége ekvivalens azzal, hogy van olyan $h \in L(\mu)$ függvény, amire minden egyes $x \in X$ pontban $0 < h(x) < +\infty$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a μ szigma-véges. Ekkor (ld. 2.5.3. Definíció) létezik olyan $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat, hogy

$$A_n \subset A_{n+1},\ \mu(A_n) < +\infty \ \ (n \in \mathbf{N}), \ \ X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Válasszuk az $\alpha_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ számsorozatot úgy, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty,$$

és minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $\alpha_n \cdot \mu(A_n) < 2^{-n}$ teljesüljön, valamint legyen

$$h := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \chi_{A_n}.$$

(Megjegyezzük, hogy ha $\mu(X) > 0$, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indextől kezdve fennáll a $0 < \mu(A_N) \leq \mu(A_n)$ $(\mathbf{N} \ni n \geq N)$ becslés, ekkor tehát az $\alpha_n \cdot \mu(A_n) < 2^{-n}$ feltételből $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ már következik. Ha viszont $\mu(X) = 0$, akkor a $h(x) := 1$ $(x \in X)$ függvény nyilván eleget tesz a kívánalmaknak.)

A most definiált h függvényre a $0 < h(x) < +\infty$ $(x \in X)$ feltétel teljesülése eléggé nyilvánvaló, a Beppo Levi-tétel sorokra vonatkozó alakjából (ld. 3.4. iii) megjegyzés) pedig a h mérhetősége és

$$\int h \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int \alpha_n \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} < +\infty$$

is következik. Ez éppen azt jelenti, hogy $h \in L(\mu)$.

A most belátott állítás megfordításának az igazolásához tekintsük a tételben megfogalmazott feltételeknek eleget tevő h függvénnyel az

$$A_n := \{h \geq 1/n\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

mérhető halmazokat. Ezekre nyilván igaz, hogy $A_n \subset A_{n+1}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, és a $h > 0$ feltétel miatt $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Továbbá $\chi_{A_n} \leq nh$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\mu(A_n) = \int \chi_{A_n} \, d\mu \leq \int nh \, d\mu = n \cdot \int h \, d\mu < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ami még „hiányzott" a μ szigma-végességéhez. ■

3.11.6. Lemma. *Tekintsük az* (X, Ω, μ), (X, Ω, ν) *mértéktereket, ahol mindkét mérték legyen véges, és tegyük fel, hogy* $\nu(X) < \mu(X)$. *Ekkor van olyan* $Y \in \Omega$ *halmaz, hogy az alábbiak teljesülnek*:

1° $\nu(Y) < \mu(Y)$;

2° $\nu(A) \leq \mu(A) \quad (A \in \Omega \cap \mathcal{P}(Y))$.

Bizonyítás. A

$$\varphi := \mu - \nu : \Omega \to \mathbf{R}$$

leképezés korlátos, ui. bármelyik $A \in \Omega$ esetén

$$-\infty < -\nu(X) \leq \varphi(A) \leq \mu(X) < +\infty.$$

A φ függvényt felhasználva teljes indukcióval határozzuk meg a következő halmazokat:

$$A_0 := \emptyset,\ B_0 := X,$$

és ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett az $A_0, ..., A_n,\ B_0, ..., B_n \in \Omega$ halmazok már ismertek, akkor először is legyen

$$\alpha_n := \inf\{\varphi(A) : A \in \Omega \cap \mathcal{P}(B_n)\}.$$

A most definiált α_n segítségével aztán az alábbi módon választjuk meg az A_{n+1}, B_{n+1} halmazokat: ha $\alpha_n \geq 0$ (amiből egyébként $\emptyset \subset B_n$ miatt $\alpha_n = 0$ is következik), akkor legyen

$$A_{n+1} := \emptyset,\ B_{n+1} := B_n.$$

Az $\alpha_n < 0$ esetben az infimum értelmezése alapján van olyan $A_{n+1} \in \Omega \cap \mathcal{P}(B_n)$, amire $\varphi(A_{n+1}) \leq \alpha_n/2$, legyen ekkor $B_{n+1} := B_n \setminus A_{n+1}$.

Az így megadott A_n, B_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok tehát valamennyien Ω-beliek, az A_n-ek páronként (nyilván) diszjunktak, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\mu(A_n) - \nu(A_n)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) - \nu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \in \mathbf{R},$$

amiből $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$ rögtön következik. Mivel

$$2\cdot \varphi(A_{n+1}) \leq \alpha_n \leq \varphi(A_{n+1}) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért egyúttal $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ is igaz.

Válasszuk most már az Y halmazt a következőképpen:

$$Y := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \ \ (\in \Omega).$$

A 2.3.1.4. Tétel szerint

$$\varphi(Y) = \mu(Y) - \nu(Y) = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n).$$

Az A_n, B_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok értelmezése alapján

$$\varphi(B_{n+1}) = \varphi(B_n) - \varphi(A_{n+1}) \geq \varphi(B_n) \geq \ldots \geq \varphi(B_0) = \varphi(X) = \mu(X) - \nu(X) > 0,$$

így $\lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) > 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\mu(Y) > \nu(Y)$.

Legyen végül $A \in \Omega \cap \mathcal{P}(Y)$, ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ indexre $A \subset B_n$, következésképpen az α_n értelmezésére tekintettel $\varphi(A) \geq \alpha_n$. Mivel $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért $\varphi(A) \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy a szóban forgó A halmazra $\mu(A) \geq \nu(A)$, ami teljessé teszi a fenti 3.11.6. Lemma bizonyítását. ■

Megjegyezzük, hogy ha a 3.11.6. Lemma feltételei közül a $\nu(X) < \mu(X)$ nem teljesül ugyan, de $\nu(X) > 0$ és

$$\mathbf{R} \ni \beta := \frac{\mu(X)}{2\cdot \nu(X)} > 0,$$

akkor nyilván $\mu(X) > \beta\cdot \nu(X)$. Alkalmazható tehát a 3.11.6. Lemma a μ és a $\beta\cdot \nu$ mértékre, amiből olyan $Y \in \Omega$ halmaz létezését kapjuk, hogy

- $\mu(Y) > \beta\cdot \nu(Y)$;
- $\mu(A) \geq \beta\cdot \nu(A) \quad (A \in \Omega \cap \mathcal{P}(Y))$.

Minden kész áll ahhoz, hogy a jelen pont fő tételét, a Radon-Nikodym-tételt bebizonyíthassuk.

3.11.7. Tétel (Radon-Nikodym). *Legyenek adottak az* (X, Ω, μ), (X, Ω, ν) *mértékterek, és tegyük fel, hogy a* μ *mérték szigma-véges. Ekkor*

$$\nu \ll \mu \iff \text{van olyan } f \in L^+(\mu), \text{ hogy } \nu = \mu_f.$$

Bizonyítás. Az eddig mondottak alapján a tételben már csak az $\Longrightarrow$ irányt kell igazolni. Első esetként tételezzük fel ehhez, hogy a μ is, a ν is véges, és legyen ekkor

$$\mathcal{L} := \{g \in L^+(\mu) : \mu_g \leq \nu\}.$$

Az $\mathcal{L}$ halmaz nem üres, ui. az (X-en) azonosan nulla függvény nyilván $\mathcal{L}$-beli. Lássuk be továbbá azt, hogy ha $g, h \in \mathcal{L}$, akkor a g, h függvények felső burkolója is az $\mathcal{L}$-ben van:

$$\max\{g, h\} \in \mathcal{L}.$$

Ehhez azt kell csupán észrevenni, hogy ha

$$A_1 := \{g \geq h\},\ A_2 := X \setminus A_1,$$

akkor minden $A \in \Omega$ halmazra

$$\int \max\{g,h\}\cdot \chi_A \, d\mu = \int g\cdot \chi_{A\cap A_1}\, d\mu + \int h\cdot \chi_{A\cap A_2}\, d\mu =$$

$$\mu_g(A\cap A_1) + \mu_h(A\cap A_2) \leq \nu(A\cap A_1) + \nu(A\cap A_2) = \nu(A),$$

és így valóban igaz, hogy $\mu_{\max\{g,h\}} \leq \nu$, azaz $\max\{g,h\} \in \mathcal{L}$. Innen (teljes indukcióval) egyúttal az is következik, hogy véges sok $\mathcal{L}$-beli függvény felső burkolója is az $\mathcal{L}$-ben van: ha $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ véges halmaz, akkor az

$$X \ni x \mapsto \max\{g(x) : g \in \mathcal{F}\}$$

függvény eleme az $\mathcal{L}$ halmaznak.

Legyen a továbbiakban

$$\gamma := \sup\left\{\int g\, d\mu : g \in \mathcal{L}\right\}.$$

Jegyezzük meg először is azt, hogy $\gamma < +\infty$. Valóban, bármelyik $g \in \mathcal{L}$ mellett

$$\int g\, d\mu = \mu_g(X) \leq \nu(X) < +\infty.$$

Válasszunk ezek után egy olyan $\tilde{g}_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot, amire

$$\lim_{n\to\infty} \int \tilde{g}_n\, d\mu = \gamma.$$

(Ilyen sorozat a szuprémum definíciója miatt létezik.) Ha

$$g_n := \max\{\tilde{g}_0, ..., \tilde{g}_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az előbbiek szerint $g_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbf{N})$, és a nyilvánvaló $\tilde{g}_n \leq g_n$ $(n \in \mathbf{N})$ egyenlőtlenség miatt

$$\int \tilde{g}_n\, d\mu \leq \int g_n\, d\mu\ (\leq \gamma) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát $\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \gamma$. A g_n-ek értelmezése miatt a (g_n) sorozat monoton növekedő, ezért az

$$f := \lim_{n\to\infty} g_n$$

függvényre $\int f\, d\mu = \gamma$, és tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra (ld. Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel))

$$\mu_f(A) = \int f\cdot \chi_A\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\cdot \chi_A\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{g_n}(A) \leq \nu(A).$$

Speciálisan tehát $\mu_f \leq \nu$ is igaz, azaz $f \in \mathcal{L}$. (Ez mellékesen azt is jelenti, hogy a γ-t definiáló egyenlőségben „sup” helyett „max” is írható.)

Belátjuk, hogy

$$\nu = \mu_f.$$

Azt tudjuk, hogy

$$\varphi := \nu - \mu_f \geq 0.$$

Továbbá a φ egy véges mérték az Ω szigma-algebrán, és $\nu \ll \mu$ miatt nyilván $\varphi \ll \mu$ is teljesül. A kívánt $\nu = \mu_f$ egyenlőség igazolásához a $\varphi(X)$-ről kell megmutatnunk, hogy nulla. Ennek az érdekében tegyük fel indirekt módon, hogy $\varphi(X) > 0$. Ekkor persze $\mu(X) > 0$ is fennáll, hiszen $\nu \ll \mu$. Ezért alkalmazható a 3.11.6. Lemma bizonyítása után tett megjegyzés: ha $\beta := \varphi(X)/2\cdot \mu(X)$ (> 0), akkor egy alkalmas $Y \in \Omega$ halmazzal

$$\varphi(Y) > \beta\cdot \mu(Y),\ \varphi(A) \geq \beta\cdot \mu(A) \quad (A \in \Omega \cap \mathcal{P}(Y)).$$

Innen az is következik, hogy $\mu(Y) > 0$, ui. különben $\varphi \ll \mu$ miatt $\varphi(Y) = 0$ lenne, ellentmondva a $\varphi(Y) > \beta\cdot \mu(Y)$ egyenlőtlenségnek.

Legyen

$$f_0 := f + \beta\cdot \chi_Y,$$

ekkor egyrészt az f_0 mérhető függvény (ld. 3.1.4. Tétel), másrészt minden $A \in \Omega$ halmazra (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int f_0\cdot \chi_A \, d\mu = \int f\cdot \chi_A \, d\mu + \beta\cdot \int \chi_{A\cap Y} \, d\mu =$$

$$\int f\cdot \chi_A \, d\mu + \beta\cdot \mu(A \cap Y) \leq \int f\cdot \chi_A \, d\mu + \varphi(A) = \nu(A).$$

Ez azt jelenti, hogy $f_0 \in \mathcal{L}$, amiből (ld. 3.3.2.2. Tétel)

$$\int f_0 \, d\mu = \int f \, d\mu + \beta\cdot \mu(Y) = \gamma + \beta\cdot \mu(Y) > \gamma$$

adódik, ami viszont a γ értelmezése miatt nem lehet. Tehát valóban igaz, hogy $\varphi(X) = 0$, és így $\nu = \mu_f$.

Második esetként tegyük fel azt, hogy $\mu(X) < \nu(X) = +\infty$, és legyen

$$\mathcal{D} := \{A \in \Omega : \nu(A) < +\infty\},\ \alpha := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{D}\} \ \ (< +\infty).$$

Az világos, hogy a $\mathcal{D}$ halmazrendszer nem üres $(\emptyset \in \mathcal{D})$, és véges sok elemével együtt azok egyesítését is tartalmazza. Ezért (és a szuprémum értelmezése alapján) van olyan

$$A_n \in \mathcal{D},\ A_n \subset A_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazsorozat, hogy $\alpha = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Tekintsük az

$$\tilde{X}_0 := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\in \Omega)$$

halmazt. Az A_n-ekről mondottakat figyelembe véve nyilván igaz az, hogy $\alpha = \mu(\tilde{X}_0)$. Belátjuk, hogy minden $A \in \Omega \cap \mathcal{P}(X \setminus \tilde{X}_0)$ halmazra

$$\mu(A) = \nu(A) = 0 \text{ vagy } 0 < \mu(A) < \nu(A) = +\infty.$$

Ui., ha $\nu(A) < +\infty$, akkor $A_m \cup A \in \mathcal{D}$ $(m \in \mathbf{N})$, így $\mu(A_m \cup A) \leq \alpha$ $(m \in \mathbf{N})$. Innen

$$\mu(\tilde{X}_0 \cup A) = \alpha + \mu(A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m \cup A) \leq \alpha,$$

amiből $\mu(A) = 0$, és – felhasználva, hogy $\nu \ll \mu$ – egyúttal $\nu(A) = 0$ is adódik.

Legyen

$$X_0 := X \setminus \tilde{X}_0,\ X_1 := A_1,\ X_n := A_n \setminus A_{n-1} \qquad (n = 2, 3, ...).$$

Az így definiált X_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként nyilván diszjunktak, Ω-beliek, és igaz az $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ előállítás. Továbbá

$$\nu(X_n) < +\infty \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Szűkítsük le a μ és a ν mértéket az

$$\Omega_n := \{A \in \mathcal{P}(X_n) : A \in \Omega\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

szigma-algebrákra, azaz legyen

$$\mu_n(A) := \mu(A),\ \ \nu_n(A) := \nu(A) \qquad (A \in \Omega_n,\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $\nu_n \ll \mu_n$, valamint $n > 0$ esetén μ_n, ν_n véges mértékek. Az erre az esetre már bebizonyított állítás szerint tehát bármelyik $0 < n \in \mathbf{N}$ indexhez van olyan $f_n \in L^+(\mu_n)$ függvény, amivel $\nu_n = \mu_{n_{f_n}}$. Ha az f_0 függvényt az

$$f_0(x) := +\infty \qquad (x \in X_0)$$

utasítással definiáljuk, akkor triviálisan igaz lesz a $\nu_0 = \mu_{0_{f_0}}$ egyenlőség is.

Végül, ha

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \chi_{X_n},$$

akkor az eddigiek alapján már könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $f \in L^+(\mu)$ és $\nu = \mu_f$.

Befejezésül legyen most már a μ tetszőleges szigma-véges mérték, és alkalmazzuk a 3.11.5. Lemmát, miszerint van olyan $h \in L(\mu)$ függvény, ami mindenütt véges és pozitív.

Ekkor a μ_h mérték $\mu_h(X) = \int h\,d\mu < +\infty$ miatt véges, és minden $A \in \Omega$ halmazra (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\mu_h(A) = 0 \iff \mu(A) = 0.$$

Tehát $\nu \ll \mu_h$, amiből a fentiek szerint már következik olyan $g \in L^+(\mu_h)$ függvény létezése, hogy $\nu = \mu_{h_g}$. A 3.3.2.4. Tétel szerint $L^+(\mu_h) = L^+(\mu)$, a 3.11.2. Tétel szerint pedig $\mu_{h_g} = \mu_{gh}$. Az $f := gh \in L^+(\mu)$ függvény tehát megfelel a tételben mondottaknak. ■

A 3.11.2. Tétel bizonyítása után, annak az e) állításával kapcsolatban megjegyeztük, hogy a későbbiekben kevesebb feltétel mellett is be fogjuk ugyanazt látni. Ez nem más, mint az előbbi 3.11.7. (Radon-Nikodym-) Tételben kapott f függvény egyértelműsége. Nevezetesen igaz a

3.11.8. Tétel. *Legyen $X \neq \emptyset$, az (X, Ω, μ) mértéktérről tegyük fel, hogy a μ mérték szigma-véges. Ekkor tetszőleges $f, g \in L^+(\mu)$ esetén*

i) $\mu_f = \mu_g \implies f = g$ μ-m.m.;

ii) *a μ_f mérték akkor és csak akkor szigma-véges, ha $f < +\infty$ μ-m.m.*

Bizonyítás. Ha $f \in L(\mu)$ is igaz – azaz $\mu_f(X) = \int f\,d\mu < +\infty$ miatt a μ_f mérték véges –, akkor az i) állítás következik a fentebb már idézett 3.11.2. Tételből.

Tegyük fel most azt, hogy a μ véges, $\mu_f(X) = +\infty$, és legyen $\nu := \mu_f$. Ekkor a 3.11.7. Tétel bizonyításában szereplő „második esetre" utalva egyúttal az is feltehető, hogy minden $A \in \Omega$ esetén

$$\mu(A) = \nu(A) = 0 \text{ vagy } \mu(A) > 0,\ \nu(A) = +\infty.$$

Így tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett $f \cdot \chi_{\{f \le n\}} \le n \cdot \chi_{\{f \le n\}}$ miatt

$$\nu(\{f \le n\}) = \int f \cdot \chi_{\{f \le n\}}\,d\mu \le n \cdot \mu(\{f \le n\}) < +\infty,$$

amiből $\mu(\{f \le n\}) = \nu(\{f \le n\}) = 0$ következik. (Különben $0 < \nu(\{f \le n\}) < +\infty$ lenne, ellentétben a feltételezésünkkel.) Tehát

$$\mu(\{f < +\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{f \le n\}\Big) = 0,$$

más szóval $f = +\infty$ μ-m.m. A $\mu_f = \mu_g$ egyenlőség alapján ugyanez mondható el a g függvényre is: $g = +\infty$ μ-m.m., ezért $f = g$ μ-m.m. is igaz.

Végül, tetszőleges szigma-véges μ mértékre alkalmazzuk a 3.11.5. Lemmát, miszerint van olyan $h \in L(\mu)$ függvény, amire $0 < h(x) < +\infty$ $(x \in X)$. Ha továbbra is $\nu := \mu_f = \mu_g$, akkor

$$\nu_h = \mu_{f_h} = \mu_{h_f} = \mu_{g_h} = \mu_{h_g}.$$

Ui. tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra (ld. 3.11.2. Tétel)

$$\nu_h(A) = \mu_{f_h}(A) = \int h\cdot \chi_A \, d\mu_f = \int fh\cdot \chi_A \, d\mu = \mu_{fh}(A) = \int f\cdot \chi_A \, d\mu_h = \mu_{h_f}(A),$$

azaz $\nu_h = \mu_{f_h} = \mu_{h_f}$. A $\nu_h = \mu_{g_h} = \mu_{h_g}$ egyenlőség analóg módon adódik.

Innen a h integrálhatósága miatt véges $\sigma := \mu_h$ mértékre azt kapjuk, hogy $\sigma_f = \sigma_g$, amiből pedig az előbbi eset alapján $f = g$ σ-m.m. következik. Azt kell már csupán észrevenni, hogy ha egy $A \in \Omega$ halmazra

$$\sigma(A) = \mu_h(A) = \int h\cdot \chi_A \, d\mu = 0,$$

akkor $h\cdot \chi_A \geq 0$ miatt (ld. 3.3.2.6. Tétel) $h\cdot \chi_A = 0$ μ-m.m. A h-ra teljesülő $h > 0$ feltétel miatt ezért $\mu(A) = 0$. Mivel $\sigma \ll \mu$, a $\mu(A) = 0 \implies \sigma(A) = 0$ következtetés is igaz. Mindez azt jelenti, hogy a „σ-m.m." és a „μ-m.m." kijelentések ekvivalensek, így $f = g$ μ-m.m.

Ezzel az i) állítást bebizonyítottuk. A ii) igazolásához tegyük fel először azt, hogy a $\nu := \mu_f$ mérték szigma-véges, és (ld. 3.11.5. Lemma) legyen $h \in L(\nu)$, $0 < h < +\infty$. Ekkor (ld. fent) $\nu_h = \mu_{fh}$ egy véges mérték, azaz $fh \in L(\mu)$. A 3.3.2.6. Tétel szerint $fh < +\infty$ μ-m.m. Mivel $0 < h < +\infty$, ezért egyúttal $f < +\infty$ μ-m.m.

Fordítva, ha $f < +\infty$ μ-m.m., akkor legyen a μ szigma-végessége (ld. 2.3.5. Definíció) miatt létező $X_n \in \Omega$, $\mu(X_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazok sorozata olyan, hogy $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Tekintsük az

$$A_0 := \{f = +\infty\},\ A_n := \{n-1 \leq f < n\}\ \ (\in \Omega) \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

(nyilván páronként diszjunkt) halmazokat. Világos, hogy $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. A feltételek szerint $\mu(A_0) = 0$, továbbá az

$$X_{ij} := X_i \cap A_j \in \Omega \qquad (i, j \in \mathbf{N})$$

páronként diszjunkt halmazokra is igaz, hogy $X = \bigcup_{i,j=0}^{\infty} X_{ij}$. Az X_{ij}-k értelmezése miatt

$$\nu(X_{i0}) = 0,\ \nu(X_{ij}) \leq j\cdot \mu(X_i) < +\infty \qquad (i, j \in \mathbf{N}, j > 0).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a $\nu = \mu_f$ mérték szigma-véges. ■

A továbbiakban a fenti Radon-Nikodym-tétel (ld. 3.11.7. Tétel) egyik fontos alkalmazási területeként szinguláris mértékekkel foglalkozunk, és bebizonyítjuk az említett mértékekkel kapcsolatos ún. Lebesgue-féle felbontási tételt.

Legyen ehhez adott az (X, Ω) mérhető tér, a μ és a ν pedig legyen két mérték az Ω-n. A $\nu \ll \mu$ abszolút folytonosság mintegy ellentéteként vezessük be a szingularitás fogalmát az alábbi definíció szerint.

3.11.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy a ν, $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mértékek *szingulárisak*, ha megadhatók olyan X_0, $X_1 \in \Omega$ halmazok, amelyekkel a következők teljesülnek:

a) $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, $X = X_0 \cup X_1$;

b) bármelyik $A \in \Omega$ halmazra $\mu(A \cap X_0) = \nu(A \cap X_1) = 0$.

Használni szokták a ν *szinguláris a* μ*-re* elnevezést is. Állapodjunk meg abban, hogy a 3.11.9. Definícióban foglaltakat a $\nu \perp \mu$ szimbólummal fogjuk jelölni. Nyilvánvaló, hogy a szingularitás szimmetrikus reláció, azaz

$$\nu \perp \mu \iff \mu \perp \nu.$$

A bevezetőben jelzetteknek megfelelően a szingularitás, azaz a $\nu \perp \mu$ reláció bizonyos értelemben valóban az abszolút folytonosságnak, azaz a $\nu \ll \mu$-nek az ellentéte. Nevezetesen, ha $\nu \perp \mu$ és ugyanakkor $\nu \ll \mu$, akkor $\nu \equiv 0$. Ui. bármelyik $A \in \Omega$ halmaznak tekintsük a 3.11.9. Definícióbeli X_0, X_1 halmazokkal az

$$A = (A \cap X_0) \cup (A \cap X_1)$$

alakú diszjunkt halmazokra való felbontását. Ekkor a 3.11.9. Definíció alapján

$$\nu(A) = \nu(A \cap X_0) + \nu(A \cap X_1) = \nu(A \cap X_0).$$

Mivel $\mu(A \cap X_0) = 0$, ezért $\nu \ll \mu$ miatt $\nu(A \cap X_0) = 0$ is igaz, így $\nu(A) = 0$.

Ha a μ és a ν előjeles mértékek az Ω-n (ld. 2.11.), akkor a 3.11.9. Definíció a) feltételét meghagyva a b) feltételét módosítsuk a következőre (ld. 2.11.4. Definíció):

$$[\mu](A \cap X_0) = [\nu](A \cap X_1) = 0,$$

és továbbra is mondjuk ekkor azt, hogy a ν szinguláris a μ-re. Előjeles mértékek esetén is használjuk a $\nu \perp \mu$ szimbólumot.

Könnyen meggondolható, hogy előjeles mértékekre is igaz a mértékekre fent említett állítás: ha $\nu \perp \mu$ és $\nu \ll \mu$, akkor $\nu \equiv 0$.

3.11.10. Tétel (Lebesgue-felbontás). *Legyen az* (X, Ω) *tetszőleges mérhető tér, a* μ *és a* ν *két szigma-véges mérték az* Ω*-n. Ekkor egyértelműen léteznek olyan* ν_0, ν_1 *mértékek az* Ω*-n, hogy*

$$\nu = \nu_0 + \nu_1, \quad \nu_0 \perp \mu, \quad \nu_1 \ll \mu.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a μ, ν mértékek egyaránt végesek. Mivel a $\mu + \nu$ összeg is nyilván szigma-véges mérték, valamint $\nu \ll \mu + \nu$, ezért a Radon-Nikodym-tétel

(3.11.7. Tétel) szerint egy alkalmas $f \in L^+$ függvénnyel $\nu = (\mu+\nu)_f$. Tehát minden $A \in \Omega$ halmazra

$$\nu(A) = \int_A f\, d(\mu+\nu) = \int_A f\, d\mu + \int_A f\, d\nu.$$

Írjuk az előbbi egyenlőségben az A helyébe az $A := \{f > 1\}$ halmazt, amikor is a

$$\nu(A) \geq \int_A f\, d\nu \geq \int_A 1\, d\nu = \nu(A)$$

egyenlőtlenséget, tehát a $\nu(A) = \int_A f\, d\nu$, és így a

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu + \int_A f\, d\nu = \int_A f\, d\nu$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel $\nu(A) < +\infty$, ezért $\int_A f\, d\nu < +\infty$ is igaz, következésképpen $\int_A f\, d\mu = 0$. Ezért

$$\int \chi_A\, d\nu = \nu(A) = \int_A f\, d\nu = \int f\cdot \chi_A\, d\nu.$$

Mindezeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\int (f-1)\cdot \chi_A\, d\nu = 0,$$

amiből $(f-1)\cdot \chi_A \in L^+$ alapján (ld. 3.3.2.6. Tétel) $(f-1)\cdot \chi_A = 0$ ν-m.m. következik. Ez – figyelembe véve az A halmaz definícióját – csak úgy lehetséges, ha $\nu(A) = 0$. Tehát egyúttal $\nu(Y \cap \{f > 1\}) = 0$ $(Y \in \Omega)$ is igaz.

Legyen

$$X_0 := \{f = 1\},\ X_1 := \{f < 1\},\ \nu_0(Y) := \nu(Y \cap X_0),$$
$$\nu_1(Y) := \nu(Y \cap X_1) \qquad (Y \in \Omega).$$

Az világos, hogy az így definiált ν_0, ν_1 halmazfüggvények mértékek az Ω-n, továbbá minden $Y \in \Omega$ halmazra

$$\nu(Y) = \nu_0(Y) + \nu_1(Y) + \nu(Y \cap \{f > 1\}) = \nu_0(Y) + \nu_1(Y).$$

Ezzel beláttuk, hogy $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

A tételben jelzett szingularitáshoz tekintsük az alábbi egyenlőséget:

$$\nu(X_0) = \int_{X_0} f\, d\mu + \int_{X_0} f\, d\nu = \int_{X_0} 1\, d\mu + \int_{X_0} 1\, d\nu = \mu(X_0) + \nu(X_0).$$

A feltételek szerint a ν véges, ezért innen $\mu(X_0) = 0$ adódik, amiből $\mu(Y \cap X_0) = 0$ és

$$\nu_0(Y \cap (X \setminus X_0)) = \nu(Y \cap (X \setminus X_0) \cap X_0) = \nu(\emptyset) = 0$$

is rögtön következik minden Ω-beli Y halmazra. Tehát

$$X_0,\ X \setminus X_0 \in \Omega,\ X_0 \cap (X \setminus X_0) = \emptyset,\ X = X_0 \cup (X \setminus X_0)$$

miatt $\nu_0 \perp \mu$ is igaz.

Megmutatjuk, hogy $\nu_1 \ll \mu$. Ui. tetszőleges $Y \in \Omega$, $\mu(Y) = 0$ esetén

$$\nu_1(Y) = \nu(Y \cap X_1) = \int_{Y \cap X_1} 1\, d\nu = \int_{Y \cap X_1} f\, d\mu + \int_{Y \cap X_1} f\, d\nu = \int_{Y \cap X_1} f\, d\nu,$$

ezért

$$\int_{Y \cap X_1} (1-f)\, d\nu = \int (1-f) \cdot \chi_{Y \cap X_1}\, d\nu = 0.$$

Az előbbieket figyelembe véve $\nu(\{f > 1\}) = 0$, más szóval $f \le 1$ ν-m.m., következésképpen $(1-f) \cdot \chi_{Y \cap X_1} \in L^+$. Így a 3.3.2.6. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy

$$(1-f) \cdot \chi_{Y \cap X_1} = 0 \quad \nu\text{-m.m.}$$

Mivel tetszőleges $x \in Y \cap X_1$ helyen $1 - f(x) > 0$, ezért szükségszerűen

$$\nu_1(Y) = \nu(Y \cap X_1) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\nu_1 \ll \mu$.

Lássuk be, hogy a most vizsgált véges ν, μ mértékek esetén a tételben jelzett egyértelműség is igaz. Ha ui. $\nu = \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1$ is egy, a tétel feltételeinek eleget tevő felbontás, akkor a $\nu_0 - \tilde{\nu}_0$, $\tilde{\nu}_1 - \nu_1$ (nyilván) előjeles mértékekre

$$\nu_0 - \tilde{\nu}_0 = \tilde{\nu}_1 - \nu_1 \text{ és } (\nu_0 - \tilde{\nu}_0) \perp \mu,\ (\tilde{\nu}_1 - \nu_1) \ll \mu.$$

Tehát $(\nu_i - \tilde{\nu}_i) \perp \mu$ és $(\nu_i - \tilde{\nu}_i) \ll \mu$ $(i = 0, 1)$. Így a tétel előtt az előjeles mértékkel kapcsolatban tett megjegyzések szerint $\nu_i = \tilde{\nu}_i$ $(i = 0, 1)$.

Ha a μ, ν mértékek közül legalább az egyik nem véges, akkor a „szokásos" módszert alkalmazhatjuk: a szigma-végesség (ld. 2.5.3. Definíció) miatt megadhatók olyan, páronként diszjunkt Ω-beli X_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok, valamint ugyanilyen tulajdonságú Y_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok, hogy

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n,\ \ \mu(X_n),\ \nu(Y_n) < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az $X = \bigcup_{m,n=0}^{\infty} (X_n \cap Y_m)$ előállítás is nyilván egy páronként diszjunkt, Ω-beli halmazokból álló felbontása az X-nek, és

$$\mu(X_n \cap Y_m),\ \nu(X_n \cap Y_m) < +\infty \qquad (m, n \in \mathbf{N}).$$

Legyenek a μ_{nm}, ν_{nm} $(n, m \in \mathbf{N})$ véges mértékek a következőképpen definiálva:

$$\mu_{nm}(A) := \mu(A),\ \nu_{nm}(A) := \nu(A) \qquad (\Omega \ni A \subset X_n \cap Y_m).$$

Minden $n, m \in \mathbf{N}$ esetén alkalmazható tehát a véges mértékekre már igazolt állítás, miszerint vannak olyan ν_{nm}^0, ν_{nm}^1 mértékek az $\{A \in \Omega : A \subset X_n \cap Y_m\}$ szigma-algebrán, hogy

$$\nu_{nm} = \nu_{nm}^0 + \nu_{nm}^1,\ \nu_{nm}^0 \perp \mu_{nm},\ \nu_{nm}^1 \ll \mu_{nm}$$

teljesül. Ha ezek után a ν_0, ν_1 halmazfüggvényeket a

$$\nu_0(A) := \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}^0(A \cap X_n \cap Y_m) \qquad (A \in \Omega),$$

$$\nu_1(A) := \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}^1(A \cap X_n \cap Y_m) \qquad (A \in \Omega)$$

előírással értelmezzük, akkor könnyen belátható módon mind a ν_0, mind a ν_1 halmazfüggvény mérték az Ω-n. Továbbá tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra

$$\nu(A) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu(A \cap X_n \cap Y_m) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}(A \cap X_n \cap Y_m) =$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}^0(A \cap X_n \cap Y_m) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}^1(A \cap X_n \cap Y_m) = \nu_0(A) + \nu_1(A),$$

tehát $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

Mutassuk meg, hogy $\nu_1 \ll \mu$. Ha ui. az $A \in \Omega$ egy olyan halmaz, amire $\mu(A) = 0$, akkor bármelyik $n, m \in \mathbf{N}$ index mellett $\mu(A \cap X_n \cap Y_m) = 0$ is igaz, amiből pedig

$$\mu_{nm}(A \cap X_n \cap Y_m) = 0$$

következik. Mivel $\nu_{nm}^1 \ll \mu_{nm}$, ezért egyúttal $\nu_{nm}^1(A \cap X_n \cap Y_m) = 0$ is fennáll. Figyelembe véve a ν_1 mérték definícióját, innen máris megkapjuk a $\nu_1(A) = 0$ egyenlőséget. Így valóban igaz, hogy $\nu_1 \ll \mu$.

Azt kell még igazolnunk, hogy $\nu_0 \perp \mu$. Tudjuk, hogy minden $n, m \in \mathbf{N}$ mellett $\nu_{nm}^0 \perp \mu_{nm}$, ezért innen egy

$$X_n \cap Y_m = X_{nm}^0 \cup X_{nm}^1$$

felbontás adódik (ld. 3.11.9. Definíció) a következő tulajdonságokkal: X_{nm}^0, $X_{nm}^1 \in \Omega$, és

$$X_{nm}^0 \cap X_{nm}^1 = \emptyset,\ \mu_{nm}(A \cap X_{nm}^0) = \nu_{nm}^0(A \cap X_{nm}^1) = 0 \qquad (\Omega \ni A \subset X_n \cap Y_m).$$

Legyen

$$X_0 := \bigcup_{n,m=0}^{\infty} X_{nm}^0,\ X_1 := \bigcup_{n,m=0}^{\infty} X_{nm}^1,$$

ekkor $X_0,\ X_1 \in \Omega,\ \ X = X_0 \cup X_1,\ X_0 \cap X_1 = \emptyset,$ és minden $A \in \Omega$ halmazra

$$\mu(A \cap X_0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mu_{nm}(A \cap X_{nm}^0) = 0,$$

$$\nu_0(A \cap X_1) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_{nm}^0(A \cap X_{nm}^1) = 0.$$

Tehát valóban fennáll, hogy $\nu_0 \perp \mu$.

Hátra van még az egyértelműség bizonyítása. Tegyük fel ehhez, hogy egy $\nu = \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_1$ felbontás is eleget tesz a tétel feltételeinek. Ekkor tetszőleges $A \in \Omega$ esetén

$$\nu(A) = \tilde{\nu}_0(A) + \tilde{\nu}_1(A) =$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\nu}_0(A \cap X_n \cap Y_m) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\nu}_1(A \cap X_n \cap Y_m) =$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_0(A \cap X_n \cap Y_m) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \nu_1(A \cap X_n \cap Y_m).$$

Innen minden $n, m \in \mathbf{N}$ és $\Omega \ni B \subset X_n \cap Y_m$ mellett azt kapjuk, hogy

$$\nu(B) = \tilde{\nu}_0(B) + \tilde{\nu}_1(B) = \nu_0(B) + \nu_1(B),$$

amiből a szóban forgó $\nu = \nu_0 + \nu_1$ előállításnak a véges mértékekre már igazolt egyértelműségét felhasználva $\tilde{\nu}_0(B) = \nu_0(B)$ és $\tilde{\nu}_1(B) = \nu_1(B)$ adódik. Utóbbiból (a $\nu(A)$ fenti felbontásaira tekintettel) már könnyen belátható, hogy $\tilde{\nu}_0 = \nu_0,\ \tilde{\nu}_1 = \nu_1$. ■

3.12. Megjegyzések

i) Ha $X \neq \emptyset$ és adott az (X, Ω, μ) mértéktér, az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvénynek pedig van integrálja (ld. 3.3.3.), akkor könnyű meggondolni, hogy a

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu \qquad (A \in \Omega)$$

egy előjeles mérték az Ω-n (ld. 2.11.), és (ld. 2.11.5. Tétel)

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ \, d\mu,\ \nu^-(A) = \int_A f^- \, d\mu \qquad (A \in \Omega).$$

ii) Legyen (ld. 2.7.1.) $X := \mathbf{R},\ \Omega := \hat{\Omega}_1,\ \mu := \hat{\mu}_1,$ és $\Omega_0 := \{A \in \hat{\Omega}_1 : \hat{\mu}_1(A) = 0\}$. Ha

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & (A \in \Omega_0) \\ +\infty & (A \in \hat{\Omega}_1 \setminus \Omega_0), \end{cases}$$

akkor (egyszerűen beláthatóan) a ν mérték az $\hat{\Omega}_1$-en, és $\nu \ll \mu$. Ugyanakkor minden $\delta > 0$ számra

$$\mu([0,\delta)) = \delta,\ \nu([0,\delta)) = +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a 3.11.4. Lemmában a ν végessége általában nem hagyható el.

iii) Valamilyen (X, Ω, μ) mértéktér esetén tekintsük az Ω-n értelmezett korlátos

$$\nu : \Omega \to [0, +\infty)$$

mérékeknek egy $\mathcal{M} \neq \emptyset$ halmazát. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M}$ halmaz elemei a μ-re nézve *egyenlő mértékben abszolút folytonosak*, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges $A \in \Omega$, $\mu(A) < \delta$ és minden $\nu \in \mathcal{M}$ esetén $\nu(A) < \varepsilon$. Ha pl. $\emptyset \neq \mathcal{L} \subset L^1(\mu)$,

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathcal{L}} := \{\mu_{|f|} : f \in \mathcal{L}\},$$

és az $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$-re teljesül a most mondott kritérium, akkor (az előbbi jelölésekkel)

$$\int_A |f|\, d\mu = \int |f| \cdot \chi_A\, d\mu < \varepsilon \qquad (A \in \Omega,\ \mu(A) < \delta,\ f \in \mathcal{L}).$$

iv) Vitali-tételként ismert az alábbi állítás: *ha az* i)*-beli* (X, Ω, μ) *mértéktér olyan, hogy a* μ *mérték véges,* $f, f_n \in L^1$ $(n \in \mathbf{N})$,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.},$$

és az

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\{|f_n| : n \in \mathbf{N}\}}$$

halmaz elemei a μ*-re nézve egyenlő mértékben abszolút folytonosak* (ld. iii)), *akkor* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$.

Valóban, ha $\varepsilon > 0$ mellett $\delta > 0$ jelöli a iii) megjegyzésben a szóban forgó $\mathcal{M}$-hez létező pozitív számot, akkor minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < \delta$ esetén

$$\|(f - f_n) \cdot \chi_A\|_1 \leq \int |f_n \cdot \chi_A|\, d\mu + \int |f \cdot \chi_A|\, d\mu < \varepsilon + \int |f \cdot \chi_A|\, d\mu \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.11.4. Lemma szerint az itt szereplő δ-ról az is feltehető, hogy az előbbi A halmazokra $\int |f \cdot \chi_A|\, d\mu < \varepsilon$ is igaz. Legyen

$$A_n(\delta) := \{|f - f_n| \geq \delta\},\ B_n(\delta) := \{|f - f_n| < \delta\},$$

ekkor

$$\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n| \cdot \chi_{A_n(\delta)}\, d\mu + \int |f - f_n| \cdot \chi_{B_n(\delta)}\, d\mu \leq$$

$$\leq \int |f - f_n| \cdot \chi_{A_n(\delta)}\, d\mu + \delta \cdot \mu(X) = \|(f - f_n) \cdot \chi_{A_n(\delta)}\|_1 + \delta \cdot \mu(X) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty}|f-f_n|=0$ μ-m.m., ezért (ld. 3.11.3.) $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n(\delta))=0$. Tehát egy alkalmas $N\in\mathbf{N}$ indexszel $\mu(A_n(\delta))<\delta$ $(N<n\in\mathbf{N})$. Így a fentiekre tekintettel

$$\|f-f_n\|_1<2\cdot\varepsilon+\delta\cdot\mu(X)\qquad(N<n\in\mathbf{N}),$$

amiből a Vitali-tétel állítása már nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy az előbbi Vitali-tétel feltételei között az $f\in L^1$ helyett elegendő azt tudni, hogy az f mérhető, és

$$\sup\{\|f_n\|_1:n\in\mathbf{N}\}<+\infty.$$

Ekkor ui. a Fatou-lemma (3.3.2.7. Tétel) alapján $f\in L^1$ automatikusan teljesül. Pl. ez a helyzet akkor, ha egy $g\in L^1$ függvénnyel $|f_n|\le g$ μ-m.m. $(n\in\mathbf{N})$ igaz (ld. 3.5.5. Tétel).

v) Tekintsük a ii) megjegyzésben szereplő $(\mathbf{R},\hat{\Omega}_1,\nu)$ mértékteret. Világos, hogy a ν nem szigma-véges (ld. 2.3.5. Definíció), hiszen az ellenkező esetben a ν definíciója alapján az $\mathbf{R}$ előállítható lenne megszámlálható sok, Lebesgue-szerint (ld. 2.7.1.) 0-mértékű $A_n\subset\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N})$ halmaz egyesítéseként ami nem igaz. Tehát erre a mértéktérre nem teljesül a 3.11.5. Lemma, amit talán nem haszontalan „direktben" is meggondolni. Ha ui. egy $h\in L(\nu)$ függvényre

$$0<h(x)<+\infty\qquad(x\in\mathbf{R})$$

állna fenn, akkor – lévén egyúttal $h\in L^+(\nu)$ is igaz – egy alkalmasan megválasztott $h_n\in L_0^+(\nu)$ $(n\in\mathbf{N})$ monoton növekedő függvénysorozattal

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=h(x)\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n\,d\nu=\int h\,d\nu\ \ (<+\infty)$$

lenne. Amennyiben valamilyen $x\in\mathbf{R}$ és $n\in\mathbf{N}$ esetén $h_n(x)>0$, úgy az

$$\alpha_n:=\min\left(\mathcal{R}_{h_n}\setminus\{0\}\right)$$

jelöléssel

$$\alpha_n>0,\ \alpha_n\cdot\nu(\{h_n>0\})\le\int h_n\,d\nu\le\int h\,d\nu<+\infty$$

miatt $\{h_n>0\}\in\Omega_0$. Következésképpen

$$A:=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{h_n>0\}\in\Omega_0,$$

tehát bármilyen $y\in\mathbf{R}\setminus A$ pontban $h_n(y)=0$ $(n\in\mathbf{N})$, és így $h(y)=0$. Mivel $\mathbf{R}\ne\Omega_0$, ezért $A\ne\mathbf{R}$, ami azt jelenti, hogy a h nem lehet mindenütt pozitív.

vi) Szokás a Radon-Nikodym-tételben (3.11.7. Tétel) szereplő f függvényt a ν mérték μ-szerinti *Radon-Nikodym-deriváltjának* is nevezni, és az $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$, vagy a $d\nu = f\,d\mu$ szimbólumot használni. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int g\,d\nu = \int fg\,d\mu \qquad (g \in L^+).$$

Ez ui. $A \in \Omega$, $g := \chi_A$ esetén a következőt jelenti:

$$\int g\,d\nu = \nu(A) = \mu_f(A) = \int f\cdot \chi_A\,d\mu = \int fg\,d\mu.$$

Következésképpen (ld. 3.3.1.4. Tétel) az $\int g\,d\nu = \int fg\,d\mu$ egyenlőség minden $g \in L_0^+$ függvényre is fennáll. Ha viszont $g \in L^+$, akkor egy alkalmas

$$g_n \in L_0^+,\ g_n \le g_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozattal $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ és $\int g\,d\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\nu$. Világos, hogy egyúttal az (fg_n) sorozat is monoton nőve tart az fg-hez, így a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) és az előbbiek szerint

$$\int fg\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int fg_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\nu = \int g\,d\nu.$$

Megjegyezzük, hogy az előbbiekben $g \in L^1(\nu)$ is írható. Valóban, ekkor a $g = g^+ - g^-$ felbontásban $g^\pm \in L^1(\nu) \cap L^+$, ezért

$$\int fg^\pm\,d\mu = \int g^\pm\,d\nu \in \mathbf{R}.$$

Így

$$\int g\,d\nu = \int g^+\,d\nu - \int g^-\,d\nu = \int fg^+\,d\mu - \int fg^-\,d\mu = \int f(g^+ - g^-)\,d\mu = \int fg\,d\mu.$$

vii) Legyen (ld. 2.7.1.) $X := \mathbf{R}$, $A \in \hat{\Omega}_1$, és (ld. 3.4. v) megjegyzés)

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (0 \notin A) \\ 1 & (0 \in A). \end{cases}$$

Ekkor a μ mérték (az ún. *Dirac-mérték*). Könnyű megmutatni, hogy nem létezik olyan $f \in L^+(\hat{\mu}_1)$ függvény, hogy $\mu = \hat{\mu}_{1_f}$ teljesülne. Különben ui.

$$0 = \mu((0,+\infty)) = \int f\cdot \chi_{(0,+\infty)}\,d\hat{\mu}_1,$$

$$0 = \mu((-\infty, 0)) = \int f \cdot \chi_{(-\infty,0)} \, d\hat{\mu}_1.$$

Mivel $f \cdot \chi_{(0,+\infty)}, \; f \cdot \chi_{(-\infty,0)} \geq 0 \quad \hat{\mu}_1$-m.m., ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$f \cdot \chi_{(0,+\infty)}, \quad f \cdot \chi_{(-\infty,0)} = 0 \quad \hat{\mu}_1\text{-m.m.}$$

Innen persze $f = 0 \quad \hat{\mu}_1$-m.m. is következne, amiből meg $\mu = \hat{\mu}_{1_f} = 0$ adódna, ami viszont nem igaz.

viii) Ha az (X, Ω, μ) egy valószínűségi mértéktér (Kolmogorov-mező) (ld. 2.6. xvi) megjegyzés), azaz $\mu(X) = 1$, akkor bármilyen $\Omega_0 \subset \Omega$ rész-szigma-algebra és $f \in L^+$ függvény esetén tekintsük a

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu \qquad (A \in \Omega_0)$$

mértéket az Ω_0-on. Ez a mérték nyilván abszolút folytonos a μ mértéknek az Ω_0-ra vett σ leszűkítésére vonatkozóan (ld. ezzel kapcsolatban a 3.3.2.6. Tételt), ezért a μ (és így a σ) végessége miatt alkalmazható a Radon-Nikodym-tétel (3.11.7. Tétel): van olyan

$$f_0 : X \to [0, +\infty]$$

függvény, ami az Ω_0 szigma-algebrára nézve mérhető (azaz bármelyik $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $f_0^{-1}[A] \in \Omega_0$), és

$$\nu = \sigma_{f_0}.$$

Tetszőleges $A \in \Omega_0$ halmazra igaz tehát a következő egyenlőség:

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\sigma = \int_A f_0 \, d\mu.$$

Az f_0 függvényt az $f \quad \Omega_0$-ra vonatkozó *feltételes várható értékének* nevezzük. Speciálisan, ha $\Omega_0 = \Omega$, akkor $f_0 = f \quad \mu$-m.m., ha pedig $\Omega_0 := \{\emptyset, X\}$, akkor az f_0 konstansfüggvény, és $f_0 = \int f_0 \, d\mu = \int f \, d\mu$.

ix) Legyen az $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az (X, Ω, μ) egy tetszőleges mértéktér, és tegyük fel, hogy adott egy

$$T : X \to X$$

(Ω, Ω)-mérhető leképezés (tehát bármilyen $A \in \Omega$ halmaz $T^{-1}[A]$ ősképe is eleme az Ω-nak). Jelölje $\tilde{\mu}$ a μ mértéknek a T által létesített képét (ld. 2.7.). Ha a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), és minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazra

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(T^{-1}[A]) = 0,$$

akkor van olyan $q \in L^+(\mu)$, hogy tetszőleges $f \in L(\mu)$, $A \in \Omega$ esetén

$$\int_A f \cdot q \, d\mu = \int_B f \circ T \, d\mu \qquad (B := T^{-1}[A]).$$

Valóban, a 3.4. xv) megjegyzés szerint

$$\int_B f \circ T \, d\mu = \int (f \circ T) \cdot \chi_B \, d\mu = \int (f \circ T) \cdot (\chi_A \circ T) \, d\mu =$$

$$\int (f \cdot \chi_A) \circ T \, d\mu = \int f \cdot \chi_A \, d\tilde{\mu}.$$

A feltételek miatt $\tilde{\mu} \ll \mu$, ezért a Radon-Nikodym-tétel (3.11.7. Tétel) alapján egy alkalmas $q \in L^+(\mu)$ függvénnyel $\tilde{\mu} = \mu_q$, következésképpen (ld. 3.11.2. Tétel)

$$\int_B f \circ T \, d\mu = \int_B f \, d\tilde{\mu} = \int f \cdot \chi_A \, d\mu_q = \int_A f \cdot q \, d\mu.$$

x) Legyen ismét egy $X \neq \emptyset$ halmazzal adott az (X, Ω, μ) mértéktér, a μ-ről tegyük fel, hogy szigma-véges, és legyen a ν olyan mérték az Ω-n, amire $\nu \leq \mu$ igaz. Ekkor megadható egy $L^+(\mu) \ni f \leq 1$ függvény úgy, hogy $\nu = \mu_f$. Ui. $\nu \leq \mu$ miatt nyilván $\nu \ll \mu$ is igaz, ezért azt kell megmutatni, hogy (ld. vi)) $f := \dfrac{d\nu}{d\mu} \leq 1$. Legyen ehhez

$$A_n := \{f \geq 1 + 1/(n+1)\} \ (\in \Omega) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{f > 1\} =: B.$$

Ha $\mu(B) > 0$ lenne, akkor egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ mellett $\mu(A_n) > 0$ is teljesülne. A μ szigma-végessége (ld. 2.5.3. Definíció) miatt azonban valamilyen

$$B_k \in \Omega, \ B_k \subset B_{k+1}, \ \mu(B_k) < +\infty \qquad (k \in \mathbf{N})$$

sorozattal $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$. Innen (ld. 2.3.1.4. Tétel) $\mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_n \cap B_m)$ miatt következne olyan $m \in \mathbf{N}$ index létezése, amivel

$$0 < \mu(A_n \cap B_m) \leq \mu(A_n \cap B_m) < +\infty.$$

Tehát

$$\mu(A_n \cap B_m) \geq \nu(A_n \cap B_m) = \mu_f(A_n \cap B_m) = \int f \cdot \chi_{A_n \cap B_m} \, d\mu \geq$$

$$\Big(1 + 1/(n+1)\Big) \cdot \mu(A_n \cap B_m) > \mu(A_n \cap B_m),$$

és ez nyilván nem igaz.

xi) Nem nehéz belátni, hogy ha az (X, Ω) egy mérhető tér (ld. 2.5.), akkor az Ω-n értelmezett mértékek $\mathcal{M}(\Omega)$ halmazában a

$$\mu \sim \nu \iff \mu \ll \nu \ll \mu \quad (\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega))$$

reláció egy ekvivalencia. Ugyanígy adódik az is, hogy tetszőleges $\mathcal{M}(\Omega)$-beli μ, ν esetén

$$(*) \qquad \mu \sim \nu \iff \{A \in \Omega : \mu(A) = 0\} = \{A \in \Omega : \nu(A) = 0\}.$$

Mutassuk meg viszont, hogy amennyiben $X \neq \emptyset$, a $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ mértékek szigma-végesek, akkor

$$\mu \sim \nu \iff \mu = \nu_f \quad (f \in L^+(\nu),\ 0 < f < +\infty \quad \nu\text{-m.m.}).$$

Ha ui. $\mu \sim \nu$, akkor a 3.11.7. Tétel alapján egy-egy alkalmas $f \in L^+(\nu)$, $g \in L^+(\mu)$ függvénnyel $\mu = \nu_f$ és $\nu = \mu_g$ írható. Tehát (ld. 3.11.2. Tétel) $\mu = \mu_{f \cdot g}$. Ha

$$e(x) := 1 \qquad (x \in X),$$

akkor persze $\mu = \mu_e$, így a 3.11.8. (egyértelműségi) Tételt felhasználva $fg = e$ μ-m.m. adódik, amiből meg $(*)$ alapján $0 < f < +\infty$ ν-m.m. már triviálisan következik.

Fordítva, ha valamilyen $f \in L^+(\nu)$, $0 < f < +\infty$ ν-m.m. függvénnyel $\mu = \nu_f$, akkor egyrészt $\mu \ll \nu$, másrészt minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ esetén

$$0 = \mu(A) = \nu_f(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\nu.$$

Innen (ld. 3.3.2.6. Tétel) $f \cdot \chi_A = 0$ ν-m.m., azaz $\nu(A) = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\nu \ll \mu$ is fennáll: $\mu \sim \nu$.

xii) A Radon-Nikodym-tétel (3.11.7. Tétel) előjeles mértékekre való általánosítása (amint arról könnyű meggyőződni) a következő:

ha az (X, Ω, μ) egy szigma-véges mértéktér, a ν pedig egy előjeles mérték az Ω-n és $\nu \ll \mu$, akkor van olyan μ-m.m. egyértelműen meghatározott mérhető $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény, hogy

$$\nu(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu \qquad (A \in \Omega).$$

xiii) Ha a viii) megjegyzésben (az abban használt jelölésekkel) az f függvényről $f \in L^+$ helyett integrálhatóságot tételezünk fel (azaz $f \in L^1$), akkor az ott definiált ν halmazfüggvény nyilván előjeles mérték (ld. 2.11.), ami (ld. xii)) továbbra is abszolút folytonos a μ mértéknek az Ω_0-ra vett leszűkítésére vonatkozóan. A xii) megjegyzést

figyelembe véve tehát a viii)-ban kapott (μ-m.m. egyértelműen meghatározott) f_0 függvény – az f Ω_0-ra vonatkozó *feltételes várható értéke* – integrálható. Az

$$E_{\Omega_0}(f) := f_0$$

jelöléssel egy E_{Ω_0} operátort értelmeztünk az $L^1 := L^1(\mu)$-n (az Ω_0-ra vonatkozó *feltételes várható érték operátort*), aminek számos jó tulajdonsága révén igen fontos szerep jut a matematika különböző fejezeteiben, így pl. (a nem meglepő valószínűségszámítási alkalmazások mellett) az ortogonális sorok elméletében. Az eddigiek alapján nem okoz nehézséget az alábbi állítások belátása:

a) Az E_{Ω_0} pozitív operátor, azaz $E_{\Omega_0}(f) \geq 0 \quad (0 \leq f \in L^1)$.

b) Ha az Ω_* szigma-algebrára $\Omega_* \subset \Omega_0$ teljesül, akkor

$$E_{\Omega_*} \circ E_{\Omega_0} = E_{\Omega_0} \circ E_{\Omega_*} = E_{\Omega_*}.$$

c) Legyen $f \in L^1$, $\lambda \in L^1$ pedig olyan, az Ω_0-ra nézve mérhető függvény, amire $\lambda \cdot f \in L^1$. Ekkor

$$E_{\Omega_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot E_{\Omega_0}(f).$$

d) $1 < p, q < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p$, $h \in L^q$ esetén

$$|E_{\Omega_0}(fh)| \leq \Big(E_{\Omega_0}(|f|^p)\Big)^{1/p} \cdot \Big(E_{\Omega_0}(|h|^q)\Big)^{1/q},$$

ami nem más, mint a Hölder-egyenlőtlenség (3.5.1. Tétel) általánosítása.

e) Tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ mellett az

$$E_{\Omega_0} : L^p \to L^p$$

leképezés korlátos lineáris operátor, azaz

$$E_{\Omega_0}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot E_{\Omega_0}(f) + \beta \cdot E_{\Omega_0}(g) \qquad (f, g \in L^p,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R})$$

és

$$\|E_{\Omega_0}(f)\|_p \leq \|f\|_p \qquad (f \in L^p),$$

ahol

$$\min\{M \geq 0 : \|E_{\Omega_0}(f)\|_p \leq M \cdot \|f\|_p \ \ (f \in L^p)\} = 1.$$

xiv) Tekintsük (ld. 2.7.1.) az $(\mathbf{R}, \hat{\Omega}_1, \hat{\mu}_1)$ (Lebesgue-féle) mértékteret, és tegyük fel, hogy a

$$\nu : \hat{\Omega}_1 \to [0, +\infty]$$

mértéket az $\mathbf{I}$ félgyűrűn értelmezett valamilyen nem-negatív, additív és véges halmazfüggvény kiterjesztése révén kaptuk (ld. 2.3.3.). Ekkor a ν mérték nem más, mint a

$$\varphi_\nu(x) := \begin{cases} \nu([0,x)) & (x \geq 0) \\ -\nu([x,0)) & (x < 0) \end{cases}$$

függvény által generált Lebesgue-Stieltjes-mérték (ld. 2.7.1.). Továbbá a fenti φ_ν függvény valamilyen $x \in \mathbf{R}$ pontban akkor és csak akkor folytonos, ha $\nu(\{x\}) = 0$.

Egy $J \subset \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett $f : J \to \mathbf{R}$ függvényt *abszolút* (vagy *teljesen*) *folytonosnak* nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy hacsak $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ és a véges sok, páronként diszjunkt

$$(a_i, b_i) \qquad (a_i, b_i \in J,\ i \in \mathcal{N})$$

intervallumokból álló intervallumrendszerre

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} (b_i - a_i) < \delta$$

teljesül, akkor

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

is igaz. Világos, hogy az abszolút folytonosság erősebb követelmény egy függvényt illetően, mint annak az egyenletes folytonossága.

Mutassuk meg, hogy az előbbi ν mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos a $\hat{\mu}_1$-re nézve, ha a φ_ν függvény bármelyik kompakt intervallumra való leszűkítése abszolút folytonos. Valóban, ha a ν abszolút folytonos a $\hat{\mu}_1$-re vonatkozóan és $J \subset \mathbf{R}$ egy kompakt intervallum, akkor a 3.11.4. Lemma szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\hat{\Omega}_1 \ni A \subset J$, $\hat{\mu}_1(A) < \delta$ esetén $\nu(A) < \varepsilon$. Következésképpen az előbbi (a_i, b_i) $(i \in \mathcal{N})$ intervallumrendszerre (a most mondott δ-val)

$$\hat{\mu}_1\Big(\bigcup_{i \in \mathcal{N}} [a_i, b_i)\Big) = \sum_{i \in \mathcal{N}} (b_i - a_i) < \delta$$

miatt

$$\nu\Big(\bigcup_{i \in \mathcal{N}} [a_i, b_i)\Big) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i \in \mathcal{N}} |\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)| < \varepsilon$$

teljesül, tehát a φ_ν függvény abszolút folytonos a J-n. (Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a J-re tett kompaktsági feltételből adódó $\nu(J) < +\infty$ becslést a 3.11.4. Lemma alkalmazásakor használtuk ki.)

Fordítva, ha a φ_ν-re jelzett abszolút folytonosság teljesül és $J = [a, b]$ egy kompakt intervallum, akkor legyen $\tilde{J} := [a - 1, b + 1]$. Válasszuk továbbá valamilyen $\varepsilon > 0$

szám mellett a $\delta > 0$ számot úgy, ahogyan azt a φ_ν függvény $\tilde{J}$-ra vett leszűkítésének az abszolút folytonossága biztosítja. Legyen $A \subset J$, $\hat{\mu}_1(A) = 0$, és $[a_i, b_i) \in \mathbf{I}$ $(i \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt intervallumok olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i), \ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta.$$

Ekkor persze minden $\mathbf{N} \ni n$-re fennáll a $\sum_{i=0}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ egyenlőtlenség, így a

$$\sum_{i=0}^{n} (\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)) < \varepsilon$$

is. Ebből tehát a $\nu^*(A)$ külső mértékre (ld. 1.3., 2.5.) a

$$\nu^*(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_\nu(b_i) - \varphi_\nu(a_i)) \leq \varepsilon$$

becslés következik, amiből $\nu(A) = 0$. Tetszőleges $A \in \hat{\Omega}_1$, $\hat{\mu}_1(A) = 0$ esetén

$$\hat{\mu}_1(A \cap [-n, n]) = 0,$$

ezért az előbbiek szerint $\nu(A \cap [-n, n]) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, amiből $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap [-n, n])$ miatt $\nu(A) = 0$ már adódik. Tehát a ν valóban abszolút folytonos a $\hat{\mu}_1$-re nézve.

xv) Legyen $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy monoton növő, bármelyik kompakt intervallumon (ld. xiv)) abszolút folytonos függvény. Ekkor a xiv) megjegyzés szerint a φ által generált ν Lebesgue-Stieltjes-mérték (ld. 2.7.1.) abszolút folytonos a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mértékre nézve. A Radon-Nikodym-tétel (3.11.7. Tétel) alapján ezért van olyan $f \in L^+(\hat{\mu}_1)$, hogy

$$\nu(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\hat{\mu}_1 \qquad (A \in \hat{\Omega}_1).$$

Ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ és $A := [a, b]$, akkor

$$\nu(A) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int f \cdot \chi_{[a,b)} \, d\hat{\mu}_1.$$

Rögzítsük az $a \in \mathbf{R}$ pontot, és állapodjunk meg abban, hogy $b \in \mathbf{R}$, $b < a$ esetén $\chi_{[a,b]} := -\chi_{[b,a]}$, ekkor

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int f \cdot \chi_{[a,x]} \, d\hat{\mu}_1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A Riemann-integrállal kapcsolatban megszokott terminológiával élve tehát φ egy *integrálfüggvény*. Megmutatható, hogy ebből a szempontból a φ monotonitása (és az $f \geq 0$ feltétel) nem lényeges, valamint, hogy a φ-re tett feltétel szükséges is az integrálfüggvényként való előállításához.

xvi) A x) megjegyzésben megmutattuk, hogy ha a Radon-Nikodym-tételben (ld. 3.11.7. Tétel) a $\nu \ll \mu$ feltétel helyett az „erősebb" $\nu \leq \mu$ feltételezéssel élünk, akkor (ld. vi)) az $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ Radon-Nikodym-deriváltra $f \leq 1$ is igaz. Megmutatjuk, hogy a $\nu \leq \mu$ speciális eset valójában ekvivalens a 3.11.7. Tétellel, ami egy újabb keletű bizonyítása a Radon-Nikodym-tételnek (ld. R. C. Bradley, *An elementary treatment of the Radon-Nikodym derivative,* Amer. Math. Monthly 96(5) (1989), 437-440.).

A részletek előtt először is jegyezzük meg, hogy a 3.11.7. Tétel bizonyítására gondolva annak a „lényeges" része a véges ν, μ eset (amiből az általános tétel már megkapható volt). A továbbiakban ezért feltesszük, hogy a ν, μ mértékek végesek, és $\nu \ll \mu$. Nyilván $\nu \leq \nu + \mu$ és $\mu \leq \nu + \mu$. Tehát a Radon-Nikodym-tételnek a fent említett „erősebb" változata szerint alkalmas $g, h \in L^+$ függvényekkel

$$\nu(A) = \int_A g\, d(\nu + \mu) = \int_A g\, d\nu + \int_A g\, d\mu \qquad (A \in \Omega)$$

és

$$\mu(A) = \int_A h\, d(\nu + \mu) = \int_A h\, d\nu + \int_A h\, d\mu \qquad (A \in \Omega).$$

Speciálisan

$$\mu(\{h = 0\}) = \int_{\{h=0\}} h\, d(\nu + \mu) = 0,$$

ezért $\nu \ll \mu$ miatt $\nu(\{h = 0\}) = 0$, és így tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra

$$\nu(A) = \int_A g\, d(\nu + \mu) = \int_{A \cap \{h>0\}} g\, d\nu + \int_{A \cap \{h>0\}} g\, d\mu =$$

$$\int_{A \cap \{h>0\}} g\, d(\nu + \mu) = \int g \cdot \chi_{A \cap \{h>0\}}\, d(\nu + \mu).$$

Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x)}{h(x)} & (x \in \{h > 0\}) \\ 0 & (x \in \{h = 0\}). \end{cases}$$

Ekkor $f \in L^+$, $g \cdot \chi_{\{h>0\}} = fh \cdot \chi_{\{h>0\}}$, és az előbbiek, valamint a vi) megjegyzés alapján (értelemszerű „szereposztással")

$$\nu(A) = \int fh \cdot \chi_{A \cap \{h>0\}}\, d(\nu + \mu) = \int f \cdot \chi_{A \cap \{h>0\}}\, d\mu = \int_{A \cap \{h>0\}} f\, d\mu =$$

$$\int_{A \cap \{h>0\}} f\, d\mu + \int_{A \cap \{h=0\}} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu = \mu_f(A) \qquad (A \in \Omega),$$

azaz $\nu = \mu_f$.

xvii) Az előző megjegyzés folytatásaként most bizonyítsuk be, hogy igaz a Radon-Nikodym-tétel (ld. 3.11.7. Tétel) „erősebb" feltétel melletti változata. Legyenek tehát a ν, μ mértékek végesek, és $\nu \leq \mu$. Nyilván feltehető, hogy $\nu(X), \mu(X) > 0$, különben $\nu(X) = \mu(X) = 0$, amikor is a szóban forgó tétel triviális. Élhetünk a $\mu(X) = 1$ feltételezéssel is, különben tekintsük a $\nu/\mu(X)$, $\mu/\mu(X)$ mértékeket. A továbbiakban ilyen feltételek mellett látjuk be a 3.11.7. Tételt.

Nevezzük ehhez a véges $\mathcal{A} \subset \Omega$ halmazrendszert *felosztásnak,* ha az $\mathcal{A}$-beli halmazok páronként diszjunktak, és

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Legyen $\mathcal{F} := \{\mathcal{A} \subset \Omega : \mathcal{A} \text{ felosztás}\}$ és $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Ekkor a $\mathcal{B}$ *finomítása* az $\mathcal{A}$-nak, ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén valamilyen $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ mellett

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B.$$

Ha pl. $\mathcal{A}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ és

$$\mathcal{B} := \{A \cap C : A \in \mathcal{A},\, C \in \mathcal{C}\},$$

akkor nyilván $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, ami a „legszűkebb közös" finomítása az $\mathcal{A}$-nak is és a $\mathcal{C}$-nek is (és ugyanez elmondható több (véges sok) felosztásból kiindulva).

Egy $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ felosztásra (és a fenti ν, μ mértékekre) tekintsük azt a

$$h_{\mathcal{A}} : X \to [0, 1]$$

függvényt, amire

$$h_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} \dfrac{\nu(A)}{\mu(A)} & (\mu(A) > 0) \\ 0 & (\mu(A) = 0) \end{cases} \qquad (x \in X)$$

(ahol $x \in X$ esetén az előbbi $A \in \mathcal{A}$ azt az egyértelműen létező halmazt jelenti, amire $x \in A$). Ekkor egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ választással az $Y := \bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} A$ halmazra

$$(*) \qquad \nu(Y) = \int_Y h_{\mathcal{A}}\, d\mu.$$

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ finomítása az $\mathcal{A}$-nak, ekkor

$$\int h_{\mathcal{B}}^2\, d\mu = \int h_{\mathcal{A}}^2\, d\mu + \int (h_{\mathcal{B}} - h_{\mathcal{A}})^2\, d\mu \geq \int h_{\mathcal{A}}^2\, d\mu.$$

Valóban, mindez

$$\int h_{\mathcal{A}}^2\, d\mu = \sum_{A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0} \frac{\nu(A)^2}{\mu(A)} < +\infty,$$

és

$$\int h_{\mathcal{B}}\cdot h_{\mathcal{A}}\,d\mu=\sum_{A\in\mathcal{A}}\int_A h_{\mathcal{B}}\cdot h_{\mathcal{A}}\,d\mu=\sum_{A\in\mathcal{A},\mu(A)>0}\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\cdot\int_A h_{\mathcal{B}}\,d\mu=$$

$$\sum_{A\in\mathcal{A},\mu(A)>0}\frac{\nu(A)^2}{\mu(A)}=\int h_{\mathcal{A}}^2\,d\mu$$

alapján egyszerűen adódik.

Legyen most már

$$\alpha:=\sup\left\{\int h_{\mathcal{A}}^2\,d\mu:\mathcal{A}\in\mathcal{F}\right\}.$$

Ekkor $0\le\alpha\le 1$. Válasszuk az $\mathcal{A}_n\in\mathcal{F}$ $(n\in\mathbf{N})$ felosztássorozatot úgy, hogy

$$\int h_{\mathcal{A}_n}^2\,d\mu>\alpha-\frac{1}{4^n}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Ha $n\in\mathbf{N}$ és a $\mathcal{B}_n\in\mathcal{F}$ felosztás a legszűkebb közös finomítása az $\mathcal{A}_0,...,\mathcal{A}_n$-eknek, akkor az előzetesen mondottakat is figyelembe véve

$$\alpha-\frac{1}{4^n}<\int h_{\mathcal{A}_n}^2\,d\mu\le\int h_{\mathcal{B}_n}^2\,d\mu\le\int h_{\mathcal{B}_{n+1}}^2\,d\mu\le\alpha,$$

amiből az

$$\int(h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n})^2\,d\mu=\int h_{\mathcal{B}_{n+1}}^2\,d\mu-\int h_{\mathcal{B}_n}^2\,d\mu\le\frac{1}{4^n}\qquad(n\in\mathbf{N})$$

becslést nyerjük. Innen a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (ld. 3.6. iv) megjegyzés) alkalmazásával az következik, hogy

$$\int|h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n}|\,d\mu=\int 1\cdot|h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n}|\,d\mu\le\sqrt{\int(h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n})^2\,d\mu}\cdot\sqrt{\int 1\,d\mu}=$$

$$\sqrt{\int(h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n})^2\,d\mu}\cdot\sqrt{\mu(X)}=\sqrt{\int(h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n})^2\,d\mu}\le\frac{1}{2^n}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Ezért (ld. 3.4. iii) megjegyzés)

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}|h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n}|\,d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\int|h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n}|\,d\mu<+\infty,$$

és így (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}|h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n}|<+\infty\quad\mu\text{-m.m.}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum(h_{\mathcal{B}_{n+1}}-h_{\mathcal{B}_n})$ függvénysor μ-m.m. (abszolút) konvergens, következésképpen („teleszkopikus" sorról lévén szó) μ-m.m. értelemben létezik a

$\lim_{n\to\infty} h_{\mathcal{B}_n}$ határfüggvény. Van tehát olyan $U \in \Omega$, $\mu(U) = 0$ halmaz, amivel értelmezhető az

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} h_{\mathcal{B}_n}(x) & (x \in X \setminus U) \\ \\ 0 & (x \in U) \end{cases}$$

(nyilván L^+-beli) $f : X \to [0,1]$ függvény. Lássuk be, hogy ez az f eleget tesz a $\nu = \mu_f$ egyenlőségnek.

Ha ui. $A \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$ esetén $\mathcal{C}_n \in \mathcal{F}$ a legszűkebb közös finomítása a $\mathcal{B}_n$-nek és az $\{A, X \setminus A\} \in \mathcal{F}$ felosztásnak, akkor az előzetes megjegyzéseink szerint

$$\alpha - \frac{1}{4^n} < \int h_{\mathcal{B}_n}^2 \, d\mu \le \int h_{\mathcal{C}_n}^2 \, d\mu \le \alpha \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és így

$$\int (h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n})^2 \, d\mu = \int h_{\mathcal{C}_n}^2 \, d\mu - \int h_{\mathcal{B}_n}^2 \, d\mu \le \frac{1}{4^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (ld. 3.6. iv) megjegyzés) újbóli alkalmazásával tehát tetszőleges $A \in \Omega$ halmazra (a fentiekhez hasonlóan)

$$\left| \int_A (h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n}) \, d\mu \right| \le \int_A |h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n}| \, d\mu \le \int |h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n}| \, d\mu \le \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n}) \, d\mu = 0.$$

Ezért (ld. $(*)$) a

$$\nu(A) = \int_A h_{\mathcal{C}_n} \, d\mu = \int_A (h_{\mathcal{C}_n} - h_{\mathcal{B}_n}) \, d\mu + \int_A h_{\mathcal{B}_n} \, d\mu \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőség és a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.6. Tétel) miatt

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A h_{\mathcal{B}_n} \, d\mu = \int_A f \, d\mu = \mu_f(A),$$

azaz $\nu = \mu_f$.

xviii) Legyen az (X, Ω) mérhető tér (ld. 2.5.) esetén a μ előjeles mérték az Ω-n, ekkor (ld. 2.11.4. Definíció)

$$\mu^+ \perp \mu^-.$$

Valóban, tekintsük a Hahn-féle felbontásból (ld. 2.11.3. Tétel) adódó mérhető, diszjunkt X^+, $X^- \in \Omega$ halmazokat, amikre tehát $X = X^+ \cup X^-$ teljesül, és

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap X^+), \ \mu^-(A) = -\mu(A \cap X^-) \qquad (A \in \Omega).$$

Az utóbbi két egyenlőségből

$$\mu^+(A \cap X^-) = \mu(A \cap X^- \cap X^+) = \mu(\emptyset) = 0 = \mu^-(A \cap X^+) \qquad (A \in \Omega)$$

következik, ami éppen a $\mu^+ \perp \mu^-$ szingularitást jelenti.

xix) Mutassuk meg, hogy ha a ν_i $(i = 1, 2)$, μ függvények mértékek az Ω szigma-algebrán, és $\nu_i \perp \mu$ $(i = 1, 2)$, akkor

$$(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu.$$

Legyen ui. $X = X_0 \cup X_1$ a $\nu_1 \perp \mu$, az $X = \tilde{X}_0 \cup \tilde{X}_1$ pedig a $\nu_2 \perp \mu$ relációból származó felbontása az X-nek (ld. 3.11.9. Definíció). Ekkor a mérhető

$$Y_0 := (X_0 \cap \tilde{X}_0) \cup (X_1 \cap \tilde{X}_0) \cup (X_0 \cap \tilde{X}_1),\ Y_1 := X_1 \cap \tilde{X}_1$$

halmazokkal $X = Y_0 \cup Y_1$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, és tetszőleges $A \in \Omega$ mellett a következőket mondhatjuk:

$$\mu(A \cap Y_0) = \mu(A \cap X_0 \cap \tilde{X}_0) + \mu(A \cap X_1 \cap \tilde{X}_0) + \mu(A \cap X_0 \cap \tilde{X}_1) = 0,$$

$$(\nu_1 + \nu_2)(A \cap Y_1) = \nu_1(A \cap X_1 \cap \tilde{X}_1) + \nu_2(A \cap X_1 \cap \tilde{X}_1) = 0.$$

Ez nem más, mint a $(\nu_0 + \nu_1) \perp \mu$ szingularitás.

Egyszerűen belátható, hogy a most mondottak érvényben maradnak minden olyan ν_1, ν_2, μ előjeles mértékekre is, amelyekre $\nu_1 + \nu_2$ létezik. (Vegyük figyelembe, hogy ekkor $(\nu_1 + \nu_2)^\pm \leq \nu_1^\pm + \nu_2^\pm$.)

xx) Legyen (X, Ω) mérhető tér (ld. 2.5.), ν, μ pedig mértékek az Ω-n, és $\emptyset \neq A \in \Omega$. Jelöljük $\tilde{\nu}$-mal ($\tilde{\mu}$-mal) a ν (a μ) mérték leszűkítését az

$$\{A \cap B \in \mathcal{P}(A) : B \in \Omega\}$$

szigma-algebrára. Ekkor $\nu \perp \mu$ esetén $\tilde{\nu} \perp \tilde{\mu}$, $\nu \ll \mu$ esetén pedig $\tilde{\nu} \ll \tilde{\mu}$.

xxi) A 3.11.10. Tétel – a bizonyításával együtt – igaz marad előjeles mértékekre is.

3.13. Duális terek

Ebben a pontban az L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ terek (ld. 3.5.) ún. *duálisát* vizsgáljuk, ami mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból kiemelt jelentőséggel bír. Ehhez elöljáróban röviden emlékeztetünk a funkcionálanalízis idevágó néhány fogalmára. Nevezetesen, legyen adott valamilyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ (a valós vagy a komplex számok $\mathbf{K}$ teste feletti) normált tér. Ekkor a $\Phi : \mathcal{X} \to \mathbf{K}$ függvényt *korlátos lineáris funkcionálnak* (a továbbiakban röviden *funkcionálnak*) nevezzük, ha az alábbi tulajdonságok igazak:

- a Φ *lineáris,* azaz tetszőleges $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ esetén

$$\Phi(\alpha\cdot u + \beta\cdot v) = \alpha\cdot \Phi(u) + \beta\cdot \Phi(v),$$

- a Φ *korlátos,* más szóval van olyan $M \geq 0$ szám, hogy

$$|\Phi(u)| \leq M\cdot \|u\| \qquad (u \in \mathcal{X}).$$

A Φ funkcionál linearitásából rögtön következik az, hogy ha $e \in \mathcal{X}$ az $\mathcal{X}$ tér null-eleme, akkor $\Phi(e) = 0$. Nem nehéz meggondolni azt sem, hogy a fenti linearitás mellett a korlátosság azzal ekvivalens, hogy a Φ folytonos: minden u, $u_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 \implies \Phi(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n).$$

Továbbá, a

$$\|\Phi\|_* := \inf\{M \geq 0 : |\Phi(u)| \leq M\cdot \|u\| \qquad (u \in \mathcal{X})\}$$

számmal $|\Phi(u)| \leq \|\Phi\|_*\cdot \|u\|$ $(u \in \mathcal{X})$. Innen az is következik, hogy az előbbi „inf" helyett „min" is írható.

Legyen $\mathcal{X}^*$ a fenti funkcionálok halmaza. Ekkor

- az $\mathcal{X}^*$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett;
- az $\mathcal{X}^* \ni \Phi \mapsto \|\Phi\|_*$ leképezés norma;
- $\|\Phi\|_* = \sup\{|\Phi(u)| : u \in \mathcal{X},\ \|u\| \leq 1\}$;
- az $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|_*)$ tér Banach-tér (az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér *duálisa* (vagy *konjugáltja*)).

A továbbiakban valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és az (X, Ω, μ) mértéktér esetén tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ mellett az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (L^p, \|\cdot\|_p)$ tér duálisát vizsgáljuk.

Legyenek ehhez az $1 \leq p, s \leq +\infty$ kitevők *konjugáltak,* azaz tegyük fel, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1.$$

Ha $g \in L^s$ és

$$\Phi_g(f) := \int fg\, d\mu \qquad (f \in L^p),$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint (ld. 3.5.1. Tétel) $\Phi_g(f) \in \mathbf{R}$, és

$$|\Phi_g(f)| \leq \|g\|_s\cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p).$$

Világos továbbá (ld. 3.5.4. Tétel), hogy az előbbi $\Phi_g : L^p \to \mathbf{R}$ leképezés lineáris, így $\Phi_g \in (L^p)^*$ és $\|\Phi_g\|_* \leq \|g\|_s$.

3.13.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az előbbiekben $p > 1$. Ekkor $\|\Phi_g\|_* = \|g\|_s$.*

Bizonyítás. Legyen $f := (\operatorname{sign} g) \cdot |g|^{s-1}$, ekkor (ld. 3.1.) az f mérhető függvény, valamint $p < +\infty$ esetén

$$\int |f|^p \, d\mu \le \int |g|^{p(s-1)} \, d\mu = \int |g|^s \, d\mu = \|g\|_s^s < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in L^p$, és

$$|\Phi_g(f)| = \Phi_g(f) = \int |g|^s \, d\mu = \|g\|_s^s \le \|\Phi_g\|_* \cdot \|f\|_p \le \|\Phi_g\|_* \cdot \|g\|_s^{s/p} = \|\Phi_g\|_* \cdot \|g\|_s^{s-1}.$$

Ha itt $\|g\|_s > 0$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből

$$\|\Phi_g\|_* \ge \frac{\|g\|_s}{\|g\|_s^{s-1}} = \|g\|_s.$$

Ez utóbbi becslés nyilván akkor is igaz, ha $\|g\|_s = 0$, tehát $\|\Phi_g\|_* \ge \|g\|_s$. Ezért a $\|\Phi_g\|_*$ normáról fentebb mondottakat is figyelembe véve kapjuk azt, hogy $\|\Phi_g\|_* = \|g\|_s$.

Ha $p = +\infty$, akkor $s = 1$, így $f = \operatorname{sign} g$, amiből az f mérhetősége és $\|f\|_\infty \le 1$ következik. Továbbá

$$\Phi_g(f) = \int |g| \, d\mu = \|g\|_1 \le \|\Phi_g\|_* \cdot \|f\|_\infty \le \|\Phi_g\|_*,$$

ezért ismét figyelembe véve az $\|\Phi_g\|_*$ normáról mondottakat adódik a $\|\Phi_g\|_* = \|g\|_1$ egyenlőség. ■

Továbbra is megtartva a fenti jelöléseket bizonyítsuk be, hogy igaz a

3.13.2. Tétel. *Ha $p = 1$ és a μ mérték szigma-véges, akkor $\|\Phi_g\|_* = \|g\|_\infty$.*

Bizonyítás. Amennyiben $\|g\|_\infty = 0$, akkor a dolog eléggé nyilvánvaló. Feltehetjük tehát, hogy $\|g\|_\infty > 0$. Legyen ekkor $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám, $E \subset \Omega$ pedig olyan halmaz, hogy $\mu(E) > 0$ és $|g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon \quad (x \in E)$. (A $\|\cdot\|_\infty$ definíciója miatt ilyen E halmaz létezik.) Mivel a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), ezért van olyan

$$X = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$$

felbontás, hogy az itt szereplő X_j-k páronként diszjunkt, véges mértékű halmazok. Így

$$0 < \mu(E) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E \cap X_j),$$

következésképpen egy alkalmas $j \in \mathbf{N}$ indexszel az

$$F := E \cap X_j$$

halmazra $F \subset E$, $F \in \Omega$, és $0 < \mu(F) < +\infty$. Tekintsük az $f := \chi_F \cdot \operatorname{sign} g$ függvényt, ekkor $f \in L^1$ és $\|f\|_1 \leq \mu(F)$, továbbá

$$\Phi_g(f) = \int_F |g| \, d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mu(F).$$

Így

$$(\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mu(F) \leq \|\Phi_g\|_* \cdot \|f\|_1 \leq \|\Phi_g\|_* \cdot \mu(F).$$

Innen $\|\Phi_g\|_* \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ adódik. Mivel az előbbiekben az $\varepsilon > 0$ tetszőleges számot jelölt, ezért $\|\Phi_g\|_* \geq \|g\|_\infty$, és újfent csak a $\|\Phi_g\|_*$ normával kapcsolatos bevezető észrevételeink szerint kapjuk azt, hogy $\|\Phi_g\|_* = \|g\|_\infty$. ■

A fenti „előkészületek" után minden készen áll ahhoz, hogy az L^p terek duálisát illető alaptételt belássuk.

3.13.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a szóban forgó (X, Ω, μ) mértéktér szigma-véges, és valamilyen $1 \leq p < +\infty$ kitevő mellett $\Phi \in (L^p)^*$. Ekkor az $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$ egyenlőségnek eleget tevő $1 < s \leq +\infty$ konjugált kitevővel egyértelműen létezik olyan $g \in L^s$ függvény, hogy $\Phi(f) = \int fg \, d\mu \quad (f \in L^p)$ és $\|\Phi\|_* = \|g\|_s$.*

Bizonyítás. A 3.13.1., 3.13.2. Tételekre tekintettel már csak a 3.13.3. Tételben jelzett g függvény egyértelmű létezését kell belátnunk. A szóban forgó g egzisztenciájának az igazolásához tegyük fel először azt, hogy a μ mérték véges, azaz $\mu(X) < +\infty$. Legyen ekkor

$$\nu(E) := \Phi(\chi_E) \qquad (E \in \Omega).$$

(Világos, hogy a μ végessége miatt tetszőleges $E \in \Omega$ halmazzal $\chi_E \in L^p$.) Nyilván $\nu : \Omega \to \mathbf{R}$, továbbá $\nu(\emptyset) = \Phi(\chi_\emptyset) = 0$, hiszen $\chi_\emptyset(x) = 0 \ (x \in X)$, azaz a $\chi_\emptyset$ függvény az L^p vektortér null-eleme. A ν leképezés szigma-additív is, ui. bárhogyan választunk páronként diszjunkt $E_i \in \Omega \ (i \in \mathbf{N})$ halmazokat, akkor

$$\nu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) = \Phi\left(\chi_{\cup_{i=0}^{\infty} E_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_{E_i}\right).$$

Ugyanakkor

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty} \chi_{E_i} - \sum_{i=0}^{n} \chi_{E_i}\right\|_p = \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} \chi_{E_i}\right\|_p = \left\|\chi_{\cup_{i=n+1}^{\infty} E_i}\right\|_p =$$

$$\left(\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i)\right)^{1/p} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

mivel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) \le \mu(X) < +\infty.$$

Így a Φ funkcionál folytonosságát kihasználva azt mondhatjuk, hogy

$$\nu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_{E_i}\right) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \chi_{E_i}\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \chi_{E_i}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \Phi\left(\chi_{E_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(\chi_{E_i}) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(E_i).$$

Az eddigiek szerint a ν előjeles mérték (ld. 2.11.), ami abszolút folytonos a μ-re nézve (ld. 3.12. xii) megjegyzés), mivel $E \in \Omega$, $\mu(E) = 0$ esetén $\chi_E = 0$ μ-m.m., azaz a χ_E függvény az L^p tér null-eleme. Ezért $\nu(E) = \Phi(\chi_E) = 0$. Innen a Radon-Nikodym-tételt (ld. 3.11.7. Tétel, 3.12. xii) megjegyzés) alkalmazva kapunk olyan $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényt, amivel

$$\nu(E) = \int g \cdot \chi_E \, d\mu \qquad (E \in \Omega).$$

Mivel $\nu(X) = \int g \, d\mu = \Phi(\chi_X) \in \mathbf{R}$, ezért feltehető, hogy $g \in L^1$.

Tehát bármilyen $E \in \Omega$ halmazra

$$\Phi(\chi_E) = \int g \cdot \chi_E \, d\mu.$$

Innen a Φ (és az integrálás) linearitása alapján ugyanez rögtön adódik az előbbi χ_E helyett lépcsősfüggvényekre is. Legyen ui. az $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető lépcsősfüggvény (ld. 3.3.1.):

$$f = \sum_i \alpha_i \cdot \chi_{E_i} \in L_0,$$

ahol a $\sum_i$ véges összeget jelöl, és az itt szereplő $E_i \in \Omega$ halmazok páronként diszjunktak, amikor is

$$\Phi(f) = \sum_i \alpha_i \cdot \Phi(\chi_{E_i}) = \sum_i \alpha_i \cdot \int g \cdot \chi_{E_i} \, d\mu = \int \Big(\sum_i \alpha_i \cdot \chi_{E_i}\Big) \cdot g \, d\mu = \int f g \, d\mu.$$

Most belátjuk, hogy tetszőleges $f : X \to \mathbf{R}$ korlátos, mérhető függvényre is

$$\Phi(f) = \int f g \, d\mu.$$

(Megjegyezzük, hogy a μ feltételezett végessége miatt $f \in L^p$.) Bontsuk fel ehhez az f-et a „szokásos" módon a pozitív és a negatív része különbségére:

$$f = f^+ - f^-,$$

és legyen $f_{n0}, f_{n1} \in L_0^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvényeknek egy-egy monoton növő olyan sorozata, hogy

$$f^+ = \lim_{n\to\infty} f_{n0}, \; f^- = \lim_{n\to\infty} f_{n1}.$$

Ekkor az $f_n := f_{n0} - f_{n1} \in L_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ is lépcsősfüggvényekből álló sorozat, és

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n, \; |f_n| \le f_{n0} + f_{n1} \le f^+ + f^- = |f| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért $f_n \in L^p \quad (n \in \mathbf{N})$ is igaz, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p = 0,$$

és $|f_n - f|^p \le 2^p \cdot |f|^p \in L^1 \quad (n \in \mathbf{N})$. Így a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

Más szóval $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, amiből a Φ funkcionál folytonossága miatt

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n g \, d\mu.$$

Itt

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g) = fg,$$

az f korlátossága miatt pedig $|f_n g| \le |fg| \in L^1 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ezért ismét a Lebesgue-tételt (ld. 3.5.5. Tétel) alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \int f_n g \, d\mu = \int fg \, d\mu.$$

A fenti g függvényről megmutatjuk, hogy $g \in L^s$. Legyen ehhez

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & (|g(x)| \le n) \\ 0 & (|g(x)| > n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in X).$$

A g_n függvény minden $\mathbf{N} \ni n$-re nyilván korlátos és mérhető, valamint

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Ha $p > 1$, azaz, $s < +\infty$, akkor legyen

$$t_n := (\operatorname{sign} g) \cdot |g_n|^{s-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor (az előzőeket is figyelembe véve)

i) $\|t_n\|_p = \left(\int |g_n|^{p(s-1)}\, d\mu\right)^{1/p} = \|g_n\|_s^{s/p} \quad (n \in \mathbf{N})$;

ii) $\Phi(t_n) = \int t_n g\, d\mu = \|g_n\|_s^s \le \|\Phi\|_* \cdot \|t_n\|_p = \|\Phi\|_* \cdot \|g_n\|_s^{s/p} \quad (n \in \mathbf{N})$;

iii) mivel a $(|g_n|)$ sorozat monoton nőve tart a $|g|$-hez, ezért a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) szerint az $(\int |g_n|^s\, d\mu)$ integrál-sorozat is monoton nőve tart az $\int |g|^s\, d\mu$ integrálhoz. Nyilván feltehető, hogy $\int |g|^s\, d\mu > 0$, különben (ld. 3.3.2.6. Tétel) $g = 0$ μ-m.m., és emiatt a g az L^s tér null-eleme. Tehát van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy bármilyen $N < n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\int |g_n|^s\, d\mu = \|g_n\|_s^s > 0,$$

így a ii) alapján

$$\|\Phi\|_* \ge \|g_n\|_s^{s-s/p} = \|g_n\|_s.$$

Innen máris adódik a

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_s = \|g\|_s \le \|\Phi\|_*$$

egyenlőtlenség, amiből persze $g \in L^s$ is következik.

Ha $p = 1$, azaz $s = +\infty$, akkor legyen

$$A_c := \{|g| \ge c\} \in \Omega \qquad (0 < c \in \mathbf{R}),$$

és $f_c := (\operatorname{sign} g) \cdot \chi_{A_c}$. Világos, hogy $\|f_c\|_1 \le \mu(A_c)$, és a fentiek, valamint $|g| \ge c \cdot \chi_{A_c}$ alapján

$$\Phi(f_c) = \int g f_c\, d\mu = \int_{A_c} |g|\, d\mu \ge c \cdot \mu(A_c).$$

Tehát

$$c \cdot \mu(A_c) \le \|\Phi\|_* \cdot \|f_c\|_1 \le \|\Phi\|_* \cdot \mu(A_c).$$

Ha itt a c olyan, hogy $\mu(A_c) = 0$, akkor $|g| \le c$ μ-m.m. Ezért $g \in L^\infty$. Ha viszont a c-vel $\mu(A_c) > 0$ teljesül, akkor $c \le \|\Phi\|_*$. Következésképpen $c > \|\Phi\|_*$ esetén $\mu(A_c) = 0$, ami elegendő ahhoz, hogy $g \in L^\infty$ legyen.

A μ végessége mellett bizonyítsuk be végül azt, hogy a $\Phi(f) = \int f g\, d\mu$ egyenlőség minden $f \in L^p$ függvényre igaz. Válasszunk ehhez a szóban forgó $f \in L^p$ esetén egy olyan, L_0-beli lépcsősfüggvényekből álló (l_n) sorozatot, amire $|l_n| \le |f|$ $(n \in \mathbf{N})$, és (ld. 3.6. xviii) megjegyzés)

$$\lim_{n\to\infty} \|l_n - f\|_p = 0$$

teljesül. Az eddig belátottakat felhasználva ekkor azt mondhatjuk, hogy

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(l_n) = \lim_{n\to\infty} \int l_n g\, d\mu.$$

Itt a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) miatt $|l_n g| \le |fg| \in L^1 \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért a $\lim_{n\to\infty}(l_n g) = fg$ egyenlőségből és a Lebesgue-tételből (ld. 3.5.5. Tétel)

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \int l_n g \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

következik.

Vizsgáljuk most az általános esetet, azaz, amikor a μ mértékről csak a szigma-végességet (ld. 2.5.3. Definíció) tételezzük fel. Ekkor

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n,$$

ahol

$$X_n \in \Omega, \ \mu(X_n) < +\infty, \ X_n \cap X_m = \emptyset \qquad (n \ne m \in \mathbf{N}).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és

$$\Omega_n := \{A \subset X_n : A \in \Omega\}, \ \mu_n(A) := \mu(A) \qquad (A \in \Omega_n).$$

Az (X_n, Ω_n, μ_n) olyan mértéktér (ld. 2.2. iv) megjegyzés), ahol a μ_n mérték véges. Legyen

$$L_n^r := L^r(\mu_n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az (X_n, Ω_n, μ_n) mértéktérre vonatkozó L^r-tér $\quad (1 \le r \le \infty)$ (ld. 3.5.). Ha $n \in \mathbf{N}$ és $f \in L_n^p$, akkor az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in X_n) \\ 0 & (x \in X \setminus X_n) \end{cases}$$

függvény L^p-beli. Legyen $\Phi_n(f) := \Phi(\tilde{f})$, ekkor $\Phi_n \in (L_n^p)^*$. Mivel a μ_n véges, ezért az eddigiek alapján van olyan $h_n \in L_n^s$, hogy

$$\Phi_n(f) = \int f h_n \, d\mu_n = \int \tilde{f} \tilde{h}_n \, d\mu \qquad (f \in L_n^p).$$

Jelöljük G-vel a (nyilván mérhető) $G := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n$ függvényt. Belátjuk, hogy $G \in L^s$.

1° eset: $s < +\infty$ (azaz $p > 1$). Ekkor

$$|G|^s = \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{h}_n|^s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\tilde{h}_k|^s = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |\tilde{h}_k| \right)^s =: \lim_{n\to\infty} G_n^s.$$

Legyen

$$F_n := (\operatorname{sign} G) \cdot G_n^{s-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Erről az F_n függvényről a következőket mondhatjuk: $\|F_n\|_p = \|G_n\|_s^{s/p} < +\infty$, és

$$\Phi(F_n) = \sum_{k=0}^{n} \Phi\left(|\tilde{h}_k|^{s-1} \cdot \operatorname{sign} G\right) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k\left(|h_k|^{s-1} \cdot \operatorname{sign} h_k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \int |h_k|^s d\mu_k = \sum_{k=0}^{n} \int |\tilde{h}_k|^s \, d\mu = \int G_n^s \, d\mu.$$

Tehát

$$\int G_n^s \, d\mu = \|G_n\|_s^s \le \|\Phi\|_* \cdot \|F_n\|_p = \|\Phi\|_* \cdot \|G_n\|_s^{s/p},$$

így $1/p + 1/s = 1$ miatt $\|G_n\|_s \le \|\Phi\|_*$. Mivel $\|G\|_s = \lim_{n\to\infty} \|G_n\|_s$, ezért $\|G\|_s \le \|\Phi\|_*$, így $G \in L^s$.

2° eset: $s = +\infty$ (azaz $p = 1$). Ekkor

$$|\Phi_n(g)| = |\Phi(\tilde{g})| \le \|\Phi\|_* \cdot \|\tilde{g}\|_1 = \|\Phi\|_* \cdot \|g\|_1 \qquad (n \in \mathbf{N}, g \in L_n^1),$$

következésképpen $\|\Phi_n\|_* \le \|\Phi\|_*$. Ugyanakkor $\|\Phi_n\|_* = \|h_n\|_\infty$, amiből

$$\|G\|_\infty = \sup_n \|\tilde{h}_n\|_\infty = \sup_n \|h_n\|_\infty = \sup_n \|\Phi_n\|_* \le \|\Phi\|_*,$$

más szóval $G \in L^\infty$.

Végül, legyen $f \in L^p$, $n \in \mathbf{N}$, és

$$f_n(x) := f(x) \qquad (x \in X_n).$$

Nyilván $f = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n$, és $\|f\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_p^p < +\infty$, amiből

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\tilde{f}_k\|_p^p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért a Φ folytonossága alapján

$$\Phi(f) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} \tilde{f}_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Phi(\tilde{f}_k) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\tilde{f}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \tilde{f}_n \tilde{h}_n \, d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n \tilde{h}_n \, d\mu = \int fG \, d\mu.$$

(Újra alkalmaztuk a Lebesgue-tételt (ld. 3.5.5. Tétel), amit megtehettünk, ui. a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n \tilde{h}_n = fG,$$

továbbá (ld. Hölder-egyenlőtlenség (3.5.1. Tétel)) a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{f}_n \tilde{h}_n| = |fG| \in L^1$$

egyenlőség ezt lehetővé tette.)

Ezzel a 3.13.3. Tételben szereplő $g := G$ függvény létezését tetszőleges szigma-véges μ mérték esetén beláttuk. Az egyértelműség bizonyításához legyenek $g_1, g_2 \in L^s$ olyan függvények, amelyekre

$$\int f g_1 \, d\mu = \int f g_2 \, d\mu \qquad (f \in L^p).$$

Ez azt jelenti, hogy a $g := g_1 - g_2$ $(\in L^s)$ jelöléssel

$$\Phi_g f = \int f g \, d\mu = 0 \qquad (f \in L^p).$$

Tehát Φ_g az $(L^p)^*$ tér null-eleme, így (ld. 3.13.1., 3.13.2. Tételek)

$$0 = \|\Phi_g\| = \|g\|_s,$$

következésképpen (ld. 3.3.2.6. Tétel) $g = 0$ μ-m.m., azaz a g függvény az L^s tér null-eleme. Tehát $g_1 = g_2$ μ-m.m. ■

3.14. Megjegyzések

i) A 3.13.1. Tétel szerint tehát tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz, valamint az (X, Ω, μ) mértéktér esetén bármelyik $1 \leq s < +\infty$ kitevővel és $g \in L^s$ függvénnyel a funkcionálok normájáról (a 3.13.1. Tétel előtt) mondottakra tekintettel

$$\|g\|_s = \sup \left\{ \left| \int f g \, d\mu \right| : f \in L^p, \|f\|_p \leq 1 \right\}$$

(ahol $1/p + 1/s = 1$).

ii) Ha az előbbi μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), akkor a 3.13.2. Tétel miatt az i) megjegyzés az $s = +\infty$ kitevőre is igaz: ha $g \in L^\infty$, akkor

$$\|g\|_\infty = \sup \left\{ \left| \int f g \, d\mu \right| : f \in L^1, \|f\|_1 \leq 1 \right\}.$$

iii) Vezessük be a *lokális nullamértékűség* fogalmát az alábbiak szerint: valamilyen (X, Ω, μ) mértéktér esetén egy $A \in \Omega$ halmazt *lokálisan nullamértékűnek* nevezünk, ha minden $B \in \Omega$, $\mu(B) < +\infty$ halmazra $\mu(A \cap B) = 0$. Eléggé nyilvánvaló, hogy

minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz egyúttal lokálisan nullamértékű is, valamint ha a μ szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), akkor (könnyen láthatóan) a lokális nullamértékűség ekvivalens a nullamértékűséggel. Tekintsük ezután az összes olyan $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvény által alkotott $\mathcal{L}^\infty$ halmazt, amire az $\{|f| > \alpha\}$ nívóhalmaz lokálisan nullamértékű minden $\alpha \geq 0$ esetén. Legyen $\mathbf{R}_f$ az ilyen $\alpha \geq 0$ számok halmaza, és

$$\|f\| := \inf\{\alpha : \alpha \in \mathbf{R}_f\}.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy $f \in \mathcal{L}^\infty$ azzal ekvivalens, hogy valamilyen korlátos, mérhető $F : X \to \mathbf{R}$ függvénnyel az $\{f \neq F\}$ halmaz lokálisan nullamértékű. Legyen X_f az ilyen F függvények halmaza, és

$$\|F\|_u := \sup\{|F(x)| : x \in X\} \qquad (F \in X_f).$$

Ekkor

$$\|f\| = \inf\{\|F\|_u : F \in X_f\} \qquad (f \in \mathcal{L}^\infty).$$

Világos, hogy az

$$f \sim g \iff \{f \neq g\} \text{ lokálisan nullamértékű} \quad (f, g \in \mathcal{L}^\infty)$$

reláció egy ekvivalencia, ami osztályokba sorolja az $\mathcal{L}^\infty$ halmaz elemeit. Ezen osztályok halmazát is az $\mathcal{L}^\infty$ szimbólummal jelölve, a szokásos függvényműveletekkel az $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Ekkor (a bizonyítás értelemszerű „kiigazításával") könnyen adódik a 3.13.2. Tétel alábbi módosítása:

ha $X \neq \emptyset$ és az (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér, akkor minden $g \in \mathcal{L}^\infty$ esetén $\Phi_g \in (L^1)^*$ és $\|\Phi_g\|_* = \|g\|$.

Mivel az előbbiek szerint szigma-véges μ mérték mellett $\mathcal{L}^\infty = L^\infty$ és $\|g\| = \|g\|_\infty$ $(g \in \mathcal{L}^\infty)$, ezért valóban a 3.13.2. Tétel egy kiterjesztését kaptuk.

iv) Az $X := \mathbf{N}$, $\Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\mu(\{n\}) := 1$ $(n \in \mathbf{N})$ választással (ld. 3.6. v) megjegyzés) $L^p(\mu) = \ell_p$, és

$$\int fg\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \qquad (f = (f_n) \in \ell_p,\ g = (g_n) \in \ell_s),$$

ahol $1 \leq p, s \leq +\infty$, $1/p + 1/s = 1$.

v) Az előbbi megjegyzés és a 3.13.3. Tétel szerint tehát tetszőleges $1 \leq p < +\infty$ és $\Phi \in (\ell_p)^*$ esetén egyértelműen létezik olyan $(g_n) \in \ell_s$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1\right)$ sorozat, amivel

$$\Phi\left((f_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \qquad ((f_n) \in \ell_p)$$

és

$$\|\Phi\|_* = \|(g_n)\|_s = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |g_n|^s\right)^{1/s} \qquad (p > 1),$$

valamint $\|\Phi\|_* = \|(g_n)\|_\infty = \sup_n |g_n| \quad (p = 1)$.

vi) Az v) megjegyzés $p = +\infty$ esetén nem igaz. Legyen pl. $\Phi \in (\ell_\infty)^*$ a *limesz-funkcionál,* azaz a konvergens $f = (f_n) \in \ell_\infty$ sorozatok esetén

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor nincs olyan $(g_n) \in \ell_1$ sorozat, amivel

$$\Phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$$

teljesülne minden ilyen f-re. Különben az

$$f^{(N)} := (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...) \qquad (N \in \mathbf{N})$$

konvergens sorozatokat tekintve (ahol tehát $f_k^{(N)} := 1 \quad (k = 0, 1, ..., N)$ és $f_j^{(N)} := 0$ $(j = N+1, N+2, ...)$) a

$$\Phi(f^{(N)}) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(N)} = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(N)} \cdot g_n = \sum_{n=0}^{N} g_n = 0 \qquad (N \in \mathbf{N})$$

egyenlőségek adódnának. Innen viszont teljes indukcióval rögtön következne, hogy $g_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz pl. az $f_n := 1 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra

$$\Phi((f_n)) = \lim_{n\to\infty} f_n = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot 1 = 0$$

is fennállna, ami persze nem igaz.

vii) Legyen adott az (X, Ω, μ) szigma-véges mértéktér, és jelöljük $\mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$-vel az összes olyan

$$\tau : \Omega \to \mathbf{R}$$

korlátos, additív leképezés által alkotott halmazt, amire

$$\tau(A) = 0 \qquad (A \in \Omega,\ \mu(A) = 0).$$

Világos, hogy $[\tau] \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu) \quad (\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu))$, ahol $[\tau]$ a τ *totális variációja*:

$$[\tau](A) := \sup\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} - \inf\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} \qquad (A \in \Omega).$$

Definiáljuk a $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ leképezés normáját az alábbiak szerint:

$$\|\tau\| := [\tau](X).$$

Ezzel a normával az $\mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ – a *végesen additív előjeles mértékek* halmaza – normált tér. Ha $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$, akkor a mérhető $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények halmazán a korábbi „integrál-konstrukcióval" (ld. 3.3.) analóg módon értelmezhető az $\int f\, d\tau$ integrál. Belátható, hogy $\Phi \in (L^\infty)^*$ akkor és csak akkor igaz, ha egy alkalmas $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ végesen additív előjeles mértékkel

$$\Phi(f) = \Phi_\tau(f) := \int f\, d\tau \qquad (f \in L^\infty),$$

és ekkor $\|\Phi\|_* = \|\tau\|$. Pl. bármilyen $g \in L^1$ függvényre a

$$\tau(A) := \int_A g\, d\mu \qquad (A \in \Omega)$$

leképezés egy végesen additív előjeles mérték,

$$\int f\, d\tau = \int fg\, d\mu = \Phi_g(f) \qquad (f \in L^\infty),$$

és $\|\Phi_g\| = \|\tau\| = \|g\|_1$ (ld. 3.13.1. Tétel). Ezért $\Phi_g \in (L^\infty)^*$, de általában (ld. vi) megjegyzés) $(L^\infty)^* \neq \{\Phi_g : g \in L^1\}$.

viii) A 3.13.1., 3.13.2., 3.13.3. Tételek alapján szigma-véges (X, Ω, μ) mértéktér esetén tetszőleges $1 \leq p < +\infty$ kitevő mellett az

$$L^s \ni g \mapsto \Phi_g \in (L^p)^*$$

megfeleltetés izomorfia és izometria (ahol $1/p + 1/s = 1$) : $(L^p)^* \cong L^s$, speciálisan $(L^2)^* \cong L^2$.

ix) Hasonlóan, ha az (X, Ω, μ) mértéktér szigma-véges, akkor (ld. vii)) a

$$\mathcal{M}(X, \Omega, \mu) \ni \tau \mapsto \Phi_\tau \in (L^\infty)^*$$

leképezés szintén izomorfia és izometria.

x) A vii), ix) megjegyzések igazak maradnak tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér esetén, ha L^∞-t $\mathcal{L}^\infty$-re cseréljük (ld. iii) megjegyzés).

xi) Megmutatható, hogy a 3.13.3. Tétel a $p > 1$ esetben igaz akkor is, ha a μ nem szigma-véges (Riesz-tétel). A $p = 1$ esetre ez nem vonatkozik, de a szigma-végesség feltétele enyhíthető. Ennek a megfogalmazásához nevezzük az (X, Ω, μ) mértékteret *felbonthatónak,* ha alkalmas, páronként diszjunkt halmazokból álló $\mathcal{F} \subset \Omega$ halmazrendszerrel az alábbiak teljesülnek:

1° $\mu(A) < +\infty \quad (A \in \mathcal{F})$;

2° ha $B \subset X$ és $B \cap A \in \Omega \quad (A \in \mathcal{F})$, akkor $B \in \Omega$;

3° $\mu(C) = \sup\left\{ \sum_{F \in \mathcal{D}} \mu(C \cap F) \in \overline{\mathbf{R}} : \mathcal{D} \subset \mathcal{F}, \mathcal{D} \text{ véges} \right\} \quad (C \in \Omega, \mu(C) < +\infty)$.

Nyilvánvaló, hogy ha az (X, Ω, μ) szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), akkor felbontható is. A 3.13.3. Tétel fent említett átfogalmazása a következőképpen szól:

tegyük fel, hogy az (X, Ω, μ) *mértéktér felbontható. Ekkor minden* $\Phi \in (L^1)^*$ *esetén egyértelműen létezik olyan* (ld. iii)) $g \in \mathcal{L}^\infty$ *függvény, hogy*

$$\Phi(f) = \int f g \, d\mu \qquad \left(f \in L^1\right),$$

és (ld. iii)) $\|\Phi\|_* = \|g\|$.

xii) A 3.13.3. Tétel alapján is megadható egy elegáns bizonyítása a fentebb igazolt 3.11.7. (Radon-Nikodym-) Tételnek. A továbbiakban ezt vázoljuk, az egyszerűség kedvéért csak véges mértékek esetén. (Természetesen mindez akkor „érdekes", ha előzetesen a 3.13.3. Tételt a Radon-Nikodym-tételtől függetlenül látjuk be.)

Tegyük fel tehát, hogy a 3.11.7. Tétel jelölései mellett a μ, ν mérték végesek, és $\nu \ll \mu$. Legyen

$$\lambda := \mu + \nu,$$

ekkor a λ szintén egy véges mérték az Ω-n. Mivel $\nu \leq \lambda$, ezért

$$L^2(\lambda) \subset L^2(\nu) \subset L^1(\nu).$$

Valóban, ha $f \in L^2(\lambda)$, akkor egyúttal $f^2 \in L^+(\lambda)$ (ld. 3.3.2.), és egy alkalmas monoton növekedő $h_n \in L_0^+(\lambda) = L_0^+(\nu) \ (n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\lim_{n\to\infty} h_n = f^2, \ \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\nu = \int f^2 \, d\nu, \ \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = \int f^2 \, d\lambda.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ mellett igaz az $\int h_n \, d\nu \leq \int h_n \, d\lambda$ becslés, így $\int f^2 \, d\nu \leq \int f^2 \, d\lambda < +\infty$.

A most mondottak alapján tekintsük a következő funkcionált az $L^2(\lambda)$ téren:

$$\Phi(f) := \int f \, d\nu \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

Ekkor $\Phi \in \left(L^2(\lambda)\right)^*$, ui. (ld. 3.5.1. Tétel)

$$|\Phi(f)| \leq \int |f| \, d\nu \leq \sqrt{\nu(X)} \cdot \sqrt{\int f^2 \, d\nu} \leq \sqrt{\nu(X)} \cdot \sqrt{\int f^2 \, d\lambda}.$$

Következésképpen a 3.13.3. Tétel alapján van olyan $g \in L^2(\lambda)$ függvény, hogy

$$\Phi(f) = \int fg\, d\lambda \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

Mutassuk meg, hogy $0 \le g \le 1$ λ-m.m. Ha ui. $A := \{g < 0\}$ $(\in \Omega)$, akkor

$$0 \le \nu(A) = \Phi(\chi_A) = \int \chi_A \cdot g\, d\lambda,$$

tehát $\int(-\chi_A \cdot g)\, d\lambda \le 0$. Mivel $-\chi_A \cdot g \ge 0$, ezért $\int(-\chi_A \cdot g)\, d\lambda \ge 0$, amit egybevetve az előbbiekkel

$$\int(-\chi_A \cdot g)\, d\lambda = 0$$

adódik. Tehát (ld. 3.3.2.6. Tétel) $\chi_A \cdot g = 0$ λ-m.m. Viszont az A halmaz pontjaiban a g nem nulla, ezért szükségszerűen $\lambda(A) = 0$, más szóval $g \ge 0$ λ-m.m.

Hasonlóan, legyen $B := \{g > 1\}$ $(\in \Omega)$, ekkor

$$\Phi(\chi_B) = \nu(B) = \int \chi_B \cdot g\, d\lambda \le \lambda(B).$$

Használjuk fel a nyilvánvaló $\chi_B \cdot g \ge \chi_B$-ből következő (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$\int \chi_B \cdot g\, d\lambda \ge \int \chi_B\, d\lambda = \lambda(B)$$

egyenlőtlenséget, ami az előző becsléssel együtt az

$$\int \chi_B \cdot g\, d\lambda = \lambda(B) = \int \chi_B\, d\lambda,$$

tehát az

$$\int \chi_B \cdot (g-1)\, d\lambda = 0$$

egyenlőséget adja. Innen $\chi_B \cdot (g-1) \ge 0$ alapján (ld. 3.3.2.6. Tétel) $\chi_B \cdot (g-1) = 0$ λ-m.m., azaz (lévén az $x \in B$ pontokban $g(x) - 1 \ne 0$) $\lambda(B) = 0$ következik. Így $g \le 1$ λ-m.m. is igaz.

Az előzőekkel analóg módon mutatható meg, hogy ha $C := \{g = 1\}$ $(\in \Omega)$, akkor $\mu(C) = 0$. Ui.

$$\Phi(\chi_C) = \nu(C) = \int \chi_C \cdot g\, d\lambda = \int \chi_C\, d\lambda = \lambda(C) = \mu(C) + \nu(C),$$

amiből az itt szereplő mértékek végessége miatt valóban megkapjuk a kívánt $\mu(C) = 0$ egyenlőséget. Ezért $\nu \ll \mu$ miatt $\nu(C) = 0$ is igaz. Továbbá az előbb belátott $0 \le g \le 1$ λ-m.m. becslésre tekintettel $\nu, \mu \le \lambda$ alapján azt mondhatjuk, hogy $0 \le g < 1$ μ-m.m. és $0 \le g < 1$ ν-m.m.

Legyen most $h \in L(\nu) \cap L^+(\nu)$, és bizonyítsuk be, hogy

$$(*) \qquad \int h\cdot(1-g)\,d\nu = \int hg\,d\mu.$$

Ez az egyenlőség nyilván ekvivalens azzal, hogy

$$\int h\,d\nu = \int hg\,d\nu + \int hg\,d\mu.$$

Vegyük figyelembe az $\int h\,d\nu$ értelmezését (ld. 3.3.3.), miszerint egy alkalmasan választott $h_n \in L_0^+(\nu) = L_0^+(\lambda)$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő sorozattal

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h, \quad \lim_{n\to\infty} \int h_n\,d\nu = \int h\,d\nu.$$

Mivel $h_n \in L^2(\lambda)$ és

$$\int h_n\,d\nu = \Phi(h_n) = \int h_n\cdot g\,d\lambda \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért (ld. 3.3.2.3 Tétel)

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n\,d\nu = \lim_{n\to\infty} \int h_n\cdot g\,d\lambda = \int hg\,d\lambda,$$

tehát $\int h\,d\nu = \int hg\,d\lambda$. Ugyanakkor az

$$\int hg\,d\lambda = \int hg\,d\nu + \int hg\,d\mu$$

egyenlőség már könnyen belátható.

Legyen a $0 < \varepsilon_n < 1$ $(n \in \mathbf{N})$ számsorozat monoton fogyó és $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ekkor a g-ről fentebb mondottakra tekintettel a

$$B_n := \{0 \le g \le 1 - \varepsilon_n\} \in \Omega \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazokra a következők teljesülnek: $B_n \subset B_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és alkalmasan választott $U \in \Omega$, $\mu(U) = \nu(U) = 0$ halmazzal

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \{0 \le g < 1\} = X \setminus U.$$

Ezért (ld. 2.3.1.4. Tétel) minden $A \in \Omega$ halmazra

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A \cap B_n) = \nu(A), \ \lim_{n\to\infty} \mu_f(A \cap B_n) = \mu_f(A).$$

Alkalmazzuk a $(*)$ összefüggést a

$$h_n := \frac{\chi_A}{1-g} \cdot \chi_{B_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre. Ezt megtehetjük, ui. $0 \le h_n \le 1/\varepsilon_n$, ezért a ν végessége miatt $h_n \in L(\nu) \cap L^+(\nu)$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x)}{1-g(x)} & (x \in X \setminus U) \\ 0 & (x \in U) \end{cases}$$

függvénnyel $f \in L^+(\mu)$, és

$$\int h_n(1-g)\, d\nu = \nu(A \cap B_n) = \int \chi_{A \cap B_n} \cdot \frac{g}{1-g}\, d\mu = \mu_f(A \cap B_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Így $\nu(A \cap B_n) = \mu_f(A \cap B_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, és az előbbiekre tekintettel

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(A \cap B_n) = \mu_f(A).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f := \dfrac{g}{1-g}$ függvény megfelel a 3.11.7. Tételben jelzett $\nu = \mu_f$ állításnak.

3.15. Fubini-tétel

Adott X_1, $X_2 \neq \emptyset$ „alaphalmazok" esetén tekintsük az (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértéktereket. Legyen

$$X := X_1 \times X_2$$

a két alaphalmaz Descartes-szorzata, valamint

$$\Omega := \Omega_1 \otimes \Omega_2 := \Omega(\{U \times V \in \mathcal{P}(X) : U \in \Omega_1, V \in \Omega_2\})$$

az Ω_1, Ω_2-beli halmazok Descartes-szorzatai által meghatározott legszűkebb szigma-algebra (ld. 2.1.). A továbbiakban az

$$f : X \to [0, +\infty]$$

kétváltozós függvényeket vizsgáljuk az integrálhatóság, és az integrál kiszámítása szempontjából. Az itt említett „integrál" (szigma-véges mértékek esetén) majd a μ_1, μ_2 mértékekből származó $\mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmérték (ld. 2.9.) szerint értendő. Meg fogjuk mutatni, hogy az ilyen értelemben integrálható f függvény esetén igaz a Riemann-integrállal kapcsolatban megismert szukcesszív integrálás elve. Ez az állítás – a jelen pont címében is szereplő –

Fubini-tétel, ami talán a matematika (és az alkalmazásainak) az egyik leggyakrabban idézett állítása.

Az (X, Ω) mérhető térrel kapcsolatban az első állításunk a következő (ez valójában a 2.9.2. Lemma, amit a jelen tárgyalás „folytonossága" érdekében – a bizonyításával együtt – megismétlünk):

3.15.1. Lemma. *Tetszőleges $A \in \Omega$ halmaz és $x \in X_1$, $y \in X_2$ elemek esetén*

a) $A_x := \{z \in X_2 : (x, z) \in A\} \in \Omega_2$;

b) $A^y := \{v \in X_1 : (v, y) \in A\} \in \Omega_1$.

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy az

$$\Omega' := \{A \in \mathcal{P}(X) : A_x \in \Omega_2,\ A^y \in \Omega_1 \quad (x \in X_1, y \in X_2)\}$$

halmazrendszer egy (X-beli) szigma-algebra. Az ui. nyilvánvaló, hogy $X \in \Omega'$, lévén $X_x = X_2 \in \Omega_2$, $X^y = X_1 \in \Omega_1$. Ha $A \in \Omega'$, akkor

$$(X \setminus A)_x = X_2 \setminus A_x \in \Omega_2,\ (X \setminus A)^y = X_1 \setminus A^y \in \Omega_1,$$

tehát $X \setminus A \in \Omega'$. Végül, ha adottak az $A_n \in \Omega'$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok, akkor

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big)_x = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)_x \in \Omega_2,\ \ \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big)^y = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^y \in \Omega_1.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega'$.

Tehát Ω' szigma-algebra az X-ben. Ha viszont $U \in \Omega_1$, $V \in \Omega_2$, akkor

$$(U \times V)_x = \begin{cases} \emptyset \in \Omega_2 & (x \notin U) \\ V \in \Omega_2 & (x \in U) \end{cases},\ (U \times V)^y = \begin{cases} \emptyset \in \Omega_1 & (y \notin V) \\ U \in \Omega_1 & (y \in V) \end{cases}$$

miatt $U \times V \in \Omega'$, így (a „legszűkebb szigma-algebra" értelmezésére (ld. 2.1.) tekintettel) $\Omega \subset \Omega'$. ■

Az eddigi jelöléseket megtartva legyen egy

$$f : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvény és $x \in X_1$, $y \in X_2$ esetén

$$f_x(z) := f(x, z) \quad (z \in X_2),\ f^y(v) := f(v, y) \quad (v \in X_1).$$

Az így definiált

$$f_x : X_2 \to \overline{\mathbf{R}},\ f^y : X_1 \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvényekről mutassuk meg, hogy mérhetők, ha f is mérhető. Nevezetesen, igaz a

3.15.2. Lemma. *Minden* $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvényre és* $x \in X_1$, $y \in X_2$ *elemekre a fenti* f_x, f^y *függvények mérhetők.*

Bizonyítás. A lemma igazolása címén elég annyit megjegyezni, hogy egyrészt minden $Y \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmaz (ld. 3.1.1. Definíció) esetén

$$(f_x)^{-1}[Y] = \left(f^{-1}[Y]\right)_x, \ (f^y)^{-1}[Y] = \left(f^{-1}[Y]\right)^y,$$

másrészt az f mérhetősége miatt $f^{-1}[Y] \in \Omega$, ezért alkalmazható a 3.15.1. Lemma: $\left(f^{-1}[Y]\right)_x \in \Omega_2$, $\left(f^{-1}[Y]\right)^y \in \Omega_1$, ami az f_x, f^y függvények mérhetőségét jelenti. ■

Továbbra is megtartva az eddigi jelöléseket értelmezzünk minden egyes $A \in \Omega$ halmaz mellett két újabb leképezést az alábbiak szerint:

$$f_A(x) := \mu_2(A_x) \quad (x \in X_1), \ f^A(y) := \mu_1(A^y) \quad (y \in X_2).$$

A 3.15.1. Lemma alapján az előbbi mindkét definíció korrekt, azaz valóban definiáltunk egy-egy

$$f_A : X_1 \to [0, +\infty], \ f^A : X_2 \to [0, +\infty]$$

függvényt. Ezekkel a függvényekkel kapcsolatos a

3.15.3. Tétel. *Ha a fenti* μ_1, μ_2 *mértékek szigma-végesek, akkor tetszőleges mérhető* $A \subset X$ *halmazra* $f_A \in L^+(\mu_1)$, $f^A \in L^+(\mu_2)$, *és*

$$\int f_A \, d\mu_1 = \int f^A \, d\mu_2.$$

Bizonyítás. Ha $A = U \times V$ $(U \in \Omega_1, \ V \in \Omega_2)$, akkor a 3.15.1. Lemma bizonyításának a végén az $(U \times V)_x$, $(U \times V)^y$ $(x \in X_1, \ y \in X_2)$ „metszethalmazokról" mondottak alapján

$$f_A = \mu_2(V) \cdot \chi_U, \ f^A = \mu_1(U) \cdot \chi_V.$$

Így ekkor az $f_A \in L^+(\mu_1)$, $f^A \in L^+(\mu_2)$ tartalmazások nyilvánvalóak, és

$$\int f_A \, d\mu_1 = \mu_1(U) \cdot \mu_2(V) = \int f^A \, d\mu_2.$$

Tegyük fel most azt, hogy a μ_2 véges – azaz $\mu_2(X_2) < +\infty$ –, és legyen

$$\mathcal{D} := \{A \in \Omega : f_A \in L^+(\mu_1)\}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a $\mathcal{D}$ egy Dynkin-rendszer (ld. 2.6. ii) megjegyzés). Mivel

$$\mathcal{M} := \{U \times V \in \Omega : U \in \Omega_1, \ V \in \Omega_2\} \subset \mathcal{D},$$

valamint tetszőleges $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{M}$ (röviden tehát a „téglahalmazok" $\mathcal{M}$ halmazrendszere *metszet-stabil*), ezért az előbb idézett megjegyzés szerint az $\mathcal{M}$-et tartalmazó legszűkebb Dynkin-rendszer $(\mathcal{D}(\mathcal{M}))$ megegyezik az $\Omega = \Omega(\mathcal{M})$-mel. Az $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ és a $\mathcal{D} \subset \Omega$ tartalmazások miatt ugyanakkor

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D} \subset \Omega$$

is igaz, amiből a $\mathcal{D} = \Omega$ egyenlőség már nyilván következik. Mindez azt jelenti, hogy bármelyik $A \in \Omega$ halmazra $f_A \in L^+(\mu_1)$.

Ha a μ_2 nem véges, azaz $\mu_2(X_2) = +\infty$, akkor legyen (a μ_2 szigma-végessége (ld. 2.5.3. Definíció) miatt létező) $V_n \in \Omega_2$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat olyan, hogy

$$V_n \subset V_{n+1},\ \mu_2(V_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N}),\ X_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n.$$

Ha minden $n \in \mathbf{N}$ indexre a μ_{2n} mértéket úgy definiáljuk az Ω_2-n, hogy

$$\mu_{2n}(Q) := \mu_2(Q \cap V_n) \qquad (Q \in \Omega_2),$$

akkor a μ_{2n} egy véges mérték. Következésképpen az eddig bebizonyítottak szerint az

$$f_{An}(x) := \mu_{2n}(A_x) \qquad (x \in X_1)$$

függvény $L^+(\mu_1)$-beli. A 2.3.1.4. Tétel alapján minden $x \in X_1$ pontban

$$\lim_{n\to\infty} f_{An}(x) = f_A(x),$$

ezért (ld. 3.1.) $f_A \in L^+(\mu_1)$.

Az $f^A \in L^+(\mu_2)$ relációt a fentiekkel analóg módon bizonyíthatjuk be.

Legyen végül

$$\varphi_1(A) := \int f_A \, d\mu_1,\ \ \varphi_2(A) := \int f^A \, d\mu_2 \qquad (A \in \Omega).$$

A

$$\varphi_1,\ \varphi_2 : \Omega \to [0, +\infty]$$

leképezésekre $\varphi_1(\emptyset) = \varphi_2(\emptyset) = 0$ nyilván igaz, hiszen $f_\emptyset \equiv 0$, $f^\emptyset \equiv 0$. A Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel) sorokra vonatkozó alakjából (ld. 3.4. iii) megjegyzés) az is egyszerűen adódik, hogy a φ_i $(i = 1, 2)$ függvények szigma-additívok. Valóban, ha az $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, akkor

$$f_A = \sum_{n=0}^{\infty} f_{A_n},\ f^A = \sum_{n=0}^{\infty} f^{A_n},$$

így (pl.)

$$\varphi_1(A) = \int \sum_{n=0}^{\infty} f_{A_n}\, d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_{A_n}\, d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(A_n).$$

Azt kaptuk ezzel, hogy a φ_i $(i = 1, 2)$ leképezések mértékek. A bizonyítás elején mondottak alapján ezekre a mértékekre igaz az, hogy

$$(*) \qquad \varphi_1(U \times V) = \mu_1(U) \cdot \mu_2(V) = \varphi_2(U \times V) \qquad (U \in \Omega_1,\ V \in \Omega_2).$$

Az is könnyen adódik, hogy a φ_i-k szigma-végesek. Ui. (pl. a φ_1-re részletezve) a fenti V_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazok mellett a μ_1 mérték szigma-végessége miatt van olyan $U_n \in \Omega_1$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat is, amire

$$U_n \subset U_{n+1},\ \ \mu_1(U_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N}),\ X_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$U_n \times V_n \subset U_{n+1} \times V_{n+1},\ \ \varphi_1(U_n \times V_n) = \mu_1(U_n) \cdot \mu_2(V_n) < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \times V_n,$$

tehát a φ_1 valóban szigma-véges.

Minden „készen áll" tehát ahhoz, hogy alkalmazhassuk a 2.5.4. (egyértelműségi) Tételt a φ_i $(i = 1, 2)$ mértékekre, figyelembe véve az $\Omega = \Omega(\mathcal{M})$ és a fenti $(*)$ egyenlőségeket. Innen aztán a még hiányzó $\varphi_1 = \varphi_2$ összefüggést kapjuk. ■

A 3.15.3. Tétel bizonyításából az is kiderült, hogy (az ottani jelölésekkel) $\varphi_1 = \varphi_2$ nem más, mint a $\mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmérték (ld. 2.9.), azaz minden $A \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ halmazra

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \varphi_1(A) = \varphi_2(A) = \int f_A\, d\mu_1 = \int f^A\, d\mu_2.$$

Legyenek tehát adottak az (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ szigma-véges mértékterek, és az

$$X := X_1 \times X_2,\ \Omega := \Omega_1 \otimes \Omega_2,\ \mu := \mu_1 \otimes \mu_2$$

jelölésekkel tekintsük ezen terek (ld. 2.9.) (X, Ω, μ) szorzatát. Ez (a 3.15.3. Tétel bizonyítása szerint) szintén egy szigma-véges mérték tér.

Az $f : X \to [0, +\infty]$ kétváltozós mérhető függvény esetén legyen

$$\varphi_f(x) := \int f_x\, d\mu_2 \quad (x \in X_1),\ \varphi^f(y) := \int f^y\, d\mu_1 \quad (y \in X_2).$$

Mivel $f \in L^+(\mu)$, ezért (ld. 3.15.2. Lemma)

$$f_x \in L^+(\mu_2) \quad (x \in X_1), \quad f^y \in L^+(\mu_1) \quad (y \in X_2).$$

Így a φ_f, φ^f függvények definíciója korrekt, mindkettő nem-negatív leképezés. Megmutatjuk, hogy mérhetők is, sőt, igaz a

3.15.4. Lemma (Tonelli-tétel). *A fenti szigma-véges (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértékterek esetén az (X, Ω, μ) szorzat-térre vonatkozóan tetszőleges $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$ mérhető függvényre*

a) $\varphi_f \in L^+(\mu_1)$, $\varphi^f \in L^+(\mu_2)$;

b) $\int f\, d\mu = \int \varphi_f\, d\mu_1 = \int \varphi^f\, d\mu_2$.

Bizonyítás. Csak a φ_f-re vonatkozó állítások bizonyítását részletezzük, mivel a φ^f-re mindez analóg módon végezhető.

Tegyük fel először azt, hogy az f lépcsősfüggvény, azaz $f \in L_0^+(\mu)$. Ekkor egy $\emptyset \neq \mathcal{J}$ véges halmazzal és alkalmas, páronként diszjunkt $Q_i \in \Omega$ $(i \in \mathcal{J})$ halmazokkal, valamint $z_i \geq 0$ $(i \in \mathcal{J})$ számokkal

$$f = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \chi_{Q_i}.$$

Ha $x \in X_1$, akkor

$$f_x = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot (\chi_{Q_i})_x = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \chi_{(Q_i)_x},$$

amiből rögtön következik az, hogy

$$\int f_x\, d\mu_2 = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \mu_2((Q_i)_x) = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot f_{Q_i}(x).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\varphi_f = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot f_{Q_i} \in L^+(\mu_1),$$

és

$$\int \varphi_f\, d\mu_1 = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \int f_{Q_i}\, d\mu_1 = \sum_{i \in \mathcal{J}} z_i \cdot \mu(Q_i) = \int f\, d\mu.$$

Ha most $f \in L^+(\mu)$ tetszőleges függvény, ekkor egy alkalmasan választott monoton növekedő $f_n \in L_0^+(\mu)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n, \quad \int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu.$$

Nyilvánvaló, hogy minden $x \in X_1$ elemre az

$$(f_n)_x \in L_0^+(\mu_2) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat monoton nőve tart az f_x-hez, és ugyanígy a

$$\varphi_{f_n} \in L^+(\mu_1) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat monoton nőve tart a φ_f-hez. Innen a lépcsősfügvényekre már bebizonyított állítást felhasználva a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) alapján $\varphi_f \in L^+(\mu_1)$, és

$$\int \varphi_f \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_{f_n} \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

adódik. ■

Legyen most $f \in L(\mu)$. A 3.15.2. Lemma szerint minden $x \in X_1$ esetén az f_x függvény mérhető, továbbá fennállnak az alábbi triviális egyenlőségek:

$$|f|_x = |f_x|, \ (f^\pm)_x = (f_x)^\pm.$$

Következésképpen a 3.15.4. Lemma szerint

$$\int |f_x| \, d\mu_2 = \int |f|_x \, d\mu_2 = \varphi_{|f|}(x), \quad \int \varphi_{|f|} \, d\mu_1 = \int |f| \, d\mu < +\infty,$$

ezért (ld. 3.3.2.6. Tétel) $\varphi_{|f|}(x) = \int |f_x| \, d\mu_2 < +\infty$ μ_1-m.m. $x \in X_1$ mellett igaz. Minden ilyen x-re tehát $f_x \in L(\mu_2)$.

Ugyanígy látható be, hogy μ_2-m.m. $y \in X_2$ esetén $f^y \in L(\mu_1)$. Ha viszont valamilyen $x \in X_1$ elemre $f_x \in L(\mu_2)$, akkor

$$\varphi_f(x) = \int f_x \, d\mu_2 = \int (f_x)^+ \, d\mu_2 - \int (f_x)^- \, d\mu_2 =$$

$$\int (f^+)_x \, d\mu_2 - \int (f^-)_x \, d\mu_2 = \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x).$$

Mivel (ld. 3.15.4. Lemma)

$$\int \varphi_{f^\pm} \, d\mu_1 = \int f^\pm \, d\mu < +\infty,$$

ezért $\varphi_{f^\pm} \in L(\mu_1)$. Így a φ_f függvény előbbi felbontása alapján $\varphi \in L(\mu_1)$ is teljesül, és

$$\int \varphi_f \, d\mu_1 = \int \varphi_{f^+} \, d\mu_1 - \int \varphi_{f^-} \, d\mu_1 = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Hasonlóan látható be az utóbbi egyenlőség (az előzményeivel együtt) a φ_f helyett a φ^f-re.

A fentieket összefoglalva tehát a következő tételt bizonyítottuk be.

3.15.5. Tétel (Fubini). *A fenti szigma-véges* (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ *mértékterek esetén az eddigi* (X, Ω, μ) *szorzattérre nézve tetszőleges* $f \in L(\mu)$ *függvényre igazak az alábbi állítások*:

a) $f_x \in L(\mu_2)$ μ_1-m.m. $x \in X_1$ *elemre*;

b) $f^y \in L(\mu_1)$ μ_2-m.m. $y \in X_2$ *elemre*;

c) $\varphi_f \in L(\mu_1)$, $\varphi^f \in L(\mu_2)$;

d) $\int f\, d\mu = \int \varphi_f\, d\mu_1 = \int \varphi^f\, d\mu_2$.

A 3.15.4. Lemma b), vagy a 3.15.4. Tétel d) egyenlőségét *szukcesszív integrálás* elnevezéssel szokás említeni.

Általában egy $f \in L(\mu)$ függvénynek (valamilyen μ mérték szerinti) integráljára az eddigi $\int f\, d\mu$ szimbólum mellett használatos a kissé konzervatív, a függvény jele helyett (joggal kifogásolható módon) a függvényértéket feltüntető

$$\int f(x)\, d\mu(x)$$

jelölés is. A φ_f, φ^f függvények definíciójára gondolva pl. a Fubini-tétel (ld. 3.15.5. Tétel) d) állítása ezzel a szimbolikával a következőképpen is írható:

$$\int f\, d\mu = \int f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) =$$

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y),$$

ami eléggé szemléletes módon fejezi ki a fent említett szukcesszív („az egyes változók szerinti egymás után való") integrálás tényét.

A fent tárgyalt Fubini-tétel, valamint a Tonelli-tétel (ld. 3.15.4. Lemma) egyik fontos alkalmazásaként bebizonyítjuk a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel) ún. integrális változatát, ami az alkalmazások szempontjából is különös jelentőséggel bír. Legyen ehhez (X, Ω, μ) és (Y, Θ, ν) egy-egy szigma-véges mértéktér, és tekintsük az $(X \times Y, \Omega \otimes \Theta, \mu \otimes \nu)$ szorzatteret. Ha az $f : X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény a $\mu \otimes \nu$ szorzatmérték szerint integrálható, akkor a 3.15.4. Lemma alapján

$$\int \left| \int f(x,y)\, d\nu(y) \right| d\mu(x) \le \int \left(\int |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ez az egyenlőtlenség messzemenően általánosítható. Legyen ui. $1 < p < +\infty$, ekkor (ld. 3.15.5. Tétel) a μ-m.m. $x \in X$ helyen értelmezett

$$G(x) := \left| \int f(x,y)\, d\nu(y) \right|$$

függvénnyel a 3.15.4. Lemma és a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) alapján

$$\int G^p(x)\,d\mu(x) = \int \left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x) =$$

$$\int G^{p-1}(x)\left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right| d\mu(x) \le \int G^{p-1}(x)\left(\int |f(x,y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x) =$$

$$\int \left(\int G^{p-1}(x)|f(x,y)|\,d\mu(x)\right) d\nu(y) \le$$

$$\int \left[\left(\int G^{(p-1)q}(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}\right] d\nu(y)$$

(ahol $1/p + 1/q = 1$). Mivel $(p-1)q = p$, ezért

$$\int \left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x) \le \int \left[\left(\int G^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}\right] d\nu(y).$$

Innen $0 < \int G^p(x)\,d\mu(x) < +\infty$ esetén $1 - 1/q = 1/p$ miatt egy osztás után

$$\left(\int \left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \int \left(\int |f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség triviálisan igaz akkor is, ha $\int |\int f(x,y)\,d\nu(y)|^p\,d\mu(x) = 0$, de megmutatjuk, hogy

$$\int \left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x) = +\infty$$

esetén is fennáll, amikor is az

$$\int \left(\int |f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y) = +\infty$$

egyenlőség teljesül. Ehhez vegyük figyelembe a mértéktereink szigma-végességét (ld. 2.5.3. Definíció). Van tehát olyan $X_n \in \Omega$, $X_n \subset X_{n+1}$, $\mu(X_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat, amellyel $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Legyen a χ_n az X_n $(n \in \mathbf{N})$ halmaz karakterisztikus függvénye, és írjunk az előbbiekben a G helyett $G_n := \chi_n \cdot \min\{G, n\}$-et. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\int G_n^p(x) d\mu(x) \le n^p \cdot \mu(X_n) < +\infty,$$

továbbá a fenti bizonyítással

$$\int G_n^p(x)\,d\mu(x) = \int G_n^{p-1}(x)G_n(x)\,d\mu(x) \le \int G_n^{p-1}(x)G(x)\,d\mu(x) \le$$

$$\int G_n^{p-1}(x)\left(\int |f(x,y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x) \le$$

$$\left(\int G_n^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q}\cdot\int\left(\int|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}d\nu(y).$$

Innen kapjuk az

$$\left(\int G_n^p(x)d\mu(x)\right)^{1/p}\le\int\left(\int|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}d\nu(y)$$

egyenlőtlenséget. Mivel a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) miatt

$$\lim_{n\to\infty}\int G_n^p(x)\,d\mu(x)=\int G^p(x)\,d\mu(x)=\int\left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)=+\infty,$$

ezért az

$$\int\left(\int|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}d\nu(y)=+\infty$$

egyenlőség máris következik.

Beláttuk tehát a következő állítást.

3.15.6. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy az* (X,Ω,μ), (Y,Θ,ν) *mértékterek szigma-végesek. Ekkor minden, a* $\mu\otimes\nu$ *szorzatmérték szerint integrálható* $f:X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ *függvény és* $1\le p<+\infty$ *kitevő esetén*

$$\left(\int\left|\int f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\le\int\left(\int|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}d\nu(y).$$

3.16. Megjegyzések

i) Az alábbi példa azt mutatja, hogy a 3.15.3. Tételben a mértékek szigma-végessége nem csupán az alkalmazott bizonyítási technika miatt lényeges. Legyen ui.

$$X_i:=[0,1]\qquad(i=1,2),$$

a μ_1 a $[0,1]$-beli Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.), a $\mu_2(A)$ $(A\in\Omega_2)$ pedig legyen az A elemeinek a száma (ha az A véges), és legyen $+\infty$ (ha az A nem véges), ahol $\Omega_1=\Omega_2$ a $[0,1]$-beli Borel-halmazok (ld. 2.7.1.) rendszere. Ekkor

$$A:=\{(x,y)\in X_1\times X_2:x=y\}\in\Omega,\quad f_A(x)=\mu_2(A_x)=1,$$

$$f^A(y)=\mu_1(A^y)=0\qquad(x\in X_1,\ y\in X_2).$$

Tehát

$$\int f_A\,d\mu_1=1\ne\int f^A\,d\mu_2=0.$$

(Könnyű meggondolni, hogy a μ_2 nem szigma-véges.)

ii) Valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett tekintsük az alábbi $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ típusú lineáris transzformációkat: $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $i, j = 1, ..., n$, $i < j$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén

a) $T(x) := (x_1, ..., x_{i-1}, \lambda \cdot x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$;

b) $R(x) := (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, ..., x_n)$;

c) $S(x) := (x_1, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n)$.

Nem nehéz belátni, hogy bármilyen $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ invertálható lineáris leképezés (azaz egy $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times n}$ nem szinguláris mátrix) véges sok T-, R-, S-típusú operátor kompozíciója. Ha viszont az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény $L^1(\hat{\mu}_n)$-beli, akkor a Fubini-tétel (3.15.5. Tétel) szerint

$$\int f \, d\hat{\mu}_n = \int f \circ S \cdot |\det S| \, d\hat{\mu}_n$$

($\hat{\mu}_n$ az $\mathbf{R}^n$-beli Lebesgue-mértéket jelöli (ld. 2.7.1.)). Ugyanez mondható az S helyett a T-re és az R-re, a Fubini-tétel mellett a $\hat{\mu}_1$ Lebesgue-mérték eltolás-invarianciáját (ld. 2.7.), valamint az azzal analóg módon igazolható

$$\int g_\lambda \, d\hat{\mu}_1 = |\lambda| \cdot \int g \, d\hat{\mu}_1$$

($0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$, $g \in L^1(\hat{\mu}_1)$, $g_\lambda(x) := g(x/\lambda) \quad (x \in \mathbf{R})$) egyenlőséget figyelembe véve. Innen viszont a fenti Φ-re és f-re azonnal adódik az

$$\int f \, d\hat{\mu}_n = \int f \circ \Phi \cdot |\det \Phi| \, d\hat{\mu}_n$$

integráltranszformációs formula. Ha ebben egy $A \in \hat{\Omega}_n$ halmaz mellett $f := \chi_A$-t írunk, akkor a korábban már említett (ld. 2.8. vi) megjegyzés)

$$\hat{\mu}_n(\Phi[A]) = |\det \Phi| \cdot \hat{\mu}_n(A)$$

egyenlőséget kapjuk.

iii) Mutassuk meg (ld. 3.10. xi) megjegyzés), hogy ha $X \neq \emptyset$ és adott az (X, Ω, μ) szigma-véges mértéktér, akkor tetszőleges $0 < p < +\infty$ kitevő és $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény esetén

$$\|f\|_p^p = p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot \varphi_f(y) \, dy.$$

Ui. szukcesszív integrálással (a $(0, +\infty)$ félegyenesen a Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.) szerint történő $\int_0^{+\infty} ... \, dy$ integrálásra utalva)

$$\int |f|^p d\lambda = \int \left(p \cdot \int_0^{|f(x)|} y^{p-1} dy \right) d\mu(x) = \int \left(p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot \chi_{\{|f|>y\}}(x) dy \right) d\mu(x) =$$

$$p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot \left(\int \chi_{\{|f|>y\}}(x) d\mu(x) \right) dy = p \cdot \int_0^{+\infty} y^{p-1} \cdot \varphi_f(y) dy.$$

iv) A Minkowski-egyenlőtlenséget (ld. 3.15.6. Tétel) a következőképpen fogalmazhatjuk meg: *az integrál normája kisebb vagy egyenlő, mint a norma integrálja* (ahol a „norma" a $\|\cdot\|_p$ normát jelenti).

v) A 3.15.6. Tétel bizonyításában követett módszerrel kapjuk (az ott szereplő mértékterek mellett) azt, hogy bármilyen, az $\Omega\otimes\Theta$ szigma-algebrára nézve mérhető $f : X\times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény és $1 \le p < +\infty$ kitevő esetén

$$\left(\int \left(\int |f(x,y)|\, d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \int \left(\int |f(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

A Tonelli-tétel (ld. 3.15.4. Lemma) miatt itt $p = 1$-re egyenlőség van.

vi) Könnyű meggondolni, hogy a 3.15.6. Tételbeli Minkowski-egyenlőtlenségből a klasszikus (ld. 3.5.3. Tétel)

$$\|g+h\|_p \le \|g\|_p + \|h\|_p \qquad (g,h \in L^p)$$

változat is következik (tetszőleges szigma-véges (X,Ω,μ) mértéktér és $1 \le p < +\infty$ esetén). Valóban, legyen ehhez $Y := [0,2]$, a Θ szigma-algebra legyen a $[0,2]$ intervallumbeli Lebesgue-mérhető halmazok rendszere, a ν pedig a $[0,2]$-beli Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.). Ha

$$f(x,y) := \begin{cases} g(x) & (0 \le y < 1) \\ h(x) & (1 \le y \le 2) \end{cases} \qquad (x \in X),$$

akkor

$$\left(\int \left|\int f(x,y)\, d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} =$$

$$\left(\int \left|\int_0^1 f(x,y)\, d\nu(y) + \int_1^2 f(x,y)\, d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} =$$

$$\left(\int |g(x) + h(x|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} = \|g+h\|_p.$$

Tehát a 3.15.6. Tétel szerint

$$\|g+h\|_p \le \int \left(\int |f(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y) =$$

$$\int_0^1 \left(\int |f(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y) + \int_1^2 \left(\int |f(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y) =$$

$$\left(\int |g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int |h(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} = \|g\|_p + \|h\|_p.$$

4. fejezet

Topologikus mértékek

A mérték (és az erre épülő) integrál-fogalom felépítésekor egy tetszőleges („absztrakt") X halmazból indultunk ki, amiről értelemszerűen nem tételeztünk fel semmiféle „extra" tulajdonságokat. Így jutottunk el az (X, Ω, μ) mértéktérhez, ill. később bizonyos $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények esetén az $\int f\, d\mu$ integrálhoz. Mindez természetesen nem zárja ki azt, hogy egyes konkrét modellekben mind az illető mérték, mind pedig az integrál fogalmában megjelenhetnek a kiindulási X „alaphalmaz" esetleges speciális tulajdonságai. Sőt, ez utóbbiak adott esetben meghatározó szerepet játszhatnak magának a mérték-integrálfogalomnak a kialakításában is. Példaként elég a 2.3.2., 2.7. pontokban tárgyalt Lebesgue-mértékre (és aztán a Lebesgue-integrálra (ld. 3.5.)) gondolni, amikor is erősen kihasználtuk azt a tényt, hogy a mértéktér alaphalmazát jelentő $\mathbf{R}^p$ $(1 \leq p \in \mathbf{N})$ halmazban „természetes módon" adott egy topológia: röviden szólva a nyílt (zárt) halmazok fogalma. Ez a topológiai struktúra meghatározó szerepet játszott az említett vizsgálatokban, így joggal vetődik fel a kérdés: vajon véletlen-e ez a kapcsolat a Lebesgue-mérték és az $\mathbf{R}^p$ topológiája között, vagy pedig valamilyen általános összefüggés speciális esetével állunk szemben?

A továbbiakban ezt a kérdéskört vesszük szemügyre, megmutatva, hogy bizonyos tulajdonságú topologikus terekben hogyan lehet – az $\mathbf{R}^p$ mintájára – olyan mértéket megadni, amit valamilyen értelemben a tér topológiája generál. Ehhez elöljáróban (a teljesség kedvéért) röviden összefoglaljuk azokat a topologiai ismereteket, amikre a későbbiekben szükségünk lesz.

4.1. Topologikus terek

A metrikus terek nyílt halmazainak bizonyos karakterisztikus tulajdonságai módot adnak arra, hogy a nyílt halmaz fogalmának az absztrakciója révén egy, a metrikus tereknél általánosabb tértípust értelmezzünk. Idézzük fel röviden ezeket a tulajdonságokat: a szóban forgó metrikus tér „alaphalmaza" és az üreshalmaz egyaránt nyílt, tetszőlegesen választott nyílt halmazok egyesítése is és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

4.1.1. A topológia alapfogalmai

Legyen az X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ pedig olyan halmazrendszer, amire fennállnak a következők:

1° $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;

2° ha $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$;

3° ha $\Gamma \neq \emptyset$ véges és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \in \mathcal{T}$.

Ekkor a $\mathcal{T}$-t *topológiának,* az $(X, \mathcal{T})$ rendezett párt pedig *topologikus térnek* nevezzük. Minden X halmaz esetén

$$\{\emptyset, X\},\ \mathcal{P}(X)$$

nyilván egy-egy topológia, azaz $(X, \{\emptyset, X\})$ és $(X, \mathcal{P}(X))$ topologikus terek. Világos továbbá, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén adott az $Y \subset X$ részhalmaz, és

$$\mathcal{T}_Y := \{A \cap Y \in \mathcal{P}(Y) : A \in \mathcal{T}\},$$

akkor az $(Y, \mathcal{T}_Y)$ pár is topologikus tér (az $(X, \mathcal{T})$ *topologikus altere*). Speciálisan, ha $Y \in \mathcal{T}$, akkor $\mathcal{T}_Y := \mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{T}$.

Az X (alap)halmaz valamilyen $A \subset X$ részhalmazát *nyíltnak* nevezzük, ha $A \in \mathcal{T}$. Speciálisan, ha $X \neq \emptyset$, akkor minden (X, ρ) metrikus tér topologikus tér az alábbi értelemben: az $A \subset X$ halmaz nyílt, ha $A = \emptyset$, vagy tetszőleges $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$, hogy

$$K_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\} \subset A.$$

Ekkor ui.

$$\mathcal{T}_\rho := \{A \subset X : A \text{ nyílt}\}$$

topológia, azaz az $(X, \mathcal{T}_\rho)$ topologikus tér. (Emlékeztetünk arra, hogy minden $\xi \in X$, $r > 0$ mellett $K_r(\xi) \in \mathcal{T}_\rho$.) Azt mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{T})$ toplogikus tér *metrizálható,* ha van olyan $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ metrika, amivel $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$. Mindezt így fogjuk jelölni: $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$. Könnyű ugyanakkor meggyőződni arról, hogy nem minden topologikus tér metrizálható. Valóban, legyen valamilyen $a \neq b$ elemek esetén

$$X := \{a, b\} \text{ és } \mathcal{T} := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}.$$

Ekkor (könnyen beláthatóan) a $\mathcal{T}$ topológia, azaz $(\{a, b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\})$ topologikus tér. Ha $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ olyan metrika lenne, amivel $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$, akkor a $q := \rho(a, b)$ (> 0) számmal $K_q(b) = \{b\} \in \mathcal{T}_\rho$ is teljesülne. Ez viszont nem igaz, tehát ilyen ρ metrika nem létezik.

A nyílt halmaz absztrakt fogalmának a segítségével különböző, már az elemi vizsgálódásokban is fontos szerepet játszó pont-, ill. halmaztípusok absztrakt megfelelőit értelmezhetjük tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus térben. Az alábbiakban ezek közül sorolunk fel néhányat.

i) Az $A \subset X$ halmaz *belsejét* (röviden: $\operatorname{int} A$) mindazon $T \in \mathcal{T}$ halmazok egyesítéseként definiáljuk, amelyekre $T \subset A$ igaz. Világos, hogy $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{int} X = X$, $\operatorname{int} A \subset A$, $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$, valamint, ha $T \in \mathcal{T}$ és $T \subset A$, akkor $T \subset \operatorname{int} A$. (Az utóbbi tulajdonság miatt mondjuk azt, hogy $\operatorname{int} A$ az A halmaz *legbővebb* nyílt részhalmaza.) Továbbá az A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int} A$.

ii) Legyen $x \in X$. Az x elem *környezetének* nevezünk minden olyan $A \subset X$ halmazt, amire $x \in \operatorname{int} A$. A környezetek jelölésére általában a $K(x)$ jelölést fogjuk használni. Nyilván $\operatorname{int} K(x)$ is környezete az x-nek, és $\operatorname{int} K(x) \subset K(x)$, tehát $x \in K(x)$. Világos, hogy ha $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, akkor bármilyen $r > 0$ esetén $K_r(x)$ (nyílt) környezete az x-nek.

iii) Egy $\emptyset \neq A \subset$ halmaz *belső pontjának* nevezzük az $a \in A$ elemet, ha van olyan $K(a)$, amivel $K(a) \subset A$. Az eddigieket egybevetve azt kapjuk, hogy $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ akkor és csak akkor igaz, ha az A minden pontja belső pontja az A-nak: $a = \operatorname{int} A$.

iv) A $B \subset X$ halmaz legyen *zárt,* ha $X \backslash B \in \mathcal{T}$. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel az X zárt részhalmazainak a rendszerét, ekkor egyszerűen kapjuk az alábbiakat:

1° $X, \emptyset \in \mathcal{C}$;

2° ha $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{C}$, akkor $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{C}$;

3° ha $\Gamma \neq \emptyset$ véges és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \in \mathcal{C}$, akkor $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \in \mathcal{C}$.

Nyilvánvaló, hogy minden $A \subset X$ halmazra $A \in \mathcal{T}$ azzal ekvivalens, hogy $X \setminus A \in \mathcal{C}$.

v) Egy $A \subset X$ halmaz *lezárását* (röviden: $\overline{A}$) mindazon $B \in \mathcal{C}$ halmazok metszeteként definiáljuk, amelyekre $A \subset B$ igaz. Világos, hogy

$$\overline{\emptyset} = \emptyset,\ \overline{X} = X,\ A \subset \overline{A},\ \overline{A} \in \mathcal{C},$$

továbbá, ha $B \in \mathcal{C}$ és $A \subset B$, akkor $\overline{A} \subset B$. (Az utóbbi tulajdonság miatt mondjuk azt, hogy az $\overline{A}$ az A halmazt lefedő *legszűkebb* zárt részhalmaza az X-nek.) Az A nyilván pontosan akkor zárt, ha $A = \overline{A}$. Az A *mindenütt sűrű* (az X-ben), ha $\overline{A} = X$.

vi) Legyen $A \subset X$, $x \in X$. Azt mondjuk, hogy az x elem *érintkezési pontja* az A-nak, ha bármelyik $K(x)$ környezet esetén

$$A \cap K(x) \neq \emptyset.$$

Nyilvánvaló, hogy az A halmaz minden pontja érintkezési pontja is az A-nak. Nem nehéz megmutatni, hogy $x \in \overline{A}$ akkor és csak akkor igaz, ha az x érintkezési pontja az A-nak.

vii) Az $x \in X$ elem *torlódási pontja* az $A \subset X$ halmaznak, ha tetszőleges $K(x)$ környezetre

$$A \cap (K(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Legyen A' az A halmaz torlódási pontjainak a halmaza. Világos, hogy amennyiben $x \in X \setminus A$ érintkezési pontja az A-nak, akkor $x \in A'$. Könnyű meggondolni továbbá, hogy tetszőleges $A \subset X$ esetén az alábbi ekvivalencia igaz:

$$A \text{ zárt} \iff A' \subset A.$$

Azt sem nehéz belátni, hogy az $\overline{A} = X$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha minden $\emptyset \neq K \in \mathcal{T}$ halmazra $K \cap A \neq \emptyset$.

Tekintsük a fenti nem metrizálható topologikus teret: legyen $a \neq b$, és

$$X := \{a, b\}\ ,\ \mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Ekkor az $(X, \mathcal{T})$ topologikus térben a b-nek nyilván egyetlen környezete létezik: $K(b) = X$. Következésképpen $X \cap (K(b) \setminus \{b\}) = \{a\} \neq \emptyset$, azaz $b \in X'$. Nem igaz tehát általában a metrikus terek vizsgálatából „megszokott" jellemzése a torlódási pontoknak, hogy ti. egy halmaz valamely torlódási pontjának bármelyik környezetében végtelen sok pontja van az illető halmaznak.

Nevezzük ugyanakkor a szóban forgó topologikus teret T_1-*térnek,* ha igaz az alábbi kijelentés: tetszőleges $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén megadhatók olyan $K(x)$, $K(y)$ környezetek, hogy

$$x \notin K(y) \text{ és } y \notin K(x).$$

Azt is mondjuk ekkor, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus térre teljesül a T_1-*axióma.* Világos, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ tér metrizálható, azaz valamilyen $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ metrikával $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, akkor a szóban forgó topologikus tér T_1-tér. Valóban, ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor az $r := \rho(x, y)$ választással $x \notin K_r(y)$ és $y \notin K_r(x)$. Innen az is következik, hogy egy topológia „metrizálhatóságának" szükséges feltétele az illető topologikus tér T_1-tér volta. Nyilvánvaló pl., hogy a fenti (nem metrizálható) topologikus térben nem igaz a T_1-axióma: a b egyetlen $K(b) = \{a, b\}$ környezetére $a \in K(b)$.

Jegyezzük meg, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér T_1-tér, akkor tetszőleges $a \in X$ esetén az $\{a\}$ halmaz zárt. Ui., ha lenne olyan $a \in X$, amire ez nem igaz, azaz $\{a\} \neq \overline{\{a\}}$, akkor egy $b \in \overline{\{a\}} \setminus \{a\}$ elemmel myilván $b \neq a$. Ezért a T_1-tulajdonság miatt egy alkalmas $K(b)$ környezettel $a \notin K(b)$. Ez viszont nem lehet, hiszen $b \in \overline{\{a\}}$, így a b érintkezési pontja az $\{a\}$ halmaznak. Következésképpen $K(b) \cap \{a\} \neq \emptyset$, más szóval $a \in K(b)$.

4.1.1.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér T_1-tér, és legyen $A \subset X$, $x \in X$. Ekkor $x \in A'$ azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $K(x)$ környezetre az $A \cap K(x)$ halmaz végtelen.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha tetszőleges $K(x)$ környezetre az $A \cap K(x)$ halmaz végtelen, akkor $A \cap (K(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ is igaz, azaz az x torlódási pontja az A-nak.

Tegyük fel ezért most azt, hogy $x \in A'$, de (indirekt módon) van olyan $K(x)$ környezete az x-nek, amire az $A \cap K(x)$ metszethalmaz véges. Mivel az x torlódási pontja az A-nak, ezért $\emptyset \neq A \cap (K(x) \setminus \{x\})$ véges halmaz. Legyen valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$(*) \qquad A \cap (K(x) \setminus \{x\}) = \{a_0, ..., a_n\}.$$

A T_1-axióma miatt bármelyik $i = 0, ..., n$ mellett van olyan $K^{(i)}(x)$ környezet, amelyikre $a_i \notin K^{(i)}(x)$. Ha

$$\widetilde{K}(x) := \bigcap_{i=0}^{n} K^{(i)}(x),$$

akkor könnyen beláthatóan a $\widetilde{K}(x)$ halmaz is környezete az x-nek, továbbá $a_i \notin \widetilde{K}(x)$ $(i = 0, ..., n)$. Innen a $(*)$ alapján rögtön adódik az $A \cap (\widetilde{K}(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$ egyenlőség, ami ellentmond annak, hogy $x \in A'$. ■

Tekintsük az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret. A $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ halmazrendszert *topologikus bázisnak* nevezzük, ha bármelyik $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ nyílt halmaz előállítható $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Nyilvánvaló, hogy pl. $\mathcal{T}$ egyúttal topologikus bázis is. Az elemi analízisből jól ismert, hogy (a számegyenes „szokásos" topológiájára nézve) minden $A \subset \mathbf{R}$ nyílt halmaz előáll nyílt intervallumok uniójaként. Következésképpen a nyílt intervallumok rendszere topologikus bázis ebben a térben.

Válasszunk ki a fenti $\mathcal{B}$ topologikus bázis minden $\emptyset \neq A \in \mathcal{B}$ halmazából egy elemet: $x_A \in A$. Ekkor egyszerűen igazolható az, hogy az

$$Y := \{x_A \in X : A \in \mathcal{B}\}$$

halmaz mindenütt sűrű, azaz $\overline{Y} = X$. Más szóval az X minden x pontja érintkezési pontja az Y-nak, azaz tetszőleges $K(x)$ környezetre $Y \cap K(x) \neq \emptyset$.

Az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha van olyan, legfeljebb megszámlálható $Y \subset X$ halmaz, ami mindenütt sűrű az X-ben: $\overline{Y} = X$. Következésképpen: ha van a térnek legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa, akkor az illető tér szeparábilis. (A részletek itteni mellőzésével csupán megjegyezzük, hogy mindez „fordítva" nem igaz: van olyan szeparábilis topologikus tér, amiben nincs legfeljebb megszámlálható topologikus bázis (ld. 4.2. ii) megjegyzés).

Igaz viszont a

4.1.1.2. Lemma. *Az $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$ metrikus tér akkor és csak akkor szeparábilis, ha van a térben legfeljebb megszámlálható topologikus bázis.*

Bizonyítás. Az előzmények miatt elegendő már csak azt belátni, hogy ha az (X, ρ) metrikus tér szeparábilis, akkor van a térben legfeljebb megszámlálható topologikus bázis. Legyen tehát az $Y \subset X$ egy legfeljebb megszámlálható és mindenütt sűrű halmaz: $\overline{Y} = X$, valamint

$$\mathcal{B} := \{K_r(y) : y \in Y\ ,\ 0 < r \in \mathbf{Q}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Világos, hogy a $\mathcal{B}$ legfeljebb megszámlálható. Ha az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz nyílt, akkor tetszőleges $a \in A$ ponthoz van olyan $\delta > 0$, hogy $K_\delta(a) \subset A$. Az $\overline{Y} = X$ feltétel miatt ugyanakkor tetszőleges $\sigma > 0$ számhoz megadható az $y \in Y$ elem úgy, hogy $\rho(a, y) < \sigma$. Tehát $a \in K_\sigma(y)$. Ha itt $\sigma < \delta/2$, akkor $K_\sigma(y) \subset K_\delta(a)$. Valóban, legyen $t \in K_\sigma(y)$, ekkor

$$\rho(t, a) \leq \rho(t, y) + \rho(y, a) < 2\sigma < \delta.$$

Így $a \in K_\sigma(y) \subset K_\delta(a) \subset A$. A σ „sugárról" feltehető, hogy racionális, különben válasszunk helyette egy tetszőleges racionális számot a $(\sigma, \delta/2)$ intervallumból. Következésképpen $K^{(a)} := K_\sigma(y) \in \mathcal{B}$. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy $A = \bigcup_{a \in A} K^{(a)}$, tehát a $\mathcal{B}$ valóban topologikus bázis. ■

Érdemes külön is megfogalmazni azt, hogy mit is jelent egy (X, ρ) metrikus tér szeparábilitása: van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ (azaz legfeljebb megszámlálható) „indexhalmaz", és az X-nek olyan $Y := \{y_n \in X : n \in \mathcal{N}\}$ részhalmaza, hogy bármilyen $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\mathcal{N} \ni n$-nel

$$\rho(x, y_n) < \varepsilon.$$

Speciálisan, ha pl. a szóban forgó tér a valós számok tere a „szokásos"

$$\rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

metrikával, akkor $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ miatt a „számegyenes" szeparábilis. Innen rögtön következik az is, hogy tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$ esetén az $(\mathbf{R}^n, \rho_p)$ tér is szeparábilis, ahol az $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorokra

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \max\{|x_i - y_i| : i = 1, ..., n\} & (p = +\infty) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty). \end{cases}$$

4.1.2. Kompaktság

Adott $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén egy $A \subset X$ halmaz *nyílt lefedésén* olyan $T_\gamma \in \mathcal{T}$ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmazokból álló halmazrendszert értünk (jelölésben $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ valamilyen $\emptyset \neq \Gamma$ „indexhalmazzal"), amire

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy ebből a lefedésből *kiválasztható véges lefedés,* ha a Γ-nak van olyan véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmaza, hogy $A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma$ is igaz. Ha ez az A minden nyílt

lefedésére teljesül, akkor az A *kompakt.* Az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér *kompakt,* ha az X halmaz kompakt. Világos, hogy pl. minden véges $A \subset X$ halmaz kompakt. Ha pedig a $\mathcal{T}$ topológia véges, akkor nyilván bármelyik $A \subset X$ halmaz kompakt.

Ha a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ topologikus bázis, aminek a számossága κ, akkor könnyen meggondolhatóan tetszőleges $A \subset X$ halmaz bármelyik $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedése esetén van a Γ halmaznak olyan $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ részhalmaza, aminek a számossága legfeljebb κ, és $A \subset \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} T_\gamma$. Így a 4.1.1.2. Lemma alapján minden szeparábilis (X, ρ) metrikus térre igaz az, hogy az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha tetszőleges, legfeljebb megszámlálható $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés. Speciálisan ez a helyzet a fent említett $(\mathbf{R}^n, \rho_p)$ $(0 < n \in \mathbf{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ terek esetén.

Azt sem nehéz belátni, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ tetszőleges topologikus tér, az $A \subset X$ halmaz pedig kompakt, akkor minden $B \subset A$ zárt részhalmaz is kompakt. Legyen ui. a $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ egy nyílt lefedése a B-nek. Ekkor $X \setminus B \in \mathcal{T}$ miatt

$$(X \setminus B, T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$$

nyilván nyílt lefedése az A-nak. Ezért ebből kiválasztható véges lefedés, azaz van olyan véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmaza a Γ-nak, hogy

$$A \subset \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma \right) \bigcup (X \setminus B)\,.$$

Mivel $B \bigcap (X \setminus B) = \emptyset$, ezért nyilván igaz egyúttal az is, hogy $B \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma$.

Ugyanakkor egy kompakt halmaz nem feltétlenül zárt. Tekintsük ui. valamilyen $a \neq b$ esetén a már előbb is vizsgált $X := \{a, b\}$ halmazt és a $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topológiát. Ekkor pl. az $\{a\}$ halmaz nyilván kompakt, de nem zárt, ui. $X \setminus \{a\} = \{b\} \notin \mathcal{T}$.

Az illető topologikus teret T_2-*térnek* (vagy *Hausdorff-térnek*) nevezzük, ha teljesül a következő ún. T_2-*axióma*: tetszőleges $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén alkalmas $K(x)$, $K(y)$ környezetekre

$$K(x) \cap K(y) = \emptyset.$$

Világos, hogy a most mondott T_2-axióma „erősebb" a T_1-axiómánál: minden T_2-tér egyúttal T_1-tér is. Fordítva ugyanez nem igaz: ha pl. $X := [0, 1]$ és $A \in \mathcal{T}$ akkor és csak akkor, ha $A = \emptyset$ vagy $A = [0, 1] \setminus B$ valamilyen $B \subset [0, 1]$ legfeljebb megszámlálható halmazzal, akkor a $\mathcal{T}$ topológia. Ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor

$$K(x) := [0, 1] \setminus \{y\},\ K(y) := [0, 1] \setminus \{x\}$$

olyan környezetek, amelyekre $y \notin K(x)$, $x \notin K(y)$, tehát igaz a T_1-axióma. Ugyanakkor nem teljesül a T_2-axióma, ui. $a, b \in X$, $a \neq b$ esetén bármelyik $K(a)$, $K(b)$ környezetre $\operatorname{int} K(a) = [0, 1] \setminus U$, $\operatorname{int} K(b) = [0, 1] \setminus V$ alkalmas, legfeljebb megszámlálható $U, V \subset [0, 1]$ halmazokkal. Mivel

$$([0, 1] \setminus U) \cap ([0, 1] \setminus V) = [0, 1] \setminus (U \cup V)$$

és $U \cup V$ legfeljebb megszámlálható, ezért $[0,1] \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$. Következésképpen $\operatorname{int} K(a) \cap \operatorname{int} K(b) \neq \emptyset$, így $K(a) \cap K(b) \neq \emptyset$.

Az (X, ρ) metrikus terek T_2-terek is, hiszen $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén az $r := \rho(x,y)$ „sugárral" $K_r(x) \cap K_r(y) = \emptyset$.

4.1.2.1. Lemma. *Ha az $(X, \mathcal{T})$ tér T_2-tér, akkor tetszőleges $A \subset X$ kompakt halmaz zárt.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel ui., hogy valamilyen $A \subset X$ kompakt halmaz nem zárt, azaz $A \neq \overline{A}$, és legyen $x \in \overline{A} \setminus A$. Ekkor bármilyen $a \in A$ esetén a T_2-tulajdonság miatt vannak olyan (feltehető, hogy nyílt) $K(a)$, $K^{(a)}(x)$ környezetek, amelyek diszjunktak. Mivel $A \subset \bigcup_{a \in A} K(a)$ nyilván igaz, ezért a $(K(a), a \in A)$ halmazrendszer egy nyílt lefedése az A-nak. Tehát az A kompaktsága alapján van olyan véges $A_0 \subset A$ részhalmaz, amivel $A \subset \bigcup_{a \in A_0} K(a)$. Ha

$$K(x) := \bigcap_{a \in A_0} K^{(a)}(x),$$

akkor a $K(x)$ halmaz is környezete az x-nek, és nyilván $K(x) \bigcap K(a) = \emptyset \quad (a \in A_0)$. Következésképpen

$$A \cap K(x) \subset \bigcup_{a \in A_0} (K(a) \cap K(x)) = \emptyset$$

miatt $A \bigcap K(x) = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \overline{A}$, azaz annak, hogy az x érintkezési pontja az A-nak. ■

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ „alaphalmazzal" az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret. Azt mondjuk, hogy az

$$f \in X \to \mathbf{R}$$

leképezés *folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $K(a)$ környezete az a-nak, hogy

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ha ez minden $a \in \mathcal{D}_f$ esetén igaz, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f *folytonos.* Legyen

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbf{R} : \text{ az } f \text{ folytonos}\}, \ \ \mathcal{C}_0(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \sup |f| < +\infty\}.$$

4.1.2.2. Tétel (Urysohn). *Legyen adott az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek*:

a) *bármilyen két diszjunkt és zárt $A, B \in \mathcal{P}(X)$ halmazhoz megadhatók olyan diszjunkt $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{T}$ halmazok, hogy $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$*;

b) *tetszőleges diszjunkt és zárt $A, B \in \mathcal{P}(X)$ halmazokhoz létezik olyan $f \in \mathcal{C}(X)$ függvény, amire $\mathcal{R}_f \subset [0,1]$, valamint*

$$f(x) = 0 \ \ (x \in A) \ \text{ és } \ f(y) = 1 \ \ (y \in B).$$

Bizonyítás. Mutassuk meg először is azt, hogy a 4.1.2.2. Tétel a)-ban szereplő kijelentése ekvivalens a következővel:

c) *minden zárt* $U \in \mathcal{P}(X)$ *és nyílt* $V \in \mathcal{P}(X)$, $U \subset V$ *halmazhoz van olyan* $W \in \mathcal{T}$ *halmaz, hogy* $U \subset W$ *és* $\overline{W} \subset V$ *teljesül.*

A a) $\Longrightarrow$ c) következtetéshez ui. legyen $F := X \setminus V$. Nyilván igaz, hogy az U és az F két diszjunkt halmaz. Tekintettel arra, hogy az U, F halmazok zártak, ezért az a) szerint alkalmas $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathcal{T}$ halmazokkal

$$U \subset \tilde{A},\ F \subset \tilde{B},\ \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset.$$

Mivel $\tilde{A} \subset X \setminus \tilde{B}$ és $X \setminus \tilde{B}$ zárt, így $\overline{\tilde{A}} \subset X \setminus \tilde{B}$. Ugyanakkor $X \setminus V = F \subset \tilde{B}$, ezért $X \setminus \tilde{B} \subset V$, amiből pedig $\overline{\tilde{A}} \subset V$ következik. Tehát a $W := \tilde{A}$ halmaz eleget tesz a c)-nek.

A c) $\Longrightarrow$ a) irányhoz tekintsük a diszjunkt, zárt A, $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazokat, amikor is $A \subset X \setminus B \in \mathcal{T}$. Így a c) alapján egy alkalmas $W \in \mathcal{T}$ halmazzal

$$A \subset W,\ \overline{W} \subset X \setminus B \Longrightarrow B \subset X \setminus \overline{W}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\tilde{A} := W$, $\tilde{B} := X \setminus \overline{W}$ halmazok megfelelnek az a)-beli követelményeknek.

Ezek után térjünk rá az Urysohn-tétel a) $\Longrightarrow$ b) részének a bizonyítására. Legyen ehhez $U_1 := X \setminus B$ $(\in \mathcal{T})$, ekkor a c) szerint van olyan $U_0 \in \mathcal{T}$ halmaz, hogy $A \subset U_0$, $\overline{U}_0 \subset U_1$. Ismét csak a c) alapján van olyan $U_{1/2} \in \mathcal{T}$, amivel

$$\overline{U}_0 \subset U_{1/2},\ \overline{U}_{1/2} \subset U_1.$$

Az eljárást folytatva (ld. teljes indukció) minden $n \in \mathbf{N}$ és $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$ mellett kapunk olyan $U_{k \cdot 2^{-n}} \in \mathcal{T}$ halmazt, amire

$$\overline{U}_{k \cdot 2^{-n}} \subset U_{(k+1) \cdot 2^{-n}}.$$

Más szóval tehát tetszőleges diadikusan racionális $r \in [0, 1]$ számhoz van olyan $U_r \in \mathcal{T}$ halmaz, hogy hacsak a $q \in [0, 1]$ diadikusan racionális és $r < q$, akkor $\overline{U}_r \subset U_q$.

Legyen

$$\mathbf{Q}_d := \{x \in [0, 1] : x \text{ diadikusan racionális}\},$$

és valamilyen $t \in [0, 1]$ esetén

$$U_t := \bigcup_{\mathbf{Q}_d \ni r \leq t} U_r.$$

Könnyű meggondolni, hogy az U_t halmaz definíciója korrekt, valamint $t, s \in [0, 1]$, $t < s$ esetén $\overline{U}_t \subset U_s$.

Terjesszük ki az U_t halmazok definícióját az alábbiak szerint:

$$U_t := \begin{cases} \emptyset & (t < 0) \\ X & (t > 1), \end{cases}$$

és tekintsük a következő $f : X \to [0,1]$ függvényt:

$$f(x) := \inf\{t \in \mathbf{R} : x \in U_t\} \quad (x \in X).$$

(Mivel $U_t = X$ $(t > 1)$, valamint $U_t = \emptyset$ $(t < 0)$, ezért valóban igaz az, hogy $\mathcal{R}_f \subset [0,1]$.) Az így definiált f függvényre nyilván teljesül az, hogy

$$f(x) = 0 \ \ (x \in A) \ \text{ és } \ f(y) = 1 \ \ (y \in B).$$

Be kell még látnunk, hogy $f \in \mathcal{C}(X)$. Legyen ehhez $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$, $t_0 := f(x_0)$. Ekkor bármelyik $x \in U_{t_0+\varepsilon}$ pontban $f(x) \le t_0 + \varepsilon$, az $y \in X \setminus \overline{U}_{t_0-\varepsilon}$ helyen pedig nyilván $f(y) \ge t_0 - \varepsilon$ teljesül. Ha

$$U := U_{t_0+\varepsilon} \cap \Big(X \setminus \overline{U}_{t_0-\varepsilon}\Big),$$

akkor $U \in \mathcal{T}$, $x_0 \in U$ (ui. $f(x_0) = t_0$, amiből $x_0 \in U_{t_0+\varepsilon}$ és $x_0 \notin U_{t_0-\varepsilon/2}$ következik. Az U_t halmazok definíciója miatt tehát $x_0 \notin \overline{U}_{t_0-\varepsilon}$). Végül $x \in U$ esetén $|f(x) - t_0| \le \varepsilon$, azaz valóban igaz az, hogy az f folytonos az x_0-ban.

A b) $\Longrightarrow$ a) irány igazolása roppant egyszerű. Legyen ui.

$$\tilde{A} := f^{-1}[(-\infty, 1/2)], \ \ \tilde{B} := f^{-1}[(1/2, +\infty)],$$

ekkor az itt szereplő félegyenesek ($\mathbf{R}$-beli) nyíltsága, és az f függvény folytonossága alapján $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathcal{T}$, valamint

$$A \subset \tilde{A}, \ B \subset \tilde{B}, \ \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset.$$

■

Megjegyezzük, hogy az előbbi Urysohn-tétel következő kiegészítése is igaz: tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén a 4.1.2.2. Tétel a) (vagy b)) állítása ekvivalens azzal, hogy

d) *minden* $\emptyset \ne A \in \mathcal{P}(X)$ *zárt halmazhoz és* $f : A \to [a,b]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a \le b)$, $f \in \mathcal{C}(A)$ *függvényhez van olyan* $g : X \to [a,b]$, $g \in \mathcal{C}(X)$ *függvény, hogy* $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$.

A most mondott ekvivalenciának a d) $\Longrightarrow$ b) része különösen egyszerű. Valóban, ha az $A, B \in \mathcal{P}(X)$ halmazok az említett b) állításban szereplő zárt, diszjunkt halmazok, akkor a

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ 1 & (x \in B) \end{cases}$$

függvény a zárt $A \cup B$ halmazon értelmezett függvény. Könnyű meggondolni továbbá, hogy a $h : A \cup B \to [0,1]$ folytonos is. Ha ui. (pl.) $a \in A \subset X \setminus B \in \mathcal{T}$, akkor egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset X \setminus B$, tehát $K(a) \cap B = \emptyset$, így $h(x) = 0 \quad (x \in K(a) \cap (A \cup B)$. Következésképpen $h \in \mathcal{C}\{a\}$, és analóg módon $h \in \mathcal{C}\{b\} \quad (b \in B)$. A feltételezett d) állítás szerint van olyan folytonos $g : X \to [0,1]$ függvény, ami kiterjesztése a h-nak. Legyen most már

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (g(x) < 0) \\ g(x) & (0 \le g(x) \le 1) \\ 1 & (g(x) > 1) \end{cases} \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy $f : X \to [0,1]$, $f \in \mathcal{C}(X)$, és

$$f(x) = 0 \ \ (x \in A) \ \text{ és } \ f(y) = 1 \ \ (y \in B).$$

A továbbiakban azok a topologikus terek lesznek különösen fontosak a számunkra, amikre igaz a 4.1.2.2. (Urysohn-)Tétel (pl.) a) kijelentése: azt mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér *normális*, ha egyrészt T_2 -tér, másrészt igaz rá a 4.1.2.2. Tételben szereplő a) állítás.

Tegyük fel pl., hogy a $\mathcal{T}$ topológiát egy $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ metrika generálja, azaz egy (X, ρ) metrikus térrel van dolgunk, akkor az (X, ρ) normális. Ha ui. az $A, B \in \mathcal{P}(X)$ diszjunkt, zárt, nem üres halmazok, akkor (egyszerűen beláthatóan) a

$$h(x) := \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} - \inf\{\rho(x,b) : b \in B\} \qquad (x \in X)$$

függvényre $h \in \mathcal{C}(X)$ igaz. Következésképpen az $\tilde{A} := \{h < 0\}$, $\tilde{B} := \{h > 0\}$ halmazok eleget tesznek a 4.1.2.2. Tételben mondott a) állításnak.

Az előbbi (X, ρ) metrikus tér esetén egyszerűen adható meg egy, a 4.1.2.2. Tétel b) állításában szereplő f függvény:

$$f(x) := \frac{\inf\{\rho(x,a) : a \in A\}}{\inf\{\rho(x,a) : a \in A\} + \inf\{\rho(x,b) : b \in B\}} \qquad (x \in X).$$

4.1.2.3. Lemma. *Minden $(X, \mathcal{T})$ kompakt T_2-tér normális.*

Bizonyítás. Legyen a $B \in \mathcal{P}(X)$ zárt halmaz (mivel az X kompakt, ezért a B is az), $a \in X \setminus B$, $b \in B$. (Feltehető, hogy $B \neq \emptyset$, X.) A T_2-tulajdonság miatt létezik olyan $K^b(a) \in \mathcal{T}$ és $K(b) \in \mathcal{T}$ környezet, hogy

$$a \in K^b(a), \ b \in K(b), \ K^b(a) \cap K(b) = \emptyset.$$

Nyilvánvaló, hogy $B \subset \bigcup_{b\in B} K(b)$, amiből a B kompaktsága miatt adódik egy olyan véges $B_0 \subset B$ halmaz, amivel $B \subset \bigcup_{b\in B_0} K(b)$. Ha

$$K(a) := \bigcap_{b\in B_0} K^b(a),$$

akkor $a \in K(a) \in \mathcal{T}$, és

$$D := \bigcup_{b\in B_0} K(b) \in \mathcal{T}, \quad K(a) \cap D = \emptyset.$$

A fentiek szerint tehát tetszőleges $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ zárt, diszjunkt halmazokra igaz a következő: bármelyik $a \in A$ elemhez megadható olyan $K(a) \in \mathcal{T}$ környezet és olyan $X_a \in \mathcal{T}$ halmaz, hogy $a \in K(a)$, $B \subset X_a$, valamint $K(a) \cap X_a = \emptyset$ teljesül. Mivel az A kompakt is, ezért egy alkalmas $A_0 \subset A$ véges részhalmazzal

$$A \subset \tilde{A} := \bigcup_{a\in A_0} K(a) \in \mathcal{T}.$$

Világos, hogy a $\tilde{B} := \bigcup_{a\in A_0} X_a \in \mathcal{T}$ halmaz az előbbi $\tilde{A}$-mal együtt eleget tesz a normális tér fenti definíciójának. ■

A normális topologikus terekre vonatkozó alábbi tételnek, az ún. *egységosztásról* szóló állításnak a matematika számos területén van jelentősége.

4.1.2.4. Tétel (Dieudonné). *Tegyük fel, hogy $X \neq \emptyset$, és az $(X, \mathcal{T})$ normális topologikus tér. Legyen $\emptyset \neq F \subset X$ zárt halmaz, továbbá valamilyen $n \in \mathbf{N}$ és $U_0, ..., U_n \in \mathcal{T}$ halmazokkal $F \subset \bigcup_{k=0}^n U_k$. Ekkor léteznek olyan $h_k \in \mathcal{C}(X)$ $(k = 0, ..., n)$ függvények, hogy az alábbiak teljesülnek*:

a) $\mathcal{R}_{h_k} \subset [0, 1]$ *és* $h_k(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U_k) \quad (k = 0, ..., n)$;

b) $\sum_{k=0}^n h_k(x) = 1 \quad (x \in F)$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk először az $F = X$ esetet, amikor is $\bigcup_{k=0}^n U_k = X$. Lássuk be, hogy ekkor alkalmas $V_k \subset U_k$ $(k = 0, ..., n)$ zárt halmazokkal

$$(*) \qquad \bigcup_{k=0}^n V_k = X.$$

Valóban, mindez $n = 0$ esetén nyilvánvaló, hiszen ekkor a $V_0 := X$ megfelelő. Ha $n = 1$, azaz $U_0 \cup U_1 = X$, akkor $(X \setminus U_0) \cap (X \setminus U_1) = \emptyset$, ahol az $X \setminus U_0$, $X \setminus U_1$ halmazok zártak. Ezért (mivel az $(X\,\mathcal{T})$ tér normális) megadhatók olyan T_0, $T_1 \in \mathcal{T}$ halmazok, hogy $X \setminus U_0 \subset T_0$, $X \setminus U_1 \subset T_1$ és $T_0 \cap T_1 = \emptyset$. Világos, hogy a $V_0 := X \setminus U_0$, $V_1 := X \setminus U_1$ halmazok eleget tesznek a mondott állításnak. A teljes indukció módszerére gondolva tegyük fel ezután,

hogy valamilyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ esetén igaz a bizonyítandó állítás $m = 0, ..., n-1$-re: ha az $\tilde{U}_0, ..., \tilde{U}_m \in \mathcal{T}$ halmazokkal $\bigcup_{k=0}^m \tilde{U}_k = X$, akkor vannak olyan $\tilde{V}_k \subset \tilde{U}_k \quad (k = 0, ..., m)$ zárt halmazok, hogy $\bigcup_{k=0}^m \tilde{V}_k = X$. Ha most az $U_0, ..., U_n \in \mathcal{T}$ halmazokkal $\bigcup_{k=0}^n U_k = X$, akkor az

$$U_* := \bigcup_{k=0}^{n-1} U_k \in \mathcal{T}$$

jelöléssel $U_* \cup U_n = X$. Ezért az indukciós feltétel szerint valamilyen $V \subset U_*$, $V_n \subset U_n$ zárt halmazokkal $V \cup V_n = X$. Tekintsük a $(V, \mathcal{T}_V)$ topologikus alteret (ld. 4.1.1.) és a

$$B_k := V \cap U_k \qquad (k = 0, ..., n-1)$$

halmazokat. Könnyű meggondolni, hogy a V halmaznak (a $\mathcal{T}$ topológiára vonatkozó) zártsága miatt a $(V, \mathcal{T}_V)$ tér is normális topologikus tér. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$V = \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i,$$

ahol $B_i \in \mathcal{T}_V \quad (i = 0, ..., n-1)$. Az indukciós feltétel szerint tehát alkalmasan választott $V_i \subset B_i \quad (i = 0, ..., n-1)$ (a $\mathcal{T}_V$ topológia értelmében) zárt halmazokkal

$$V = \bigcup_{i=0}^{n-1} V_i.$$

A $\mathcal{T}_V$ értelmezése miatt a $V_i \subset U_i \quad (i = 0, ..., n-1)$ halmazok a $\mathcal{T}$ topológia szerint is zártak, továbbá

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} V_i.$$

Ezzel beláttuk, hogy a $(*)$ teljesül. Vegyük az ottani U_k, V_k halmazokat, és a $B := V_k$, $A := X \setminus U_k \quad (k = 0, ..., n)$ szereposztással alkalmazzuk a 4.1.2.2. Tétel b) részét: van olyan $H_k \in \mathcal{C}(X)$ függvény, hogy $\mathcal{R}_{H_k} \subset [0, 1]$ és

$$H_k(x) = \begin{cases} 1 & (x \in V_k) \\ \\ 0 & (x \in X \setminus U_k) \end{cases} \qquad (k = 0, ..., n).$$

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{i=0}^n H_i(x) \ge 1 \quad (x \in X)$, ezért a

$$h_k := \frac{H_k}{\sum_{i=0}^n H_i} \qquad (k = 0, ..., n)$$

függvények a most vizsgált $F = X$ speciális esetben eleget tesznek a 4.1.2.4. Tételnek.

Az általános esetben, tehát amikor az $\emptyset \neq F \subset X$ tetszőleges zárt halmaz és az $U_0, ..., U_n \in \mathcal{T}$ halmazokkal $F \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_k$, akkor legyen $U_{-1} := X \setminus F \in \mathcal{T}$. Mivel

$$\bigcup_{k=-1}^{n} U_k = X,$$

ezért az előbbi $F = X$ eset alapján alkalmas $V_k \subset U_k \quad (k = -1, ..., n)$ zárt halmazokkal

$$\bigcup_{k=-1}^{n} V_k = X.$$

Léteznek továbbá olyan $h_k \in \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{R}_{h_k} \subset [0,1]$, $h_k(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U_k,\ k = -1, ..., n)$ függvények, hogy

$$\sum_{k=-1}^{n} h_k(x) = 1 \qquad (x \in X).$$

Vegyük észre, hogy ha itt $x \in F$, akkor $x \notin U_{-1}$, ezért $h_{-1}(x) = 0$. Következésképpen

$$1 = \sum_{k=-1}^{n} h_k(x) = \sum_{k=0}^{n} h_k(x).$$

■

Ha az előző tételben $n = 0$, akkor a következőket kapjuk: legyen $X \neq \emptyset$, az $(X, \mathcal{T})$ normális topologikus tér, az $\emptyset \neq F \subset X$ halmaz zárt, továbbá az $U \in \mathcal{T}$ halmazzal $F \subset U$. Ekkor létezik olyan $h \in \mathcal{C}(X)$ függvény, hogy $\mathcal{R}_h \subset [0,1]$, $h(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$ és $h(x) = 1 \ (x \in F)$.

4.1.3. Lokálisan kompakt terek

A kompaktság meglehetősen erős feltétel egy topologikus teret illetően. Olyan fontos terek sem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, mint pl. az $\mathbf{R}^n \ (1 \leq n \in \mathbf{N})$ terek a „szokásos" topológiákkal. Számos kérdésben viszont a kompaktságnál bizonyos értelemben gyengébb feltétel játszik csak szerepet, nevezetesen: azt mondjuk, hogy egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér *lokálisan kompakt*, ha T_2-tér, és bármelyik $x \in X$ elemnek van kompakt környezete, azaz olyan $A_x \in \mathcal{P}(X)$ kompakt halmaz, ami a belsejében tartalmazza az x-et: $x \in \operatorname{int} A_x$. Ilyenek pl. az előbb említett $\mathbf{R}^n \ (1 \leq n \in \mathbf{N})$ terek, vagy pl. minden kompakt T_2-tér.

Könnyű megmutatni, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ kompakt T_2-tér (és az X legalább 2-elemű), akkor tetszőleges $a \in X$ esetén az $(X \setminus \{a\}), \mathcal{T}_a)$ topologikus altér tér lokálisan kompakt, ahol tehát

$$\mathcal{T}_a := \{A \cap (X \setminus \{a\}) \in \mathcal{P}(X \setminus \{a\}) : A \in \mathcal{T}\} = \{A \in \mathcal{T} : a \notin A\}.$$

Egyrészt ui. az $X \setminus \{a\}$ halmaz minden, a $\mathcal{T}$ topológia szerint kompakt részhalmaza nyilván kompakt a $\mathcal{T}_a$ szerint is. Másrészt a T_2-tulajdonság alapján tetszőleges $b \in X \setminus \{a\}$ elemhez vannak olyan $K(b)$, $K(a) \in \mathcal{T}$ környezetek, amelyekre $b \in K(b)$, $a \in K(a)$ és $K(b) \cap K(a) = \emptyset$ teljesül. Mivel az $X \setminus K(a)$ különbség (lévén zárt részhalmaza a kompakt X-nek) kompakt halmaz a $\mathcal{T}$ szerint, ezért egyúttal a $\mathcal{T}_a$ szerint is az. De $K(b) \subset X \setminus K(a)$ és $K(b) \in \mathcal{T}_a$, így az $X \setminus K(a)$ egy $\mathcal{T}_a$ szerinti kompakt környezete a b-nek.

A következő állítás azt mutatja, hogy minden lokálisan kompakt tér így állítható elő.

4.1.3.1. Tétel. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt tér. Ekkor van olyan $(X', \mathcal{T}')$ kompakt T_2-tér, amire*

a) *az $(X, \mathcal{T})$ topologikus altere az $(X', \mathcal{T}')$-nek;*

b) *az $X' \setminus X$ halmaz 1-elemű.*

Bizonyítás. Legyen az ω egy, az X-hez nem tartozó elem, $X' := X \cup \{\omega\}$, és

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{X' \setminus A \in \mathcal{P}(X') : A \in \mathcal{P}(X),\ A \text{ kompakt}\}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy az $(X', \mathcal{T}')$ pár egy topologikus tér. Ui. $\emptyset, X' \in \mathcal{T}'$ triviálisan teljesül. Ha $\Gamma \neq \emptyset$ és $A_\gamma \in \mathcal{T}'$, akkor két eset lehetséges: minden $\gamma \in \Gamma$ indexre $A_\gamma \in \mathcal{T}$, ekkor

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

Ha viszont van olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $A_\gamma \notin \mathcal{T}$, azaz $X' \setminus A_\gamma$ (a $\mathcal{T}$ szerint) kompakt részhalmaza az X-nek, akkor legyen

$$A := \bigcup_{i \in \Gamma} A_i.$$

Világos, hogy $X' \setminus A \subset X' \setminus A_\gamma \subset X$ és

$$X' \setminus A = \bigcap_{i \in \Gamma} (X' \setminus A_i) = \bigcap_{i \in \Gamma} (X' \setminus A_i) \cap X.$$

Mivel

$$X \setminus \Big((X' \setminus A_i) \cap X \Big) = A_i \cap X \in \mathcal{T},$$

ezért az $X' \setminus A$ halmaz zárt részhalmaza az X-nek. Viszont az $X' \setminus A_\gamma$ különbség kompakt, így $X' \setminus A \subset X' \setminus A_\gamma$ miatt $X' \setminus A$ is kompakt. Mindez azt jelenti, hogy $A \in \mathcal{T}'$.

Hasonlóan kapjuk azt is, hogy ha a fenti Γ véges halmaz, akkor $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}'$.

Mutassuk meg, hogy T_2-tér is. Legyen ehhez $x, y \in X'$, $x \neq y$. Ha $x, y \in X$, akkor az $(X, \mathcal{T})$ tér T_2-tulajdonsága miatt léteznek olyan diszjunkt $A, B \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ halmazok, amelyekkel $x \in A$, $y \in B$ igaz. Ha pedig $x \in X$ és $y = \omega$, akkor legyen $V \in \mathcal{P}(X)$ egy $\mathcal{T}$ szerinti kompakt környezete az x-nek. A $\mathcal{T}'$ topológia definíciója alapján a V halmaz $\mathcal{T}'$

szerinti belseje is nyilván tartalmazza az x-et. Végül azt kell már csupán észrevenni, hogy $\omega \in X' \setminus V \in \mathcal{T}'$, így a V és az $X' \setminus V$ halmaz diszjunkt ($\mathcal{T}'$ szerinti) környezete az x-nek és az ω-nak.

Lássuk be, hogy az $(X', \mathcal{T}')$ tér kompakt. Valóban, ha

$$X' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \quad (A_\gamma \in \mathcal{T}',\ \gamma \in \Gamma)$$

valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ halmazzal, akkor egy alkalmas $\gamma_0 \in \Gamma$ mellett $\omega \in A_{\gamma_0}$. Ez a $\mathcal{T}'$ definíciója alapján azt jelenti, hogy az $X' \setminus A_{\gamma_0}$ különbség az X-nek egy $\mathcal{T}$ szerint (és így persze $\mathcal{T}'$ szerint is) kompakt részhalmaza. De

$$X' \setminus A_{\gamma_0} \subset \bigcup_{\gamma_0 \neq \gamma \in \Gamma} A_\gamma,$$

ezért egy alkalmas véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ halmazzal

$$X' \setminus A_{\gamma_0} \subset \bigcup_{\gamma_0 \neq \gamma \in \Gamma_0} A_\gamma.$$

Tehát

$$X' = A_{\gamma_0} \bigcup \Big(\bigcup_{\gamma_0 \neq \gamma \in \Gamma} A_\gamma \Big)$$

egy (az adott lefedésből kiválasztott) véges lefedése az X'-nek.

A bizonyításhoz azt kell még megjegyezni, hogy az $(X, \mathcal{T})$ nyilván altere az $(X', \mathcal{T}')$-nek, azaz $X \subset X'$ és

$$\mathcal{T} = \{X \cap B : B \in \mathcal{T}'\}.$$

■

Az is egyszerűen belátható, hogy az előbbi bizonyításban a $\mathcal{T}'$ topológia (az ω megválasztása után) az egyetlen olyan topológia az X'-ben, ami eleget tesz a 4.1.3.1. Tétel állításainak. Ha az $(X, \mathcal{T})$ kompakt is, akkor az X halmaz a $\mathcal{T}'$ szerint nyílt is és zárt is, különben csak $X \in \mathcal{T}'$, de az X nem zárt a $\mathcal{T}'$ szerint. Megjegyezzük, hogy kompakt $(X, \mathcal{T})$ esetén belátható, hogy

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A \cup \{\omega\} \in \mathcal{P}(X') : A \in \mathcal{T}\},$$

és ekkor $\{\omega\} \in \mathcal{T}'$.

A 4.1.3.1. Tétel bizonyításában szereplő ω elemet *végtelen távoli pontnak* is szokás nevezni. Az $(X', \mathcal{T}')$ tér az $(X, \mathcal{T})$ ún. Alexandrov-féle 1-*pont kompaktifikációja.*

Legyen $X \neq \emptyset$ és adott az $(X, \mathcal{T})$ (tetszőleges) topologikus tér. Az $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén a

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}$$

halmazt az f *tartójának* (idegen szóval *supportjának*) nevezzük. Speciálisan $\operatorname{supp} f \neq X$ esetén tetszőleges $x \in X \setminus \operatorname{supp} f$ pontban $f(x) = 0$. Ezért

$$\sup\{|f(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in \operatorname{supp} f\}.$$

Legyen továbbá

$$\mathcal{K}(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$$

(a kompakt tartójú folytonos $f : X \to \mathbf{R}$ függvények halmaza). Weierstrass klasszikus tétele szerint a kompakt halmazon folytonos függvények egyúttal korlátosak is, ezért $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0(X)$.

4.1.3.2. Lemma. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt, $K \subset U \subset X$, ahol a $K \neq \emptyset$ halmaz kompakt, $U \in \mathcal{T}$. Ekkor van olyan $f \in \mathcal{K}(X)$ függvény, amire*

$$\mathcal{R}_f \subset [0,1],\ f(x) = 1 \quad (x \in K),\quad K \subset \operatorname{supp} f \subset U.$$

Bizonyítás. Jelöljük $(X', \mathcal{T}')$-vel az $(X, \mathcal{T})$ tér 1-pont kompaktifikációját (ld. 4.1.3.1. Tétel). Ekkor $K \cap (X' \setminus U) = \emptyset$, valamint a K, $X' \setminus U$ halmazok a $\mathcal{T}'$ szerint nyilván zártak, ezért van olyan $V \in \mathcal{T}'$ halmaz (ld. 4.1.2.3. Lemma), hogy

$$K \subset V,\ \ \overline{V} \cap (X' \setminus U) = \emptyset.$$

Továbbá (ld. 4.1.2.4. Tétel) létezik olyan, a $[0,1]$ intervallumba képező $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X')$, függvény, hogy $\tilde{f}(x) = 1$ $(x \in K)$ és $\tilde{f}(x) = 0$ $(x \in X' \setminus V)$. Legyen

$$f(x) := \tilde{f}(x) \qquad (x \in X),$$

ekkor $f \in \mathcal{C}(X)$, valamint $\operatorname{supp} f \subset \overline{V}$ miatt $\operatorname{supp} f$ (a $\mathcal{T}'$ topológia szerint) kompakt részhalmaza az X'-nek. Ugyanakkor $\overline{V} \subset U$, és így $\operatorname{supp} f \subset U \subset X$ miatt az f tartója a $\mathcal{T}$ szerint is kompakt. Annyit kell már csupán megjegyezni a lemma bizonyításához, hogy nyilván $K \subset \{f > 0\} \subset \operatorname{supp} f$. ■

Speciálisan, ha $a, b \in X$ és $a \neq b$, akkor egy alkalmas $f \in \mathcal{K}(X)$ függvénnyel $f(a) = 1$ és $f(b) = 0$.

Tekintsük továbbra is az $X \neq \emptyset$ halmaz melletti $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret, ekkor a $\mathcal{C}_0(X)$ függvényhalmaz (a „szokásos" függvényműveletekre nézve) nyilván lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett,

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in \mathcal{C}_0(X))$$

pedig norma ezen a téren. Más szóval tehát a $(\mathcal{C}_0(X), \|.\|)$ pár egy normált tér.

A következő jelölést fogjuk a későbbiekben használni:

$$\mathcal{C}_1(X) := \overline{\mathcal{K}(X)},$$

ahol a $\overline{(.)}$ lezárás most a $(\mathcal{C}_0(X), \|.\|)$ térben értendő. A $\mathcal{C}_1(X)$ függvényhalmaz – a *végtelenben eltűnő függvények osztálya* – nyilván altere a $(\mathcal{C}_0(X), \|.\|)$ térnek.

Az elnevezést az magyarázza, hogy ha $f \in \mathcal{C}_1(X)$, akkor az értelmezés szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $g \in \mathcal{K}(X)$ függvénnyel $\|f - g\| < \varepsilon$. Ugyanakkor $g \in \mathcal{K}(X)$ miatt van olyan $K \subset X$ kompakt halmaz, hogy $g(x) = 0$ $(x \in X \setminus K)$, következésképpen

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\| < \varepsilon \qquad (x \in X \setminus K).$$

4.1.3.3. Tétel. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ egy lokálisan kompakt topologikus tér. Ekkor bármilyen $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek:*

a) $f \in \mathcal{C}_1(X)$;

b) $f \in \mathcal{C}_0(X)$ *és tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számra az* $\{|f| \geq \varepsilon\}$ *halmaz kompakt*;

c) *ha* $(X', \mathcal{T}')$ *az* $(X, \mathcal{T})$ *tér 1-pont kompaktifikációja (ld. 4.1.3.1. Tétel) és*

$$f'(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in X) \\ 0 & (x = \omega \in X' \setminus X), \end{cases}$$

akkor $f' \in \mathcal{C}(X')$.

Bizonyítás. Az eddigiek alapján a most mondott tétel bizonyítása már eléggé egyszerű. Ugyanis az a) $\Longrightarrow$ b) következtetéshez jegyezzük meg, hogy az a) esetben bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz a $\mathcal{C}_1$ definíciója miatt van olyan $g \in \mathcal{K}(X)$, amivel $\|f - g\| \leq \varepsilon/2$ teljesül. Ezért

$$|f| \leq |f - g| + |g| \leq \|f - g\| + |g| \leq \varepsilon/2 + |g|$$

alapján

$$\{|f| \geq \varepsilon\} \subset \{|g| \geq \varepsilon/2\} \subset \operatorname{supp} g.$$

Mivel az f folytonossága miatt $\{|f| < \varepsilon\} \in \mathcal{T}$, így az

$$\{|f| \geq \varepsilon\} = X \setminus \{|f| < \varepsilon\}$$

halmaz zárt, amiből a $\operatorname{supp} g$ kompaktságára tekintettel az $\{|f| \geq \varepsilon\}$ halmaz kompakt volta már következik.

A b) $\Longrightarrow$ c) következtetéshez az $(X', \mathcal{T}')$ tér értelmezése miatt (ld. 4.1.3.1. Tétel) azt kell csupán igazolni, hogy az f' függvény folytonos az ω végtelen távoli pontban. Ez viszont következik abból, hogy minden $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $K \in \mathcal{P}(X)$ (a $\mathcal{T}$ topológia

szerint) kompakt halmaz, hogy $x \in X \setminus K$ esetén $|f(x)| < \varepsilon$. Tehát az f' folytonos az ω-ban, hiszen az $X \setminus K$ különbség a $\mathcal{T}'$ topológia szerint egy környezete az ω-nak.

Lássuk be a c) $\Longrightarrow$ a) irányt. Legyen ehhez valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett a $K \in \mathcal{P}(X)$ egy olyan kompakt halmaz, hogy $|f(x)| < \varepsilon$ $(x \in X \setminus K)$. (Ilyen K az f' ω-beli folytonossága és a $\mathcal{T}'$ topológia értelmezése (ld. 4.1.3.1. Tétel) miatt van.) Alkalmazható a 4.1.3.2. Lemma, miszerint egy alkalmasan választott, a $[0,1]$ intervallumba képező $g \in \mathcal{K}(X)$ függvényre $g(x) = 1$ $(x \in K)$ igaz. Világos, hogy $fg \in \mathcal{K}(X)$, és

$$\|fg - f\| \leq \|f \cdot \chi_{X \setminus K}\| \leq \varepsilon,$$

tehát $f \in \overline{\mathcal{K}(X)}$. ■

Könnyű meggondolni, hogy a c) $\Longrightarrow$ a) következtetés előbbi bizonyítása lényegében elmondható akkor is, ha a c) helyett a b)-ből indulunk ki. Sőt, így az is kiderül, hogy az a) $\Longleftrightarrow$ b) ekvivalencia tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus T_2-tér esetén fennáll.

Legyen $X \neq \emptyset$, és tekintsük az X-en értelmezett valós értékű függvények $\mathbf{R}^X$ halmazának egy $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ részhalmazát. (Ilyenek pl. a fenti $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$, $\mathcal{K}(X)$ függvényosztályok valamilyen $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén.) Az $A \subset X$ halmazt az $\mathcal{F}$-re nézve *nyíltnak* (röviden *$\mathcal{F}$-nyíltnak*) nevezzük, ha van olyan $f_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat, amire az alábbiak teljesülnek:

- $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$;
- $\chi_A = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Megjegyezzük, hogy $\chi_A = \lim_{n\to\infty} f_n$ helyett $\chi_A = \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$-et is írhatunk.

Az $\mathcal{F}$-nyílt halmazok halmazrendszerét $\sigma(\mathcal{F})$-vel fogjuk jelölni.

Legyen pl. $X := \mathbf{R}$ és

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f \text{ folytonos}\}.$$

Ekkor az $\mathcal{F}$-nyílt halmazok rendszere megegyezik az $\mathbf{R}$ nyílt részhalmazainak a halmazával. Ha ui. $J = (a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ egy nyílt intervallum, akkor legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \in \mathbf{R} \setminus J) \\ 1 & (a + 1/n \leq x \leq b - 1/n) \\ n \cdot (x - a) & (a \leq x < a + 1/n) \\ n \cdot (b - x) & (b - 1/n < x \leq b) \end{cases} \qquad \left(\frac{2}{b-a} \leq n \in \mathbf{N}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$f_n \in \mathcal{F},\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \qquad \left(\frac{2}{b-a} \leq n \in \mathbf{N}\right),$$

és $\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_J$. Tehát a J intervallum $\mathcal{F}$-nyílt. Hasonlóan látható be ugyanez olyan nyílt intervallumra is, amelyik nem korlátos. Jól ismert, hogy bármilyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ nyílt halmaz előállítható legfeljebb megszámlálható sok, páronként diszjunkt, nyílt intervallum egyesítéseként, ezért a fenti konstrukcióval könnyen kaphatunk egy A-t „elérő", az $\mathcal{F}$-nyíltság definíciójában szereplő függvénysorozatot. Ha pedig $A = \emptyset$, akkor az $f_n(x) := 0 \ \ (x \in X, n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat nyilván megfelelő.

Mutassuk meg, hogy ha az $A \subset \mathbf{R}$ nem nyílt, akkor nem $\mathcal{F}$-nyílt. Ugyanis az A nem lévén nyílt, van olyan $a \in A$ pont, ami torlódási pontja az $\mathbf{R} \setminus A$-nak. Ha valamilyen $0 \leq f_n \in \mathcal{F} \ \ (n \in \mathbf{N})$ monoton növekedő sorozatra $\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_A$ lenne, akkor tetszőleges $x \in \mathbf{R} \setminus A$ esetén szükségképpen $f_n(x) = 0 \ \ (n \in \mathbf{N})$. Mivel $\chi_A(a) = 1$, ezért valamilyen $m \in \mathbf{N}$ mellett $f_m(a) > 0$. Mindez nyilván ellentmond az f_m folytonosságának. Ui. egy alkalmas $x_k \in \mathbf{R} \setminus A \ \ (k \in \mathbf{N})$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ sorozattal

$$0 < f_m(a) = \lim_{k\to\infty} f_m(x_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

teljesülne, ami nem igaz.

Ha tehát

$$\mathcal{F}^+ := \{f \in \mathcal{F} : f \geq 0\},\ \mathcal{F}_*^+ := \Big\{ \lim_{n\to\infty} f_n : f_n \in \mathcal{F}^+,\ f_n \leq f_{n+1} \ \ (n \in \mathbf{N}) \Big\},$$

akkor nyilván

$$\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}_*^+,\ \sigma(\mathcal{F}) = \{A \subset X : \chi_A \in \mathcal{F}_*^+\}.$$

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi fogalmakra: tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén azt fogjuk mondani, hogy az $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz

- *F_σ-halmaz,* ha $A = \bigcup_{n=0}^\infty A_n \quad (A_n \in \mathcal{P}(X)$ zárt $(n \in \mathbf{N}))$;
- *G_δ-halmaz,* ha $A = \bigcap_{n=0}^\infty A_n \quad (A_n \in \mathcal{P}(X)$ nyílt $(n \in \mathbf{N}))$;
- *K_σ-halmaz,* ha $A = \bigcup_{n=0}^\infty A_n \quad (A_n \in \mathcal{P}(X)$ kompakt $(n \in \mathbf{N}))$.

4.1.3.4. Lemma. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ normális topologikus tér, $G \in \mathcal{P}(X)$. Ekkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek:*

a) $G \in \sigma(\mathcal{C}(X))$;

b) $G \in \sigma(\mathcal{C}_0(X))$;

c) $G \in \mathcal{T}$ *és a* G *halmaz* F_σ*-halmaz;*

d) $G = \{f > 0\}$ *alkalmas* $f \in \mathcal{C}_0(X)^+$ *függvénnyel.*

Az a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) *és a* d) $\Longrightarrow$ a) *következtetések minden topologikus térben igazak.*

Bizonyítás. Az a) $\Longrightarrow$ b) következtetést illetően $G \in \sigma(\mathcal{C}(X))$ miatt van olyan monoton növekedő $u_n \in \mathcal{C}(X)_+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy $\chi_G = \lim_{n\to\infty} u_n = \sup_n u_n$. Mivel

$$0 \le u_n \le \chi_G \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $u_n \in \mathcal{C}_0(X)$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát $u_n \in \mathcal{C}_0(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$, és így valóban igaz, hogy $G \in \sigma(\mathcal{C}_0(X))$.

A b) $\Longrightarrow$ a következtetés triviális, lévén $\mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Lássuk be most azt, hogy b) $\Longrightarrow$ c). Ekkor $\chi_G = \sup_n u_n$, ahol $u_n \in \mathcal{C}_0(X)^+$ és $u_n \le u_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ezért a

$$G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{u_n > 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{u_n \ge 1/k\}$$

egyenlőség, valamint $\{u_n > 0\} \in \mathcal{T}$ $(n \in \mathbf{N})$ alapján $G \in \mathcal{T}$, és a G egy F_σ-halmaz. (Ez utóbbihoz azt vegyük észre, hogy minden $k = 1, 2, ...$ mellett az $\{u_n \ge 1/k\}$ halmaz zárt.)

A c) $\Longrightarrow$ d) igazolásához induljunk ki abból, hogy alkalmas zárt $F_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokkal $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \in \mathcal{T}$, ezért minden $n \in \mathbf{N}$ indexre az F_n, $X \setminus G$ diszjunkt, zárt halmazok. A 4.1.2.2. (Urysohn-)Tétel alapján tehát van olyan $f_n \in \mathcal{C}_0(X)$ függvény, hogy

$$\mathcal{R}_{f_n} \subset [0,1], \quad f_n(x) = 0 \ \ (x \in X \setminus G), \quad f_n(y) = 1 \ \ (y \in F_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(n+1)^2}$$

függvényt meghatározó függvénysor egyenletesen konvergens, ezért $f \in \mathcal{C}_0(X)^+$, és nyilván $G = \{f > 0\}$.

Végül, a d) $\Longrightarrow$ a) állítás bizonyításaként elegendő az $\mathcal{F}$-nyílt halmazok definíciójára utalnunk: $\chi_G(x) = \sup_n(\min\{n\cdot f(x), 1\})$ $(x \in X)$. ■

4.1.3.5. Lemma. *Bármilyen lokálisan kompakt $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér és tetszőleges $G \in \mathcal{P}(X)$ halmaz esetén igaz a következő ekvivalencia*:

$$G \in \sigma(\mathcal{K}(X)) \iff \text{a } G \text{ nyílt } K_\sigma\text{-halmaz.}$$

Bizonyítás. Ha $G \in \sigma(\mathcal{K}(X))$, akkor egyúttal $G \in \sigma(\mathcal{C}(X))$, és ezért a 4.1.3.4. Lemma alapján a G nyílt F_σ-halmaz. Vegyük észre, hogy a 4.1.3.4. Lemma b)$\Longrightarrow$ c) részének a fenti bizonyításában $u_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$ is írható, így az ott szereplő valamennyi $\{u_n \ge 1/k\}$ $(k = 1, 2, ...)$ halmaz

$$\{u_n \ge 1/k\} \subset \operatorname{supp} u_n \qquad (n \in \mathbf{N},\ k = 1, 2, ...)$$

miatt kompakt. Ezért a G K_σ-halmaz.

A fordított irányú bizonyításhoz legyenek a kompakt $K_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok olyanok, hogy $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Ekkor a 4.1.3.2. Lemmából következően megadhatók olyan $f_n \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények, hogy

$$\chi_{K_n} \leq f_n \leq \chi_G \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ miatt $\chi_G = \sup_n f_n$ is teljesül. Ha

$$u_n := \max\{f_0, ..., f_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$u_n \in \mathcal{K}(X), \quad u_n \leq u_{n+1} \ \ (n \in \mathbf{N}), \quad \chi_G = \sup_n u_n.$$

Az utolsó egyenlőség éppen azt jelenti, hogy $G \in \sigma(\mathcal{K}(X))$. ■

A továbbiakban a $\sigma(\mathcal{C}(X))$ és a $\sigma(\mathcal{K}(X))$ halmazrendszer viszonyát vizsgáljuk. Ez a két halmaz nem minden $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén egyezik meg. Legyen ui. az $(X, \mathcal{T})$ pl. egy *diszkrét tér* (amikor is $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$), ekkor a $\sigma(\mathcal{K}(X))$ az X legfeljebb megszámlálható részhalmazainak a rendszere, míg $\sigma(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{P}(X)$. Ez nyilván különbözik a $\sigma(\mathcal{K}(X))$-től, ha az X megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

Legyen (ezután is) $\mathbf{1} : X \to \mathbf{R}$ az a függvény, amire

$$\mathbf{1}(x) := 1 \qquad (x \in X).$$

Mivel $\mathbf{1} \in \mathcal{C}(X)$, ezért $X \in \sigma(\mathcal{C}(X))$. Ha tehát $\sigma(\mathcal{C}(X)) = \sigma(\mathcal{K}(X))$, akkor a 4.1.3.5. Lemma miatt az X alaphalmaz K_σ-halmaz kell, hogy legyen. Ez az észrevétel motiválja a következő definíciót (ld. 4.2. v) megjegyzés): az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus teret a *végtelenben megszámlálhatónak* nevezzük, ha a tér X alaphalmaza K_σ-halmaz. Ekkor tehát egy alkalmas $K_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ kompakt halmazokból álló sorozattal

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n.$$

Más szóval az X egy (nyílt) K_σ-halmaz. Megjegyezzük, hogy itt (ha kell)

$$K_n \subset K_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

is feltehető. Ui. az előbbi K_n-ek nyilván „kicserélhetők" az $\bigcup_{j=0}^{n} K_j$ $(n \in \mathbf{N})$ (szintén kompakt) halmazokra.

Nem lesz nehéz megmutatni, hogy ilyen terek esetén az előbbiekben vizsgált két halmaz egybeesik, nevezetesen igaz a

4.1.3.6. Tétel. *Legyen az* $(X, \mathcal{T})$ *lokálisan kompakt topologikus tér a végtelenben megszámlálható. Ekkor*

$$\sigma(\mathcal{K}(X)) = \sigma(\mathcal{C}(X)).$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{C}(X)$, ezért nyilván $\sigma(\mathcal{K}(X)) \subset \sigma(\mathcal{C}(X))$. Ha viszont $G \in \sigma(\mathcal{C}(X))$, akkor egy monoton növekedő $u_n \in \mathcal{C}(X)_+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\chi_G = \sup_n u_n$. A 4.1.3.5. Lemmát felhasználva pedig – lévén a tétel feltétele miatt $X \in \sigma(\mathcal{K}(X))$ – olyan monoton növekedő $k_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot kapunk, amivel

$$\mathbf{1} = \chi_X = \sup_n k_n.$$

Következésképpen az $f_n := u_n \cdot k_n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is monoton növekedő, és minden tagja $\mathcal{K}(X)^+$-beli. A nyilvánvaló $\chi_G = \sup_n f_n$ egyenlőség alapján tehát $G \in \sigma(\mathcal{K}(X))$. ■

4.1.3.7. Tétel. *Tetszőleges* $(X, \mathcal{T})$ *lokálisan kompakt topologikus tér esetén az* $(X, \mathcal{T})$ *akkor és csak akkor megszámlálható a végtelenben, ha létezik pozitív* $\mathcal{C}_1(X)$*-beli függvény.*

Bizonyítás. Ha az $f \in \mathcal{C}_1(X)$ függvény pozitív, akkor (ld. 4.1.3.3. Tétel) minden $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a $K_n := \{f \geq 1/n\}$ halmaz kompakt, $K_n \subset K_{n+1}$, és $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Tehát az $(X, \mathcal{T})$ tér a végtelenben megszámlálható.

Ha viszont ez utóbbit tételezzük fel az $(X, \mathcal{T})$ térről, akkor $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ alakú, ahol X_n kompakt, és $X_n \subset X_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. A 4.1.3.2. Lemma szerint tehát van olyan $u_n \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat, hogy

$$\mathcal{R}_{u_n} \subset [0, 1],\ u_n(x) = 1 \qquad (x \in X_n,\ n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot u_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, a $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \cdot u_k$ $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegek pedig $\mathcal{K}(X)$-beliek. Ezért az $f := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot u_n$ függvény nyilván megfelel a kívánalmaknak. ■

Tegyük fel, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ függvényhalmaz, ami (a „szokásos" függvényműveletekkel) lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ funkcionál *lineáris,* ha tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ és $f, g \in \mathcal{F}$ esetén

$$I(af + bg) = a \cdot I(f) + b \cdot I(g).$$

Az I *pozitív,* ha

$$I(f) \geq 0 \qquad (0 \leq f \in \mathcal{F}).$$

Legyen $f_0 \equiv 0$ az $\mathcal{F}$ vektortér nulleleme, ekkor tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ esetén az I linearitása miatt

$$I(f) = I(f + f_0) = I(f) + I(f_0),$$

így $I(f_0) = 0$. Ha $f, g \in \mathcal{F}$ és $f \geq g$, akkor $f_0 \leq f - g \in \mathcal{F}$. Ezért – feltételezve az I linearitását és a pozitivitását is –

$$0 \leq I(f - g) = I(f) - I(g),$$

így $I(g) \leq I(f)$. Röviden: az I funkcionál *monoton.* Mindez nyilván „fordítva" is igaz, más szóval az $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionál pozitivitása ekvivalens a monotonitásával.

Vegyük észre, hogy ekkor

$$|I(g)| \leq I(f) \qquad (g, f \in \mathcal{F},\ |g| \leq f)$$

is igaz. Ui. egyrészt nyilván $g \leq f$, amiből $I(g) \leq I(f)$ következik. Másrészt a szintén fennálló $-g \leq f$ egyenlőtlenségből

$$I(-g) = -I(g) \leq I(f)$$

is adódik, ezért $\pm I(g) \leq I(f)$. A $|g| \leq f$ feltétel miatt $f \geq f_0$, így $I(f) \geq I(f_0) = 0$. Mindezt egybevetve tehát valóban igaz, hogy $|I(g)| \leq I(f)$. Speciálisan, ha $g, |g| \in \mathcal{F}$, akkor

$$|I(g)| \leq I(|g|).$$

Világos, hogy ha adott az (X, Ω, μ) mértéktér, akkor (ld. 3.) az

$$I(f) := \int f \, d\mu \qquad (f \in L^1)$$

leképezés *pozitív lineáris* funkcionál.

A továbbiakban egy $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér által meghatározott $\mathcal{K}(X)$ függvénytéren értelmezett funkcionálokat vizsgáljuk. Ehhez elöljáróban emlékeztetünk a korábban már bevezetett alábbi jelölésünkre:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in \mathcal{K}(X)).$$

4.1.3.8. Lemma. *Legyen $X \neq \emptyset$, az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt, az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pedig egy pozitív lineáris funkcionál. Ekkor bármilyen kompakt $\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(X)$ halmazhoz létezik olyan $\alpha_K \geq 0$ szám, hogy*

$$|I(u)| \leq \alpha_K \cdot \|u\| \qquad (u \in \mathcal{K}(X),\ \operatorname{supp} u \subset K).$$

Bizonyítás. Tudjuk (ld. 4.1.3.2. Lemma), hogy minden kompakt $\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(X)$ halmazhoz van olyan $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, amire $f(x) = 1$ $(x \in K)$ igaz. Ezért tetszőleges $u \in \mathcal{K}(X)$, $\operatorname{supp} u \subset K$ esetén $|u| \leq \|u\| \cdot f$, tehát az előzetes észrevételeink szerint

$$|I(u)| \leq (I(\|u\| \cdot f) = \|u\| \cdot I(f).$$

Ez azt jelenti, hogy az $\alpha_K := I(f)$ szám megfelel a 4.1.3.8. Lemma állításának. ■

Az előbbi lemma alapján nem nehéz megmutatni, hogy az abban szereplő I funkcionál rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: bármilyen monoton fogyó $u_n \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat esetén a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ feltételből $\lim_{n\to\infty} I(u_n) = 0$ következik. Az alábbi, ennél erősebb állítást fogjuk bebizonyítani.

4.1.3.9. Lemma. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ a 4.1.3.8. Lemma feltételeinek eleget tevő topologikus tér, $\emptyset \neq T \subset \mathcal{K}(X)^+$ pedig egy olyan halmaz, hogy bármelyik nem üres, véges $T_0 \subset T$ választás mellett egy alkalmas $T \ni u$-val $u \leq t$, azaz*

$$u(x) \leq t(x) \qquad (t \in T_0, x \in X)$$

teljesül. Tegyük fel továbbá, hogy minden $x \in X$ pontban $\inf\{t(x) : t \in T\} = 0$. Ekkor

$$\inf\{\|t\| : t \in T\} = 0.$$

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy van a T halmaznak maximuma. Ellenkező esetben ui. legyen $t_0 \in T$ és

$$T_* := \{t \in T : t \leq t_0\}.$$

Világos, hogy $\emptyset \neq T_* \subset \mathcal{K}(X)$. Ha $\emptyset \neq T_0 \subset T_*$ $(\subset T)$ véges halmaz, akkor a lemmában feltételezettek alapján egy $u \in T$ függvénnyel $u \leq t$ $(\leq t_0)$ $(t \in T_0)$. Tehát $u \leq t_0$, így $u \in T_*$. Ha viszont $\inf\{\|t\| : t \in T_*\} = 0$, akkor $\inf\{\|t\| : t \in T\} = 0$ is fennáll.

Legyen tehát egy $t_0 \in T$ függvénnyel

$$t(x) \leq t_0(x) \qquad (t \in T,\ x \in X)$$

igaz. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\operatorname{supp} t \subset \operatorname{supp} t_0 \qquad (t \in T).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett egy $t \in T$ függvénnyel $\|t\| < \varepsilon$. Legyen ehhez $x \in X$, ekkor a feltételeink szerint van olyan $t_x \in T$, amire $t_x(x) < \varepsilon$ igaz. Mivel a t_x egy folytonos függvény, ezért találunk olyan $U_x \in \mathcal{T}$ nyílt halmazt is, hogy

$x \in U_x$, és minden $y \in U_x$ pontban $t_x(y) < \varepsilon$. A $\operatorname{supp} t_0$ kompaktságát kihasználva tehát egy véges $Y \subset \operatorname{supp} t_0$ halmazzal

$$\operatorname{supp} t_0 \subset \bigcup_{x \in Y} U_x.$$

Ezért tetszőleges $y \in \operatorname{supp} t_0$ esetén valamilyen $x \in Y$ elemmel $y \in U_x$, és így $t_x(y) < \varepsilon$. A T-re tett feltétel szerint egy alkalmasan választott $t \in T$ függvénnyel

$$t \leq \min\{t_x : x \in Y\},$$

amiből persze $t(y) < \varepsilon$ $(y \in \operatorname{supp} t_0)$ is következik. Mivel $\operatorname{supp} t \subset \operatorname{supp} t_0$, ezért bármelyik $y \in X$ esetén is igaz, hogy $(0 \leq)\, t(y) < \varepsilon$, következésképpen $\|t\| \leq \varepsilon$. ■

4.1.4. Baire- és Borel-halmazok

Legyen $X \neq \emptyset$, és tekintsük az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret. Ha $f \in \mathcal{C}(X)$, akkor minden $U \subset \mathbf{R}$ (az $\mathbf{R}$ „szokásos" topológiájára nézve) nyílt halmazra $f^{-1}[U] \in \mathcal{T}$. Ezért (ld. 2.7.1.2. Tétel, 2.7.1.3. Lemma) egyúttal tetszőleges $B \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra (ld. 2.7.1.1. Definíció) $f^{-1}[B] \in \Omega(\mathcal{T})$.

Mindezt előrebocsátva vezessük be az alábbi definíciót:

4.1.4.1. Definíció. A $\mathcal{B}(X) := \Omega(\mathcal{T})$ szigma-algebrabeli halmazok a szóban forgó topologikus tér *Borel-halmazai.*

Azt mondhatjuk tehát, hogy mindegyik $f \in \mathcal{C}(X)$ függvény mérhető a $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebrára nézve (ld. 3.1.1. Definíció). Ugyanakkor (az illető topologikus tértől függően) elképzelhető az is, hogy esetleg létezik a $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebrának egy olyan valódi $\Omega \subset \mathcal{B}(X)$ rész-szigma-algebrája, amire nézve bármelyik $f \in \mathcal{C}(X)$ függvény mérhető. Ez motiválja a következő értelmezést. Legyen ehhez a Θ az összes olyan (X-beli halmazokból álló) szigma-algebrák által alkotott halmazrendszer, amikre nézve minden $f \in \mathcal{C}(X)$ függvény mérhető.

4.1.4.2. Definíció. A $\mathcal{B}_0(X) := \bigcap_{\Omega \in \Theta} \Omega$ halmazrendszer az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér *Baire-halmazainak* a szigma-algebrája.

A $\mathcal{B}_0(X)$ halmazrendszer tehát a legszűkebb olyan szigma-algebra, hogy arra nézve valamennyi folytonos $f : X \to \mathbf{R}$ függvény mérhető. Világos, hogy $\mathcal{B}_0(X) \subset \mathcal{B}(X)$.

Általában, ha valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén adott egy $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ függvényhalmaz, akkor legyen $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{P}(X)$ a legszűkebb olyan szigma-algebra, amire vonatkozóan az $f \in \mathcal{F}$ függvények mérhetők: minden $B \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra $f^{-1}[B] \in \Omega_{\mathcal{F}}$. Ha $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{F}$, akkor

az értelmezésből következően $\Omega_{\mathcal{S}} \subset \Omega_{\mathcal{F}}$. Így pl. az előbbi $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén $\mathcal{B}_0(X) = \Omega_{\mathcal{C}(X)}$, és $\mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{C}(X)$ miatt $\Omega_{\mathcal{C}_0(X)} \subset \mathcal{B}_0(X)$. Legyen itt $f \in \mathcal{C}(X)$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} n & (f(x) > n) \\ f(x) & (|f(x)| \leq n) \\ -n & (f(x) < -n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in X),$$

akkor nyilván $f_n \in \mathcal{C}_0(X)$ $(n \in \mathbf{N})$, valamint $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Tehát az f_n-ek valamennyien mérhetők az $\Omega_{\mathcal{C}_0(X)}$ szigma-algebrára vonatkozóan, így (ld. 3.1.) az f függvény is mérhető az $\Omega_{\mathcal{C}_0(X)}$-re nézve. Ezért $\Omega_{\mathcal{C}(X)} \subset \Omega_{\mathcal{C}_0(X)}$, következésképpen

$$\mathcal{B}_0(X) = \Omega_{\mathcal{C}(X)} = \Omega_{\mathcal{C}_0(X)}.$$

Megjegyezzük, hogy a 4.1.3.6. Tétel feltételei mellett $\Omega_{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{B}_0(X)$.

Ha pl. $1 \leq p \in \mathbf{N}$ és $X := \mathbf{R}^p$ (a „szokásos" (ekvivalens) topológiák valamelyikével), akkor $\mathcal{B}(\mathbf{R}^p)$ a 2.7.1.1. Definícióban bevezetett Borel-halmazok osztályával egyezik meg. (Később megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}(\mathbf{R}^p) = \mathcal{B}_0(\mathbf{R}^p)$ is igaz.) Egy $(X, \mathcal{P}(X))$ diszkrét tér esetén

$$\mathcal{C}(X) = \mathbf{R}^X \Longrightarrow \mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X).$$

Könnyű példát adni ugyanakkor annak az igazolására, hogy $\mathcal{B}_0(X) \neq \mathcal{B}(X)$ is előfordul. Legyen ui. X egy nem véges halmaz,

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(X) : X \setminus A \text{ véges, vagy } A = \emptyset\}.$$

Egyszerűen belátható, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér. Azt sem nehéz meggondolni, miszerint az $f \in \mathcal{C}(X)$ tartalmazás azzal ekvivalens, hogy az $f : X \to \mathbf{R}$ függvény konstans. Innen világos, hogy $\mathcal{B}_0(X) = \{\emptyset, X\}$. Ugyanakkor az is könnyen adódik, hogy

$$\mathcal{B}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ vagy } X \setminus A \text{ legf. megszámlálható}\}.$$

Tehát valóban igaz, hogy $\mathcal{B}_0(X) \neq \mathcal{B}(X)$.

4.1.4.3. Lemma. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt, a végtelenben megszámlálható. Ekkor megadható kompakt $L_n \in \mathcal{B}_0(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazoknak egy olyan sorozata, ami monoton növekedő, azaz $L_n \subset L_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és*

a) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$;

b) $L_n \subset \operatorname{int} L_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$;

c) *tetszőleges kompakt $K \in \mathcal{P}(X)$ halmaz esetén legfeljebb véges sok $n \in \mathbf{N}$ kivételével igaz az, hogy $K \subset L_n$.*

Bizonyítás. Mivel a 4.1.3.6. Tétel miatt $X \in \sigma(\mathcal{K}(X))$, ezért egy monoton növekedő $u_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\mathbf{1} = \sup_n u_n$. Legyen

$$L_n := \left\{ u_n \geq \frac{1}{n+1} \right\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor egyrészt $L_n \in \Omega_{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{B}_0(X)$, másrészt az L_n zárt, sőt, $L_n \subset \operatorname{supp} u_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt kompakt is. Az (u_n) sorozat monoton növekedéséből rögtön következik az, hogy

$$L_n \subset L_{n+1},$$

és

$$L_n \subset \left\{ u_{n+1} > \frac{1}{n+2} \right\} \in \mathcal{T}$$

miatt $L_n \subset \operatorname{int} L_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Az $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ egyenlőség nyilvánvaló, hiszen különben valamilyen $x \in X$ elemre $x \notin L_n$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz

$$0 \leq u_n(x) < \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesülne. Ez viszont ellentmond annak, hogy

$$1 = \mathbf{1}(x) = \sup_n u_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

Vegyük észre, hogy $L_n \subset \operatorname{int} L_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt egyúttal $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int} L_n$ is igaz.

Végül, ha a $K \in \mathcal{P}(X)$ kompakt, $Q_n := K \setminus \operatorname{int} L_n$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor a Q_n zártsága és $Q_n \subset K$ miatt a Q_n is kompakt, $Q_n \subset Q_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n = K \setminus \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int} L_n \Big) = \emptyset.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha legfeljebb véges sok $n \in \mathbf{N}$ kivételével $Q_n = \emptyset$, tehát minden ilyen n-re $K \subset L_n$. ■

4.2. Megjegyzések

i) Tekintsük az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret, ahol $X \neq \emptyset$. Emlékeztetünk arra (ld. 4.1.1.), hogy egy $x \in X$ elem környezetén olyan $A \subset X$ halmazt értettünk, ami a belsejében tartalmazza az x-et: $x \in \operatorname{int} A$. Legyen

$$\mathcal{T}_x := \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{ az } A \text{ környezete az } x\text{-nek}\}$$

(az x elemnek a $\mathcal{T}$ által meghatározott *környezetrendszere*). Könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

1° $X \in \mathcal{T}_x$;

2° $A \in \mathcal{T}_x$, $B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B \implies B \in \mathcal{T}_x$;

3° $A, B \in \mathcal{T}_x \implies A \cap B \in \mathcal{T}_x$;

4° $\forall A \in \mathcal{T}_x \ \exists B \in \mathcal{T}_x : A \in \mathcal{T}_y \quad (y \in B)$;

5° $x \in A \ (A \in \mathcal{T}_x)$.

(A 2° tulajdonság miatt a $\mathcal{T}_x$ egy ún. „felszálló halmazrendszer". A 4°-ben előírtaknak pl. a $B := \operatorname{int} A$ nyilván eleget tesz.)

A $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{T}_x$ halmazrendszert (x-beli) *környezetbázisnak* nevezzük, ha tetszőlegesen választott $K \in \mathcal{T}_x$ környezethez van olyan $L \in \mathcal{U}_x$, hogy $L \subset K$. Ha pl. egy metrikus térről van szó, azaz $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, akkor tetszőleges $x \in X$ elemre a

$$\mathcal{U}_x := \{K_{1/n}(x) : 0 < n \in \mathbf{N}\}$$

halmazrendszer nyilván x-beli környezetbázis. Ha $X \neq \emptyset$ és minden $x \in X$ esetén adott a fenti $1^o - 5^o$ tulajdonságokkal rendelkező $\mathcal{T}_x$ halmazrendszer, akkor ezzel egy $\mathcal{T}$ topológiát „generálhatunk" a következőképpen:

$$\emptyset \neq A \in \mathcal{T} \iff A \in \mathcal{T}_x \qquad (x \in A).$$

Ti. 1° miatt minden $x \in X$ esetén $X \in \mathcal{T}_x$, ezért $X \in \mathcal{T}$. Ha $\Gamma \neq \emptyset$ és $A_\gamma \in \mathcal{T}$ $(\gamma \in \Gamma)$, akkor tetszőleges $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ elemhez van olyan $\nu \in \Gamma$, hogy $x \in A_\nu$. Tehát $A_\nu \in \mathcal{T}_x$. Világos, hogy

$$A_\nu \subset B := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma,$$

így a 2° alapján $B \in \mathcal{T}_x$, azaz $B \in \mathcal{T}$. Végül, ha az előbbi Γ véges és $x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, akkor bármelyik $\gamma \in \Gamma$ indexre $x \in A_\gamma$, amiből $A_\gamma \in \mathcal{T}_x$ következik. A 3° axióma szerint (ami a teljes indukcióra gondolva 2-nél több, véges sok $\mathcal{T}_x$-beli halmaz metszetére is igaz) $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}_x$ teljesül. Más szóval $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$.

ii) Láttuk (ld. 4.1.1.), hogy ha egy topologikus térben van legfeljebb megszámlálható topologikus bázis, akkor a tér szeparábilis. Az alábbi szellemes példa azt mutatja, hogy ez a kijelentés nem megfordítható. Legyen ui. $X := \mathbf{R}$, a $\mathcal{T}$ topológiát pedig definiáljuk a következőképpen: az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz *nyílt,* ha $A = \emptyset$, vagy minden $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $[a, a + r) \subset A$. Egyszerűen meggondolható, hogy valóban topológiát definiáltunk és $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$, tehát az $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ tér szeparábilis. Mutassuk meg ugyanakkor, hogy ebben a térben minden topologikus bázis számossága legalább kontinuum. Legyen ehhez $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ topologikus bázis. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ esetén $[a, a + 1) \in \mathcal{T}$, így alkalmas $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ halmazzal

$$[a, a + 1) = \bigcup_{B \in \mathcal{U}_0} B.$$

Tehát van olyan $B_a \in \mathcal{U}_0$, amire $a \in B_a$. Mivel $B_a \subset [a, a+1)$, ezért a B_a halmaznak van minimuma: $\min B_a = a$. Világos, hogy $a, c \in \mathbf{R}$, $a \neq c$ esetén $B_a \neq B_c$. Tehát az $\mathcal{U}$-ben „legalább" annyi halmaznak kell lenni, mint ahány valós szám van, következésképpen az $\mathcal{U}$ számossága legalább kontinuum.

iii) Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett $X := \mathbf{R}^n$, $\mathcal{T}$ pedig az $\mathbf{R}^n$-beli $\|.\|_2$ (euklideszi) norma által indukált topológia. Ekkor egy $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ függvény pontosan akkor eleme a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$ függvényosztálynak, ha

$$(*) \qquad \lim_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = 0.$$

Valóban, a 4.1.3.3. Tétel szerint az állításunk azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számra az $\{|f| \geq \varepsilon\}$ halmaz kompakt. Mivel ez utóbbi halmaz – lévén az f függvény folytonos – zárt, ezért az $\{|f| \geq \varepsilon\}$ kompaktsága (a most tekintett topológia szerint) és a korlátossága egyet jelent. Ha viszont a $(*)$ feltétel teljesül, akkor az előbbi ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x)| < \varepsilon$, hacsak $x \in \mathbf{R}^n$ és $\|x\|_2 > \delta$. Tehát

$$\{|f| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \leq \delta\},$$

ahol az utóbbi egy korlátos halmaz.

A fordított irányú következtetést analóg módon kapjuk.

iv) Érdemes megjegyezni, hogy az előbbiekben mondott ekvivalencia a 4.1.3.3. Tételtől függetlenül, elemi eszközökkel is könnyen igazolható. Ha pl. $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ és a $(*)$ egyenlőség igaz (ekkor nyilván $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$ is teljesül), akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz tekintsük a iii) megjegyzésbeli δ-t. Legyen $0 < r \in \mathbf{R}$, valamint $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ esetén

$$K_r := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \leq r\}$$

és

$$d(x, A) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in A\} \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor (emlékeztetve az $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto d(x, A)$ leképezés jól ismert folytonosságára) a

$$g(x) := \frac{d(x, \mathbf{R}^n \setminus K_{\delta+r})}{d(x, K_\delta) + d(x, \mathbf{R}^n \setminus K_{\delta+r})} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvény nyilván $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$-beli,

$$g(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus K_{\delta+r}), \; g(x) = 1 \quad (x \in K_\delta),$$

valamint $\mathcal{R}_g \subset [0, 1]$. Ezért a gf függvényszorzat is $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$-beli, és $\|gf - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$.

v) Megmutatható, hogy egy $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus tér esetén az X alaphalmaz akkor és csak akkor K_σ-halmaz, ha a tér 1-pont kompaktifikációjában (ld. 4.1.3.1. Tétel) a végtelen távoli pontnak van megszámlálható környezetbázisa (ld. i) megjegyzés). Valóban, a 4.1.3.1. Tétel (és a bizonyításának) a jelöléseivel először tegyük fel azt, hogy az ω végtelen távoli pontnak van megszámlálható környezetbázisa. Legyen ez $X' \setminus K_n$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol a K_n-ek valamennyien az X kompakt részhalmazai. Belátjuk, hogy

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n.$$

Ha ui. ez nem lenne igaz, akkor egy $a \in X$ ponttal $a \notin K_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel az $(X, \mathcal{T})$ tér lokálisan kompakt, ezért van olyan $K \subset X$ kompakt halmaz, amivel $a \in \operatorname{int} K$. Az $(X', \mathcal{T}')$ tér definíciója szerint viszont az $X' \setminus K$ különbség (a $\mathcal{T}'$ topológiában) egy környezete az ω-nak. Így van olyan $m \in \mathbf{N}$, hogy

$$X' \setminus K_m \subset X' \setminus K.$$

Nyilván $X \setminus K_m \subset X \setminus K$, ezért $K \subset K_m$. Ugyanakkor $a \in K$, következésképpen $a \in K_m$, ami ellentmond a K_n-ekről mondottaknak. Fordítva, most induljunk ki abból, hogy az X halmaz K_σ-halmaz:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n,$$

ahol a K_n $(n \in \mathbf{N})$ kompakt. Legyen $U_0 := \emptyset$, és (induktív módon) tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén az $U_k \in \mathcal{T}$ $(k = 0, ..., n)$ halmazokat már definiáltuk a következő tulajdonságokkal: $K_i \supset \overline{U_i}$ $(i = 0, ..., n)$ kompakt, és

$$\overline{U_j} \subset U_{j+1} \qquad (j = 0, ..., n-1).$$

Legyen

$$\overline{U_n} \cup K_n \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmazzal, ahol $A_\gamma \in \mathcal{T}$ és az $\overline{A_\gamma}$ kompakt minden $\gamma \in \Gamma$ indexre. (Figyelembe véve azt, hogy az $(X, \mathcal{T})$ tér lokálisan kompakt, ilyen A_γ-k léteznek.) Az $\overline{U_n} \cup K_n$ halmaz kompakt lévén feltehető, hogy a fenti Γ halmaz véges. Ekkor az

$$U_{n+1} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

halmaz is rendelkezik a fentebb az U_j-kre mondott tulajdonságokkal, más szóval minden $n \in \mathbf{N}$ esetén léteznek ilyen U_n-ek. Nyilván igaz, hogy $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$. Belátjuk,

hogy az $X' \setminus \overline{U_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok az ω-nak egy környezetbázisát alkotják. Legyen ui. a $K \subset X$ kompakt halmaz (azaz az $X' \setminus K$ környezete az ω-nak), ekkor

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n.$$

Mivel az U_n-ek nyíltak, a K pedig kompakt (az X topológiája szerint), ezért egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{N} U_n.$$

Így $K \subset U_N \subset \overline{U_N}$, tehát $X' \setminus \overline{U_N} \subset X' \setminus K$.

vi) Nyilván minden kompakt tér a végtelenben megszámlálható.

vii) Egy $(X, \mathcal{P}(X))$ diszkrét tér pontosan akkor lesz a végtelenben megszámlálható, ha az X legfeljebb megszámlálható.

viii) Minden legfeljebb megszámlálható (topologikus) bázisú, lokálisan kompakt $(X, \mathcal{T})$ tér a végtelenben megszámlálható. Ui. legyen az $\mathcal{U}\,(\subset \mathcal{T})$ egy legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa a térnek. Ha

$$\mathcal{T}' := \left\{\overline{Q} : Q \in \mathcal{U},\ \overline{Q} \text{ kompakt}\right\},$$

akkor a $\mathcal{T}'$ legfeljebb megszámlálható. Továbbá bármelyik $x \in X$ ponthoz létezik olyan V kompakt részhalmaza az X-nek, ami az x-et a belsejében tartalmazza, azaz $x \in \operatorname{int} V$. Mivel az $\mathcal{U}$ topologikus bázis, ezért egy alkalmas $W \in \mathcal{U}$ halmazzal

$$x \in W \subset \operatorname{int} V$$

teljesül. Így $\overline{W} \subset V$, tehát a $\overline{W}$ is kompakt, ezért $\overline{W} \in \mathcal{T}'$. Azt kaptuk ezzel, hogy

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{T}'} A,$$

ami a szóban forgó megjegyzésünk bizonyítását jelenti.

ix) A 4.1.3.9. Lemma egyik fontos valós függvénytani következménye az alábbi, *Dini-tételnek* nevezett állítás (ld. 1.2.2.3. Lemma):

> *ha $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ egy kompakt halmaz (az $\mathbf{R}$ „szokásos" topológiája szerint), és a folytonos $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló monoton növekedő (vagy fogyó) (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az ugyancsak folytonos $f : A \to \mathbf{R}$ függvényhez, akkor a konvergencia egyenletes.*

Legyen ui. a szóban forgó topologikus tér az $\mathbf{R}$-nek a „szokásos" topológiájára vonatkozóan az A halmaz által meghatározott topologikus altere, ami nyilván kompakt. Tegyük fel, hogy az (f_n) sorozat monoton növő (a monoton fogyó eset hasonlóan „kezelhető"), ekkor az $(f - f_n)$ sorozat nyilván monoton fogyó. Ha

$$T := \{f - f_n : n \in \mathbf{N}\},$$

akkor világos, hogy teljesülnek a 4.1.3.9. Lemma feltételei, ezért

$$\inf\{\|f - f_n\| : n \in \mathbf{N}\} = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergens.

x) Tegyük fel, hogy a 4.1.3.9. Lemmában adott egy $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pozitív lineáris funkcionál is. Ekkor az idézett lemmabeli jelölésekkel annak a bizonyítása és a 4.1.3.8. Lemma szerint

$$0 \le I(t) \le \alpha_K \cdot \|t\| \qquad (t \in T),$$

ahol $K := \operatorname{supp} t_0$. Következésképpen

$$\inf\{I(t) : t \in T\} = 0.$$

xi) Legyen $X \neq \emptyset$ és tekintsük az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret. Azt mondjuk, hogy az $f_n \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat *K-egyenletesen konvergál a nullához*, ha van olyan $K \in \mathcal{P}(X)$ kompakt halmaz, amivel $\operatorname{supp} f_n \subset K$ $(n \in \mathbf{N})$, és az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az $f \equiv 0$ függvényhez. A most mondott definíció szellemében nevezzünk egy $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionált *K-korlátosnak,* ha tetszőleges $K \in \mathcal{P}(X)$ kompakt halmazhoz létezik olyan $\alpha_k \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $f \in \mathcal{K}(X)$, $\operatorname{supp} f \subset K$ esetén

$$|I(f)| \le \alpha_k \cdot \|f\|.$$

Ilyen pl. a 4.1.3.8. Lemmában szereplő I funkcionál. A lineáris funkcionálok korlátossága és folytonossága közti ismert ekvivalencia alapján a fenti I pontosan akkor K-korlátos, ha *K-folytonos,* amin a következőt értjük: tetszőleges $f_n \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ K-egyenletesen nullához konvergáló sorozatra $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$.

xii) Világos, hogy bármilyen $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén (ld. 4.1.4.)

$$\mathcal{B}(X) = \Omega(\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ zárt}\}).$$

Továbbá tetszőleges $X \neq \emptyset$ és $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett

$$\mathcal{B}_0(X) = \Omega(\{\{f > \alpha\} \in \mathcal{T} : f \in \mathcal{C}(X)\}).$$

xiii) Tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus térben véges sok kompakt halmaz egyesítése is kompakt. A teljes indukcióra gondolva ui. mindezt elegendő két kompakt halmaz esetén belátni. Tegyük fel tehát, hogy az $A, B \subset X$ halmazok kompaktak, és legyen

$$A \cup B \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$$

egy nyílt lefedés (valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmazzal és $T_\gamma \in \mathcal{T}$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazokkal). Ekkor nyilván $A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$ is igaz, ezért egy alkalmas $\Gamma_A \subset \Gamma$ véges halmazzal

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A} T_\gamma.$$

Ugyanígy kapunk egy véges $\Gamma_B \subset \Gamma$ halmazt azzal, hogy

$$B \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_B} T_\gamma.$$

Világos, hogy a $\Gamma_0 := \Gamma_A \cup \Gamma_B$ $(\subset \Gamma)$ halmaz véges, és $A \cup B \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma$, azaz az $A \cup B$ egyesítés kompakt.

Megjegyezzük, hogy végtelen sok kompakt halmaz egyesítése már nem feltétlenül kompakt. Vegyük pl. az $\mathbf{R}$-ben (a „szokásos" topológiával) a kompakt $[-n, n]$ $(n \in \mathbf{N})$ intervallumokat, amikor is az $\mathbf{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [-n, n]$ egyesítésük nem kompakt.

xiv) Kompakt halmazok metszete – akár csak kettőé – nem mindig kompakt. Legyen ui. az $(X, \mathcal{T})$ tér a következő: $X := \mathbf{R}^2$, és

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbf{R}^2, \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\} \cup \{I_a : 0 < a \in \mathbf{R}\} \cup \{S_b : 0 < b \in \mathbf{R}\},$$

ahol

$$I_a := \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : a > x \in \mathbf{R}\}\ ,\ S_b := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}, y < b\} \qquad (a, b > 0).$$

Egyszerűen meggondolható, hogy a $\mathcal{T}$ valóban topológia. Továbbá az

$$A := \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\} \cup \{(1, 1)\},\ B := \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\} \cup \{(2, 2)\}$$

halmazok mindegyike kompakt. Ha ui. (pl.)

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$$

egy nyílt lefedése az A-nak, akkor valamilyen $\gamma_0 \in \Gamma$ esetén $(1, 1) \in T_{\gamma_0}$. Ez – a $\mathcal{T}$ definíciójára gondolva – csak úgy lehetséges, ha $T_{\gamma_0} = \mathbf{R}^2$ vagy valamilyen $b > 1$

esetén $T_{\gamma_0} = S_b$. Ekkor viszont világos, hogy $A \subset T_{\gamma_0}$, azaz a $\Gamma_0 := \{\gamma_0\}$ $(\subset \Gamma)$ választással

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma.$$

Analóg módon kapjuk a B kompaktságát.

Ugyanakkor az

$$A \cap B = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$$

halmaz nem kompkat, hiszen

$$A \cap B \subset \bigcup_{0<a\in\mathbf{R}} I_a$$

egy olyan nyílt lefedése az $A \cap B$-nek, amiből triviálisan nem választható ki véges lefedés.

xv) Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér T_2-tér. Mutassuk meg, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ és $K_\gamma \subset X \quad (\gamma \in \Gamma)$ kompakt, akkor a

$$K := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$$

metszethalmaz is kompakt. Ekkor ui. (ld. 4.1.2.1. Lemma) minden $K_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$ halmaz zárt, ezért a K is zárt. Nyilván bármelyik $\gamma \in \Gamma$ indexre $K \subset K_\gamma$, tehát – lévén egy kompakt halmaz részhalmaza – a K is kompakt.

xvi) Tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén legyen valamilyen $\omega \notin X$ elemmel

$$X' := X \cup \{\omega\},\ \mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{X' \setminus A \in \mathcal{P}(X') : A \text{ zárt és kompakt}\}.$$

Ekkor az $(X', \mathcal{T}')$ pár topologikus tér. (Ehhez vegyük észre, hogy a 4.1.3.1. Tétel bizonyításában a $\mathcal{T}'$ topológia voltát illetően az $(X, \mathcal{T})$-re vonatkozó ottani T_2-feltételből csak annyit használtunk ki, hogy (ld. 4.1.2.1. Lemma) minden kompakt halmaz zárt.) A 4.1.3.1. Tétel szerint az $(X', \mathcal{T}')$ tér T_2-tér, hacsak a kiindulási $(X, \mathcal{T})$ tér lokálisan kompakt. Megmutatható, hogy mindez „fordítva" is igaz. Nem nehéz belátni továbbá, hogy ha az X (a $\mathcal{T}$ topológia értelmében) nem kompakt, akkor (a $\mathcal{T}'$ topológia szerint) $\overline{X} = X'$ (azaz az X mindenütt sűrű az X'-ben), és az X nyílt halmaz (szintén az X'-ben). Ui. $\overline{X} = X'$ nyilván azzal ekvivalens, hogy minden $K(\omega)$ környezetre $K(\omega) \cap X \neq \emptyset$. Ez viszont igaz, hiszen $(K(\omega) \in \mathcal{T}'$ feltehető$)$ $K(\omega) = X' \setminus A$, ahol az $A \subset X$ kompakt és zárt. Mivel az X nem kompakt, ezért $A \neq X$, így $X \setminus A \neq \emptyset$, azaz valamilyen $z \in X \setminus A$ elemmel $z \in K(\omega)$. Más szóval $K(\omega) \cap X \neq \emptyset$.

Az X ($\mathcal{T}'$ szerinti nyíltsága) nyilvánvaló, ti. $X \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Megjegyezzük még, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$ kompakt T_2-tér, akkor tetszőleges $A \subset X$ nyílt halmazzal az $(A, \mathcal{T}_A)$ topologikus altér lokálisan kompakt T_2-tér.

xvii) Tekintsük az $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ lokálisan kompakt topologikus tereket, legyenek $(X', \mathcal{T}'_X)$, $(Y', \mathcal{T}'_Y)$ az Alexandrov-féle 1-pont kompaktifikációik, ahol $X' = X \cup \{\omega\}$, $Y' = Y \cup \{\xi\}$ (ld. 4.1.3.1. Tétel). Legyen továbbá az $f : X \to Y$ leképezés folytonos,

$$F(t) := \begin{cases} f(t) & (t \in X) \\ \\ \xi & (t = \omega). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $F : X' \to Y'$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden, a $\mathcal{T}_Y$ szerint kompakt $K \subset Y$ halmazra az $f^{-1}[K]$ őskép is kompakt a $\mathcal{T}_X$-re nézve.

Ha ui. az F folytonos, akkor speciálisan $F \in \mathcal{C}\{\omega\}$ is igaz, tehát a ξ pont tetszőleges A környezetéhez van az ω-nak olyan B környezete, hogy $F[B] \subset A$. Így bármelyik $\emptyset \neq K \subset Y$ kompakt halmazhoz is létezik olyan $\emptyset \neq L \subset X$ kompakt halmaz, amire

$$F[X' \setminus L] \subset Y' \setminus K = \{\xi\} \cup (Y \setminus K).$$

Itt

$$F[X' \setminus L] = F[\{\omega\} \cup (X \setminus L)] = \{\xi\} \cup f[X \setminus L].$$

Tehát $f[X \setminus L] \subset Y \setminus K$, és így $f^{-1}[K] \subset L$. Mivel a K zárt (ld. 4.1.2.1. Lemma), az f pedig folytonos, ezért az $f^{-1}[K]$ őskép zárt halmaz. Következésképpen az L kompaktsága miatt az $f^{-1}[K]$ kompakt.

Analóg módon kapjuk a „megfordítását" is a most mondottaknak.

xviii) Tekintsük az (X, ρ) metrikus teret. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *teljesen korlátos,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan véges $X_0 \subset X$ halmaz, hogy

$$A \subset \bigcup_{x \in X_0} K_\varepsilon(x).$$

Az (X, ρ) metrikus tér *teljesen korlátos,* ha az X teljesen korlátos.

Az alábbi kijelentések tetszőleges metrikus térben egymással ekvivalensek:

- az A halmaz kompakt;
- az A halmaz minden végtelen részhalmazának van A-beli torlódási pontja;
- tetszőleges A-beli sorozatnak van az A-ban konvergens részsorozata.

Ha az (X, ρ) tér teljes, azaz minden olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens, amire $\rho(x_n, x_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$, akkor az eddig mondottak ekvivalensek a következővel:

- az A halmaz teljesen korlátos és zárt.

xix) Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt. Mutassuk meg, hogy a tér tetszőleges pontjának van csupa kompakt halmazból álló környezetbázisa (ld. i)). Valóban, ha $x \in X$, akkor legyen a $K \subset X$ kompakt halmaz az x-nek környezete. Tudjuk (ld. 4.1.2.1. Lemma), hogy a K halmaz zárt is. Ha a $V \in \mathcal{T}$ tetszőleges környezete az x-nek, akkor a $K \setminus V \subset K$ zárt, így a K kompaktsága miatt kompakt. Világos, hogy $x \notin K \setminus V$, ezért a tér T_2-tulajdonsága miatt minden $y \in K \setminus V$ ponthoz megadhatók a $K^{(y)}(x)$, $K(y) \in \mathcal{T}$ diszjunkt környezetek. A $K \setminus V$ kompaktsága alapján alkalmasan választott $n \in \mathbf{N}$ és $y_0, ..., y_n \in K \setminus V$ mellett

$$K \setminus V \subset \bigcup_{i=0}^{n} K(y_i) =: U \in \mathcal{T}.$$

Világos, hogy

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n} K^{(y_i)}(x) =: Y \in \mathcal{T}$$

és $U \cap Y = \emptyset$. Nyilván $\overline{Y} \subset X \setminus U$, így az $\overline{Y} \cap K$ olyan kompakt környezete az x-nek, amire $\overline{Y} \cap K \subset V$.

xx) Vegyük észre, hogy a 4.1.2.3. Lemma bizonyítása nem csupán kompakt, hanem bármilyen $(X, \mathcal{T})$ topologikus T_2-tér esetén is elmondható, ha az abban szereplő $A, B \subset X$ halmazok kompaktak. Más szóval igaz a következő állítás: ha a szóban forgó tetszőleges T_2-térben a kompakt $A, B \subset X$ halmazok diszjunktak, akkor megadhatók olyan $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{T}$ halmazok, hogy $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$ és $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$.

xxi) Legyen valamilyen $X \neq \emptyset$ esetén az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér T_2-tér, és $f : X \to \mathbf{R}$. Ekkor

$$f \in \mathcal{K}(X) \iff f \in \mathcal{C}(X) \text{ és } \overline{\{|f| > 0\}} \text{ kompakt.}$$

Valóban, ha $f \in \mathcal{K}(X)$, akkor $f \in \mathcal{C}(X)$ és a $\operatorname{supp} f$ kompakt. Világos továbbá, hogy $\{|f| > 0\} \subset \operatorname{supp} f$. Mivel (ld. 4.1.2.1. Lemma) a $\operatorname{supp} f$ tartó zárt, ezért

$$\overline{\{|f| > 0\}} \subset \operatorname{supp} f,$$

így az $\overline{\{|f| > 0\}}$ halmaz kompakt. Fordítva, ha $f \in \mathcal{C}(X)$ és az $\overline{\{|f| > 0\}}$ kompakt halmaz, akkor $\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\}$ miatt

$$\overline{\{|f| > 0\}} = \operatorname{supp} f \subset \overline{\{|f| > 0\}},$$

más szóval a $\operatorname{supp} f$ egy kompakt halmaz zárt részhalmaza, így a $\operatorname{supp} f$ is kompakt. Tehát $f \in \mathcal{K}(X)$.

xxii) Tekintsük az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ topologikus tereket, és tegyük fel, hogy az $f : X \to Y$ függvény folytonos. Tehát tetszőleges $a \in X$ és $V \in \mathcal{T}$, $f(a) \in V$ esetén van olyan $U \in \mathcal{T}$, $a \in U$, hogy $f(x) \in V \quad (x \in U)$. Könnyű meggondolni, hogy mindez a következőkkel ekvivalens:

$$f^{-1}[B] \in \mathcal{T} \qquad (B \in \mathcal{U}).$$

Innen az is rögtön következik, hogy bármelyik (a $\mathcal{T}$ topológia értelmében) kompakt $A \subset X$ halmazra az $f[A]$ képhalmaz is kompakt (az $\mathcal{U}$ topológia szerint).

xxiii) Az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ topologikus terek

$$(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$$

szorzatát a következőképpen értelmezzük: legyen először is

$$\mathcal{B} := \mathcal{T} \times \mathcal{U} = \{A \times B : A \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{U}\},$$

és a $\mathcal{B}$-ből, mint bázisból (ld. 4.1.1.) készítsük el a $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ *szorzattopológiát.* Következésképpen a $Z \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ tartalmazás akkor és csak akkor igaz (tehát egy $Z \subset X \times Y$ halmaz a szorzattopológia értelmében akkor és csak akkor nyílt), ha alkalmas $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ halmazzal

$$Z = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_0} U.$$

(Könnyen meggondolható, hogy így valóban topológiát definiáltunk.) Világos, hogy tetszőleges $\emptyset \neq V \subset X \times Y$ halmaz és $(a, b) \in X \times Y$ pont esetén $(a, b) \in \operatorname{int} V$ akkor és csak akkor igaz, ha alkalmas $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{U}$ halmazokkal $(a, b) \in A \times B \subset V$. Innen az is rögtön következik, hogy $X \times Y$-beli nyílt halmazok vetületei és „metszetei" is (X-ben, ill. Y-ban) nyílt halmazok. Nevezetesen, legyen $U \subset X \times Y$, és

$$\mathrm{pr}_1[U] := \{x \in X :\ \exists\, (x, y) \in U\}\ (\subset X),$$

$$\mathrm{pr}_2[U] := \{y \in Y :\ \exists\, (x, y) \in U\}\ (\subset Y),$$

továbbá $a \in X$, $b \in Y$ esetén

$$U_a := \{y \in Y : (a, y) \in U\}\ (\subset \mathrm{pr}_2[U]),$$

$$U^b := \{x \in X : (x, b) \in U\}\ (\subset \mathrm{pr}_1[U]).$$

Ha $U \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$, akkor

$$\mathrm{pr}_1[U],\ U^b \in \mathcal{T},\ \mathrm{pr}_2[U],\ U_a \in \mathcal{U}.$$

Hasonlóan kapjuk zárt $U \subset X \times Y$ halmazra, hogy az U_a, U^b metszetek is zártak. A $\mathrm{pr}_1[U]$, $\mathrm{pr}_2[U]$ vetületekre ugyanez már nem feltétlenül igaz. Legyen ui. $(X, \mathcal{T})$ és $(Y, \mathcal{U})$ egyaránt a valós számok halmaza a „szokásos" topológiával, és tekintsük az

$$U := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ y = 1/x\}$$

halmazt. Világos, hogy az $U \subset \mathbf{R}^2$ zárt, de (pl.) a

$$\mathrm{pr}_1[U] = (0, +\infty)$$

vetület nem zárt.

Ugyanakkor kompakt halmazok vetületei is kompakt halmazok. Valóban, ha a fenti $U \subset X \times Y$ kompakt, és (pl.)

$$\mathrm{pr}_1[U] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

egy nyílt lefedése a $\mathrm{pr}_1[U]$ halmaznak (tehát $\Gamma \neq \emptyset$, $A_\gamma \in \mathcal{T}$ $(\gamma \in \Gamma)$), akkor

$$U \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A_\gamma \times Y)$$

nyilván nyílt lefedése az U-nak. Ezért egy alkalmas véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ halmazzal

$$U \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} (A_\gamma \times Y).$$

Következésképpen

$$\mathrm{pr}_1[U] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} A_\gamma.$$

Tehát a $\mathrm{pr}_1[U]$, $\mathrm{pr}_2[U]$ vetületek kompakt halmazok. Ha az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ terek Hausdorff-terek (ld. 4.1.2.), akkor az $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ szorzatuk is az, ezért (ld. 4.1.2.1. Lemma) az U halmaz zárt. Így tetszőleges $a \in X$, $b \in Y$ mellett azt mondhatjuk, hogy az

$$U_a \ (\subset \mathrm{pr}_2[U]),\ U^b \ (\subset \mathrm{pr}_1[U])$$

halmazok (a fentiek szerint) zárt részhalmazai kompakt halmazoknak, ennélfogva (ld. 4.1.2.) U_a, U^b kompakt halmazok.

A fenti definíció értelemszerűen terjeszthető ki 2-nél több (véges sok) topologikus tér szorzatára is. Végtelen sok topologikus tér szorzatát (az egyszerűség kedvéért csak megszámlálható sokra megfogalmazva) is hasonlóan képezzük, azzal a megszorítással, hogy az $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i \in \mathbf{N})$ terek esetén a $\mathcal{B}$ bázis legyen a következő alakú halmazok (az összes ilyen) által meghatározott halmazrendszer:

$$A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots,$$

ahol $n \in \mathbf{N}$ és $A_i \in \mathcal{T}_i$ $(i = 0, ..., n)$.

xxiv) Az előbbiekre utalva jegyezzük meg, hogy ha az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ terek mindegyike kompakt, akkor az $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ szorzatuk is kompakt (*Tyihonov-tétel*). Továbbá, ha az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ terek lokálisan kompaktak és az egyikük kompakt, akkor az

$(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ szorzat is lokálisan kompakt. Sőt, a most mondott állítások „meg is fordíthatók": ha az $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ tér kompakt, akkor az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ terek is kompaktak; ha az $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ tér lokálisan kompakt, akkor az $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ terek lokálisan kompaktak és az egyikük kompakt.

xxv) Legyen az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt, ekkor tetszőleges $a \in X$ esetén az $\{a\}$ kompakt halmazra alkalmazva a 4.1.3.2. Lemmát a $K := \{a\}$ választással az alábbi állítást kapjuk: ha $U \in \mathcal{T}$ és $a \in U$, akkor van olyan $f \in \mathcal{K}(X)$ függvény, hogy $\mathcal{R}_f \subset [0,1]$, $f(a) = 1$ és $\operatorname{supp} f \subset U$, speciálisan $f(x) = 0$ $(x \in X \setminus U)$.

xxvi) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{I}$ halmazban adott egy $\preceq$ parciális rendezés, ami rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ „indexekhez" van olyan $\gamma \in \mathcal{I}$, hogy $\alpha \preceq \gamma$ és $\beta \preceq \gamma$. Ha $X \neq \emptyset$, akkor az $s : \mathcal{I} \to X$ függvény egy ún. *általánosított sorozat.* Legyen $s_\alpha := s(\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{I})$. Tekintsük továbbá (valamilyen, az előbbi értelemben a $\ll$ relációval parciálisan rendezett) $\mathcal{J}$ indexhalmazzal az $u : \mathcal{J} \to X$ sorozatot. Ekkor az u *részsorozata* az s-nek, ha van olyan $\nu : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ leképezés, hogy az alábbiak teljesülnek: $u_\beta = s_{\nu(\beta)}$ $(\beta \in \mathcal{J})$ és tetszőleges $\alpha \in \mathcal{I}$ indexhez létezik olyan $\beta \in \mathcal{J}$, amivel $\alpha \preceq \nu(\gamma)$ $(\beta \ll \gamma \in \mathcal{J})$. Tegyük fel, hogy az X egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér „alaphalmaza". Ekkor az előbbi $s : \mathcal{I} \to X$ sorozat *konvergens,* ha a következők igazak: létezik olyan $x \in X$, hogy minden $K(x)$ környezetre egy alkalmas $\gamma \in \mathcal{I}$ esetén $s_\alpha \in K(x)$ $(\gamma \preceq \alpha \in \mathcal{I})$. Az ilyen tulajdonságú x elem az s sorozat *limeszpontja.* Nem nehéz meggondolni, hogy ha a szóban forgó topologikus tér T_2-tér, akkor minden $s : \mathcal{I} \to X$ sorozatnak legfelejebb egy limeszpontja van. Egyszerűen belátható továbbá, hogy ha az s sorozat konvergens, az x elem pedig (egy) limeszpontja az s-nek, akkor az s minden u részsorozata is konvergens, és az x limeszpontja az u-nak. Speciálisan, legyen $X := \mathbf{R}$, a $\mathcal{T}$ pedig a „szokásos" topológia az $\mathbf{R}$-ben. Ha az $s : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ sorozat konvergens, az $x \in \mathbf{R}$ pedig limeszpontja az s-nek, akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\gamma \in \mathcal{I}$, hogy $|s_\alpha - x| < \varepsilon/2$ $(\gamma \preceq \alpha \in \mathcal{I})$. Ha tehát $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ és $\gamma \preceq \alpha, \beta$, akkor

$$|s_\alpha - s_\beta| \leq |s_\alpha - x| + |s_\beta - x| < \varepsilon$$

(*Cauchy-tulajdonság*). Könnyű belátni, hogy mindez „visszafelé" is igaz, nevezetesen: ha egy $s : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ sorozatra fennáll a Cauchy-tulajdonság, akkor az s konvergens.

4.3. Absztrakt integrálok

Vektorhálókon értelmezett absztrakt integrálokat vizsgálunk ebben a szakaszban. A célunk annak a kimutatása, hogy minden ilyen integrál egy olyan mértéket határoz meg, ami szerinti integrál megegyezik a kiindulási absztrakt integrállal. Elsőként a Daniell-féle integrálfogalom elemeivel ismerkedünk meg.

4.3.1. Daniell-Stone-tétel

A bevezetőben említett fogalmak definíciójához legyen adott egy $X \neq \emptyset$ halmaz és az X-en értelmezett, valós értékű függvényeknek egy olyan $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ osztálya, amelyik rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

i) az $\mathcal{F}$ egy $\mathbf{R}$ feletti vektortér;

ii) bármelyik $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f| \in \mathcal{F}$.

(Az i)-beli vektorműveleteken a „szokásos" függvényösszeadást és a skalárral való szorzást értjük.) Mivel minden $f, g \in \mathcal{F}$ mellett

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2},$$

ezért egyúttal

$$\max\{f, g\}, \ \min\{f, g\} \in \mathcal{F}$$

is fennáll, azaz az $\mathcal{F}$ egy ún. (valós) *vektorháló* (vagy *Riesz-tér*). Speciálisan tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ esetén $f^{\pm} \in \mathcal{F}$.

Az előbb mondottak megfordítása is igaz, nevezetesen: ha az $\mathcal{F}$ egy $\mathbf{R}$ feletti vektortér, és tetszőleges $f, g \in \mathcal{F}$ függvényekre $\max\{f, g\} \in \mathcal{F}$ (azaz az f és a g felső burkolója is benne van az $\mathcal{F}$-ben), akkor az $\mathcal{F}$ egy vektorháló. Ui. $f \in \mathcal{F}$ esetén $-f \in \mathcal{F}$, így

$$|f| = \max\{f, -f\} \in \mathcal{F}.$$

(Láttuk, hogy ekkor $\min\{f, g\} \in \mathcal{F}$ is igaz, tehát az f és a g alsó burkolója is $\mathcal{F}$-beli.)

Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbf{1}$ az X-en értelmezett, minden X-beli ponthoz 1-et rendelő függvény.

4.3.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a fenti $\mathcal{F}$ vektorháló egy *Stone-féle vektorháló*, ha tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ esetén $\min\{f, \mathbf{1}\} \in \mathcal{F}$.

Ha egy vektorháló tartalmazza az $\mathbf{1}$ függvényt, akkor egyúttal nyilván Stone-féle is. Mivel tetszőleges $\alpha > 0$ számra és $f \in \mathcal{F}$ függvényre

$$\min\{f, \alpha \cdot \mathbf{1}\} = \alpha \cdot \min\Big\{\frac{1}{\alpha} \cdot f, \mathbf{1}\Big\},$$

ezért egy Stone-féle $\mathcal{F}$ vektorhálóra igaz a következő:

$$\min\{f, \alpha \cdot \mathbf{1}\} \in \mathcal{F} \qquad (f \in \mathcal{F},\ \alpha > 0).$$

Ha pl. az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér, akkor a $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$, $\mathcal{K}(X)$ függvényhalmazok Stone-féle vektorhálók.

A fentiekben bevezetett $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorhálón fogunk egy ún. absztrakt integrált értelmezni. Ez utóbbi egy olyan, az $\mathcal{F}$-en definiált funkcionál lesz, ami rendelkezik mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyek egy mérték által generált integrált illetően meghatározóak voltak. Ezek (ld. 3.3.3.): a linearitás, a monotonitás, és a monoton konvergencia esetén való tagonkénti integrálhatóság (ld. Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel)).

Ezek után (eléggé természetes módon) a következő definíciót vezetjük be:

4.3.1.2. Definíció. Legyen az $\mathcal{F}$ egy Stone-féle vektorháló, az $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ egy lineáris funkcionál, ami

a) *pozitív,* azaz $I(f) \geq 0$ $(0 \leq f \in \mathcal{F})$;

b) $f_n \in \mathcal{F}$, $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\sup_n f_n \in \mathcal{F}$ esetén $I(\sup_n f_n) = \sup_n I(f_n)$.

Ekkor azt mondjuk, hogy az I egy *absztrakt integrál.*

Láttuk (ld. 4.1.3.), hogy az egyéb feltétek mellett az I pozitivitása azzal ekvivalens, hogy az I monoton:

$$I(f) \leq I(g) \qquad (f, g \in \mathcal{F},\ f \leq g).$$

Ezért a 4.3.1.2. Definíció b) feltételében az $(I(f_n))$ (szám)sorozat is monoton növekedő, következésképpen $\sup_n I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ is írható. Más szóval a b) feltétel (az abban szereplő (f_n) sorozatra így szól:

$$I\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

Jegyezzük meg, hogy a most vizsgált b) feltétel kicserélhető a következővel:

$$(*) \qquad f_n \in \mathcal{F},\ f_{n+1} \leq f_n\ \ (n \in \mathbf{N}),\ \inf_n f_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0.$$

Valóban, ha a 4.3.2.1. Definícióban az a) igaz, akkor a $(*)$-ban szereplő (f_n) sorozatból képzett $(f_0 - f_n)$ függvénysorozat nyilván eleget tesz a b)-ben megkívánt feltételeknek, és $\sup_n(f_0 - f_n) = f_0$. Mivel a b) szerint

$$I(f_0) = I\Big(\sup_n(f_0 - f_n)\Big) = \sup_n I(f_0 - f_n) = \sup_n(I(f_0) - I(f_n)) = I(f_0) - \inf_n I(f_n),$$

ezért $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \inf_n I(f_n) = 0$. Hasonlóan látható be a fordított irányú következtetés.

Amint azt a bevezetőben jeleztük, a célunk az, hogy minden absztrakt integrált „konkréttá" tegyünk, azaz egy alkalmas μ mérték segítségével az $I(f)$-et $(f \in \mathcal{F})$ az „integrális" $\int f\,d\mu$ alakba írhassuk. A μ mérték értelmezési tartományául szolgáló szigma-algebra konstrukciójához emlékeztetünk az $\mathcal{F}$-nyílt halmazok fogalmára: az $A \subset X$ halmazt $\mathcal{F}$-nyíltnak neveztük, ha van olyan $f_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat, amivel $0 \le f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ és $\chi_A = \lim_{n\to\infty} f_n$. Az $\mathcal{F}$-nyílt halmazok halmazrendszerét $\sigma(\mathcal{F})$-vel jelöltük. Legyen továbbra is

$$\mathcal{F}^+ := \{f \in \mathcal{F} : f \ge 0\}$$

és

$$\mathcal{F}_*^+ := \Big\{ \lim_{n\to\infty} f_n : f_n \in \mathcal{F}_+,\ f_n \le f_{n+1}\ \ (n \in \mathbf{N}) \Big\}.$$

Világos, hogy $\emptyset \in \sigma(\mathcal{F})$, hiszen $\chi_\emptyset \in \mathcal{F}^+$ nem más, mint az $\mathcal{F}$ vektortér nulleleme. Megjegyezzük, hogy az X halmaz már nem mindig lesz $\mathcal{F}$-nyílt, pl. $\mathcal{F} := \{\chi_\emptyset\}$ esetén $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset\}$.

Nem nehéz belátni, hogy ha az $\mathcal{F}$ egy Stone-féle vektorháló és $f \in \mathcal{F}_*^+$, $\alpha \ge 0$, akkor

$$\{f > \alpha\} \in \sigma(\mathcal{F}).$$

Ui. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(f_n \in \mathcal{F}^+,\ f_n \le f_{n+1}\ \ (n \in \mathbf{N}))$, ezért

$$v_n := n\cdot (f_n - \alpha)^+ = n\cdot (f_n - \min\{f_n, \alpha\cdot \mathbf{1}\}) \in \mathcal{F}^+ \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilván minden $x \in \{f \le \alpha\}$ mellett $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$, valamint $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = +\infty$, ha $x \in \{f > \alpha\}$. Az világos, hogy a (v_n) sorozat monoton növekedő, továbbá

$$w_n := \min\{v_n, \mathbf{1}\} \in \mathcal{F}^+,\ w_n \le w_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és $\sup_n w_n = \chi_{\{f>\alpha\}}$. Ez utóbbi miatt tehát valóban igaz, hogy $\{f > \alpha\} \in \sigma(\mathcal{F})$.

Mindezek alapján már egyszerűen igazolható a $\sigma(\mathcal{F})$ halmaz alábbi jellemzése:

$$A \in \sigma(\mathcal{F}) \iff \text{van olyan } u_n \in \mathcal{F}^+\ (n \in \mathbf{N}),\ \text{hogy } A = \textstyle\bigcup_{n=0}^\infty \{u_n > 0\}.$$

Jelöljük a továbbiakban is $\Omega_{\mathcal{F}}$-fel azt a legszűkebb X-beli szigma-algebrát, amire nézve bármelyik $f \in \mathcal{F}$ függvény mérhető (ld. 3.1.). Ekkor igaz a

4.3.1.3. Lemma. *Az előbbi jelölésekkel tetszőleges $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorháló esetén*

a) $\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega(\sigma(\mathcal{F}))$;

b) *a $\sigma(\mathcal{F})$ halmazrendszer metszet-stabil*;

c) $G_n \in \sigma(\mathcal{F})$ $(n \in \mathbf{N}) \implies \bigcup_{n=0}^\infty G_n \in \sigma(\mathcal{F})$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}_*^+$ definíciója miatt az nyilvánvaló (ld. 3.1.), hogy minden $f \in \mathcal{F}_*^+$ függvény mérhető az $\Omega_{\mathcal{F}}$ szigma-algebrára nézve (azaz bármelyik $\mathbf{R}$-beli Borel-halmaznak (ld. 2.7.1.) az f által létesített ősképe az $\Omega_{\mathcal{F}}$-ben van). Így $\sigma(\mathcal{F}) \subset \Omega_{\mathcal{F}}$, amiből rögtön adódik az, hogy $\Omega(\sigma(\mathcal{F})) \subset \Omega_{\mathcal{F}}$.

A 3.1.2. Tétel (és a következményei), valamint a 4.3.1.3. Lemma megfogalmazása előtt mondottak alapján minden $\mathcal{F}^+$-beli függvény mérhető az $\Omega(\sigma(\mathcal{F}))$-ra nézve. Ha $f \in \mathcal{F}$, akkor $f^+, f^- \in \mathcal{F}^+$, ezért $f = f^+ - f^-$ miatt f is mérhető az $\Omega(\sigma(\mathcal{F}))$ szigma-algebrára vonatkozóan. Innen $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \Omega(\sigma(\mathcal{F}))$, így az előbbieket is figyelembe véve $\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega(\sigma(\mathcal{F}))$ következik.

Ezzel az a) állítást beláttuk. A b)-hez azt kell megmutatnunk, hogy ha $G, H \in \sigma(\mathcal{F})$, akkor $G \cap H \in \sigma(\mathcal{F})$ is igaz. Ehhez azt vegyük észre, hogy

$$\min\{\chi_G, \chi_H\} = \chi_{G \cap H},$$

továbbá azt, hogy $\mathcal{F}^+$ (és így $\mathcal{F}_*^+$ is) nyilván zárt az alsó-felső burkoló képzésre nézve.

Végül, a c) állítás igazolásához lássuk be, hogy $\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n} \in \mathcal{F}_*^+$. Mivel

$$\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n} = \sup_n \chi_{G_n}$$

és $\chi_{G_n} \in \mathcal{F}_*^+$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért a bizonyítandó állításhoz elég azt meggondolni, hogy tetszőleges $f_n \in \mathcal{F}_*^+$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén $\sup_n f_n \in \mathcal{F}_*^+$. Legyen ehhez

$$g_n := \max\{f_0, f_1, ..., f_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a b) bizonyítása során tett utolsó észrevételünket újra alkalmazva $g_n \in \mathcal{F}^+$ $(n \in \mathbf{N})$. A (g_n) sorozat monoton növekedő lévén azt kapjuk, hogy

$$\sup_n f_n = \sup_n g_n \in \mathcal{F}_*^+.$$

■

Az eddigiek alapján már minden eszköz a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy a jelen pont fő tételét bebizonyíthassuk. Nevezetesen, igaz a

4.3.1.4. Tétel (Daniell-Stone). *Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ tetszőleges Stone-féle vektorháló, $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ pedig egy absztrakt integrál. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mu : \Omega_{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$ mérték, hogy az alábbiak teljesülnek*:

a) $\mathcal{F} \subset L^1(\mu)$;

b) $I(f) = \int f \, d\mu \quad (f \in \mathcal{F})$;

c) $\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \sigma(\mathcal{F}),\ A \subset G\} \quad (A \in \Omega_{\mathcal{F}})$.

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy ha $u_n \in \mathcal{F}$, $u_n \le u_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor minden $v \in \mathcal{F}^+$, $v \le \sup_n u_n$ esetén

$$I(v) \le \sup_n I(u_n).$$

Ha ui. $v_n := \min\{v, u_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $v_n \in \mathcal{F}^+$, $v_n \le v_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és

$$\sup_n v_n = \min\{v, \sup_n u_n\} = v \in \mathcal{F}^+.$$

Innen az I-re tett feltételek miatt $I(v) = \sup_n I(v_n)$ következik. Ugyanakkor minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $v_n \le u_n$, tehát $I(v_n) \le I(u_n)$. Így valóban $I(v) = \sup_n I(v_n) \le \sup_n I(u_n)$.

A most mondottakból triviálisan következik az is, hogy ha u_n, $v_n \in \mathcal{F}^+$ és

$$u_n \le u_{n+1},\ v_n \le v_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $\sup_n u_n = \sup_n v_n$ esetén

$$\sup_n I(u_n) = \sup_n I(v_n).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy az integrálfogalom bevezetésekor (ld. 3.3.1.5. Tétel, ill. 3.4.) hasonló állításokat bizonyítottunk be.)

A fentiek alapján tehát értelmezhetünk egy

$$I^* : \mathcal{F}_*^+ \to \overline{\mathbf{R}}$$

leképezést az alábbiak szerint: ha $f_n \in \mathcal{F}^+$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\mathcal{F}_*^+ \ni f = \sup_n f_n$, akkor legyen

$$I^*(f) := \sup_n I(f_n).$$

Nyilván igaz, hogy

$$I^*(f) = I(f) \qquad (f \in \mathcal{F}^+),$$

így az I^* az $I_{|_{\mathcal{F}^+}}$ leképezésnek az $\mathcal{F}_*^+$-ra való kiterjesztése. Könnyű meggondolni, hogy az I^* egy monoton, additív és pozitív homogén funkcionál, azaz

- $I^*(f) \le I^*(g)$ $(f, g \in \mathcal{F}_*^+,\ f \le g)$;
- $I^*(f + \alpha \cdot g) = I^*(f) + \alpha \cdot I^*(g)$ $(f, g \in \mathcal{F}_*^+,\ \alpha \ge 0)$,

továbbá igaz a Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel) analogonja is, nevezetesen: ha az (f_n) sorozatra $f_n \in \mathcal{F}_*^+$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor

$$I^*(\sup_n f_n) = \sup_n I^*(f_n).$$

Definiáljuk ezek után a

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}$$

halmazfüggvényt a következőképpen: $\mu^*(G) := I^*(\chi_G)$ $(G \in \sigma(\mathcal{F}))$, valamint

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu^*(G) : G \in \sigma(\mathcal{F}),\, A \subset G\} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

(Mint eddig is, legyen $\inf \emptyset := +\infty$.) Az I^*-ról korábban mondottak alapján a μ^* definíciója korrekt, és a μ^* is monoton: $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B$ esetén $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. Mivel $\emptyset \in \sigma(\mathcal{F})$ és $\chi_\emptyset = 0$, ezért $\mu^*(\emptyset) = 0$. Az nyilvánvaló, hogy $\mu^* \ge 0$. Lássuk be, hogy a μ^* szigmaszubadditív is, tehát

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \qquad (A_n \in \mathcal{P}(X),\, n \in \mathbf{N}).$$

Ui. nyilván elegendő mindezt $A_n \in \sigma(\mathcal{F})$ $(n \in \mathbf{N})$, esetén igazolni, amikor is az I^* tulajdonságai és $\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} \le \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$ miatt (ld. 4.3.1.3. Lemma)

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = I^*(\chi_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}) \le I^*\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}\Big) = I^*\Big(\sup_n \sum_{i=0}^{n} \chi_{A_i}\Big) =$$

$$\sup_n I^*\Big(\sum_{i=0}^{n} \chi_{A_i}\Big) = \sup_n \sum_{i=0}^{n} I^*(\chi_{A_i}) = \sum_{n=0}^{\infty} I^*(\chi_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Az eddigieket összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy a

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

leképezés külső mérték (ld. 2.5.).

Megmutatjuk, hogy

$$(*) \qquad \mu^*(A) = \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{F}_*^+,\ \chi_A \le f\} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

Ez $A \in \sigma(\mathcal{F})$ esetén eléggé nyilvánvaló. Ha $A \in \mathcal{P}(X)$ és nincs olyan $G \in \sigma(\mathcal{F})$, hogy $A \subset G$, akkor egyetlen $f \in \mathcal{F}_*^+$ esetén sem teljesül a $\chi_A \le f$ egyenlőtlenség. Ellenkező esetben ui. tetszőleges $\alpha \in (0, 1)$ számra (mint tudjuk)

$$G := \{f > \alpha\} \in \sigma(\mathcal{F}),$$

és $\chi_A \le f$ miatt az $A \subset G$ tartalmazás triviálisan igaz lenne. Következésképpen ebben az esetben

$$\mu^*(A) = \inf \emptyset = +\infty,$$

valamint

$$\inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{F}_*^+,\ \chi_A \le f\} = \inf \emptyset = +\infty.$$

Fordítva, ha $A \in \mathcal{P}(X)$ és valamilyen $G \in \sigma(\mathcal{F})$ halmazzal $A \subset G$, akkor nyilván

$$\chi_A \leq \chi_G =: f \in \mathcal{F}_*^+.$$

Tegyük fel tehát, hogy az $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz ilyen, $f \in \mathcal{F}_*^+$ és $\chi_A \leq f$. Ekkor az előbbi $\alpha \in (0,1)$ mellett $A \subset \{f > \alpha\}$ és $\alpha \cdot \chi_{\{f>\alpha\}} \leq f$. Ezért

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(\{f > \alpha\}) = I^*(\chi_{\{f>\alpha\}}) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot I^*(f),$$

és így (az $\alpha \to 1-0$ határátmenet után) $\mu^*(A) \leq I^*(f)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mu^*(A) \leq \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{F}_*^+,\ \chi_A \leq f\}.$$

Ha tehát $\mu^*(A) = +\infty$, akkor itt egyenlőség van. Ha viszont $\mu^*(A) < +\infty$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \in \sigma(\mathcal{F})$ halmaz, hogy $A \subset G$ és $\mu^*(G) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Az $f := \chi_G \in \mathcal{F}_*^+$ jelöléssel tehát $\chi_A \leq f$ és

$$\mu^*(G) = I^*(f) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ezért valóban igaz, hogy $\mu^*(A) = \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{F}_*^+,\ \chi_A \leq f\}$.

Legyen most már

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad (B \in \mathcal{P}(X))\}.$$

(Tehát az Ω a μ^*-mérhető halmazok rendszere (ld. 2.5.).) Alkalmazható a Carathèodory-tétel (2.5.2. Tétel), miszerint az Ω szigma-algebra, az

$$\Omega \ni A \mapsto \mu^*(A)$$

leképezés pedig mérték.

Belátjuk, hogy $\sigma(\mathcal{F}) \subset \Omega$. Legyen ehhez $A \in \sigma(\mathcal{F})$ és $B \in \mathcal{P}(X)$. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Nyilván feltehető, hogy $\mu^*(B) < +\infty$. Ekkor a μ^* definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $C \in \sigma(\mathcal{F})$, hogy $B \subset C$ és $\mu^*(B) + \varepsilon > \mu^*(C)$. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy bármelyik $A, G \in \sigma(\mathcal{F})$, $\mu^*(G) < +\infty$ esetén

$$\mu^*(G) \geq \mu^*(G \cap A) + \mu^*(G \setminus A).$$

Ekkor ui.

$$\mu^*(B) + \varepsilon > \mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),$$

amiből az $\varepsilon \to +0$ határátmenettel

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),$$

azaz $A \in \Omega$ adódik. Mivel $A \cap G \in \sigma(\mathcal{F})$ (ld. 4.3.1.3. Lemma), ezért feltehető, hogy $A \subset G$ (tehát $\mu^*(A) < +\infty$ is igaz). Következésképpen alkalmas

$$u_n,\, v_n \in \mathcal{F}^+,\, u_n \leq u_{n+1},\, v_n \leq v_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatokkal $\chi_G = \sup_n u_n \geq \chi_A = \sup_n v_n$, így

$$f_n := \chi_G - v_n = \sup_k (u_k - v_n)^+ \in \mathcal{F}_*^+ \text{ és } I^*(f_n) = \mu^*(G) - I(v_n) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Az (f_n) sorozat nyilván monoton fogyó, amiből adódóan a $(*)$ egyenlőség alapján

$$\mu^*(G \setminus A) = \inf\{\mu^*(H) : H \in \sigma(\mathcal{F}),\, G \setminus A \subset H\} = \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{F}_*^+,\, \chi_{G\setminus A} \leq f\} \leq$$

$$\inf_n I^*(f_n) = \lim_{n\to\infty} I^*(f_n) = \mu^*(G) - \mu^*(A),$$

ezért

$$\mu^*(G \setminus A) + \mu^*(G \cap A) = \mu^*(G \setminus A) + \mu^*(A) \leq \mu^*(G).$$

Tehát (ld. 4.3.1.3. Lemma) $\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega(\sigma(\mathcal{F})) \subset \Omega$, ezért a μ^*-nak az $\Omega_{\mathcal{F}}$-re való

$$\mu := \mu^*_{|\Omega_{\mathcal{F}}}$$

leszűkítése is mérték, és a μ^* definíciója miatt a tételünk c) állítása automatikusan teljesül.

Be kell még bizonyítanunk azt, hogy $\mathcal{F} \subset L^1(\mu)$. Legyen ehhez először $f \in \mathcal{F}^+$, ekkor elegendő azt megmutatni, hogy $I(f) = \int f\, d\mu$ (lévén $I(f) \in [0, +\infty)$). Tekintsük ennek az érdekében a

$$G_{in} := \{f > i\cdot 2^{-n}\} \qquad (n \in \mathbf{N},\, i = 0, ..., n\cdot 2^n)$$

(amint az már jól ismert) $\sigma(\mathcal{F})$-beli) halmazokat, és legyen

$$f_n := 2^{-n}\cdot \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \chi_{G_{in}} \ \ (\in \mathcal{F}_*^+) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az

$$A_{in} := \begin{cases} \{i\cdot 2^{-n} < f \leq (i+1)\cdot 2^{-n}\} & (i = 1, ..., n\cdot 2^n - 1) \\ \\ \{f > n\} & (i = n\cdot 2^n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazok páronként diszjunktak és $\Omega_{\mathcal{F}}$-beliek. Ezért minden $i = 0, ..., n\cdot 2^n$ indexre

$$\chi_{G_{in}} = \sum_{j=i}^{n\cdot 2^n} \chi_{A_{jn}} \Longrightarrow f_n = \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} i\cdot 2^{-n}\cdot \chi_{A_{in}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen

$$f_n \le f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}) \text{ és } f = \sup_n f_n$$

már egy egyszerű meggondolás révén következik. (Emlékeztetünk a 3.3.2.4. Tétel bizonyítására, nevezetesen arra, hogy az ott követett gondolatmenetet alkalmaztuk most is.) Az I^* korábban említett tulajdonságai alapján ezért $I^*(f) = \sup_n I^*(f_n)$, valamint (ld. az I^* additivitása)

$$I^*(f_n) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} I^*(\chi_{G_{in}}) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} \mu^*(G_{in}) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} \mu(G_{in}) = \int f_n \, d\mu$$

is rögtön adódik. Tehát a Beppo Levi-tétel (3.3.2.3. Tétel) szerint $f \in L^+(\mu)$ és

$$I(f) = I^*(f) = \sup_n I^*(f_n) = \sup_n \int f_n \, d\mu = \int \sup_n f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

következik.

Ezzel az $\mathcal{F}^+$ elemeire beláttuk az a) és a b) állítást is, amiből az $\mathcal{F}$-re vonatkozó analóg kijelentések az $f = f^+ - f^-$ felbontásból egyszerűen adódnak.

Már csupán a tételben jelzett egyértelműséget kell igazolnunk. Legyen tehát a μ a tételnek eleget tevő mérték, és $G \in \sigma(\mathcal{F})$. Ekkor egy alkalmasan választott monoton növekedő $f_n \in \mathcal{F}^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\chi_G = \sup_n f_n$. Következésképpen

$$\mu(G) = \int \chi_G \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu = \sup_n I(f_n) = I^*(\chi_G),$$

ezért a $\mu(G)$ egyértelműen van meghatározva. Innen a c) alapján a μ mérték egyértelműsége is nyilvánvaló. ■

4.3.2. Baire- és Borel-mértékek

Alkalmazzuk a Daniell-Stone-tételt (4.3.1.4. Tétel) egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén az $\mathcal{F} := \mathcal{C}_0(X)$ választással, ekkor a következő állítást kapjuk:

4.3.2.1. Tétel. *Legyen $X \neq \emptyset$, az $(X, \mathcal{T})$ tetszőleges topologikus tér,*

$$I : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbf{R}$$

pedig egy absztrakt integrál. Ekkor egyértelműen létezik olyan μ mérték a $\mathcal{B}_0(X)$-en, amivel $\mathcal{C}_0(X) \subset L^1(\mu)$, és

$$I(f) = \int f \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{C}_0(X)).$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{1} \in \mathcal{C}_0(X)$, ezért $\mu(X) = I(\mathbf{1}) \in \mathbf{R}$ miatt az itt szereplő μ mérték véges.

Mindezt szem előtt tartva vezessük be az alábbi definíciót:

4.3.2.2. Definíció. Egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén a

$$\mu : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$$

mértéket az $(X, \mathcal{T})$ téren értelmezett *Baire-mértéknek* nevezzük. Hasonlóan, a

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$$

mérték az $(X, \mathcal{T})$ téren egy *Borel-mérték.*

Nyilván tetszőleges véges $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty)$ Baire-mérték esetén a

$$\mathcal{C}_0(X) \ni f \mapsto I(f) := \int f \, d\mu$$

leképezés absztrakt integrál, így a $\mathcal{C}_0(X)$-en értelmezett absztrakt integrálok és az $(X, \mathcal{T})$ topologikus téren definiált véges Baire-mértékek azonosíthatók. Továbbá az előbbi I absztrakt integrálra alkalmazva a Daniell-Stone-tételt (ld. 4.3.1.4. Tétel) a következőt kapjuk:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \sigma(\mathcal{C}_0(X)),\ A \subset G\} \qquad (A \in \mathcal{B}_0(X)).$$

4.3.2.3. Lemma. *A fenti véges μ Baire-mértékre tetszőleges $A \in \mathcal{B}_0(X)$ halmaz esetén*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T},\ A \subset G\} =$$
$$\sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B}_0(X),\ F \subset A,\ F \text{ zárt}\}.$$

Bizonyítás. Ha ui. $G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ és $A \subset G$, akkor $\mu(A) \le \mu(G)$ miatt

$$\mu(A) \le \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T},\ A \subset G\}.$$

A fordított irányú becsléshez először is mutassuk meg, hogy

$$(*) \qquad \sigma(\mathcal{C}_0(X)) \subset \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}.$$

Valóban, a 4.3.1.3. Lemma miatt $\mathcal{B}_0(X) = \Omega(\sigma(\mathcal{C}_0(X)))$, ezért $\sigma(\mathcal{C}_0(X)) \subset \mathcal{B}_0(X)$. Így tetszőleges $Y \in \sigma(\mathcal{C}_0(X))$ halmazra elég azt belátni, hogy $Y \in \mathcal{T}$. Indirekt módon tegyük fel ehhez, hogy a szóban forgó Y-ra $Y \notin \mathcal{T}$. Ekkor az $X \setminus Y$ halmaz nem zárt, azaz

valamilyen $z \in \overline{X \setminus Y}$ elemre $z \notin X \setminus Y$, más szóval $z \in Y$. Mivel a z érintkezési pontja az $X \setminus Y$ halmaznak, ezért minden $K(z)$ környezetre

$$K(z) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset,$$

következésképpen létezik olyan $x \in K(z)$, amire $x \notin Y$. Ez azt jelenti, hogy $\chi_Y(z) = 1$ és $\chi_Y(x) = 0$. Ugyanakkor $Y \in \sigma(\mathcal{C}_0(X))$ alapján egy alkalmas $0 \leq f_n \in \mathcal{C}_0(X)$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\chi_Y = \sup_n f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Többek között $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \chi_Y(z) = 1$ is teljesül. Ezért létezik olyan $m \in \mathbf{N}$ index, hogy $f_m(z) > 1/2$. Mivel $f_m \in \mathcal{C}_0(X)$, ezért a fenti $K(z)$ környezet megválasztható úgy is, hogy $f_m(t) > 1/4 \quad (t \in K(z))$. Viszont

$$0 = \chi_Y(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

és az $(f_n(x))$ nem-negatív számsorozat monoton növekedő, így $f_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ez nyilván ellentmond annak, hogy $f_m(x) > 1/4$.

A $(*)$ tartalmazásból nyilván következik most már, hogy

$$\inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T},\ A \subset G\} \leq \inf\{\mu(G) : G \in \sigma(\mathcal{C}_0(X)),\ A \subset G\} = \mu(A),$$

amivel a $\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T},\ A \subset G\}$ egyenlőséget beláttuk.

A lemmabeli sup-ra vonatkozó állításhoz legyen az $F \in \mathcal{B}_0(X)$ halmaz zárt és $F \subset A$. Ekkor $X \setminus F \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ és nyilván $X \setminus A \subset X \setminus F$. „Fordítva", ha $G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ és $A \subset G$, akkor az $F := X \setminus G$ halmaz zárt, $\mathcal{B}_0(X)$-beli, és $F \subset X \setminus A$. Innen az eddigiek alapján az következik, hogy

$$\begin{aligned}\mu(X) - \mu(A) = \mu(X \setminus A) = \inf\{\mu(X \setminus F) : F \in \mathcal{B}_0(X),\ F \text{ zárt},\ F \subset A\} = \\ \inf\{\mu(X) - \mu(F) : F \in \mathcal{B}_0(X),\ F \text{ zárt},\ F \subset A\} = \\ \mu(X) - \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B}_0(X),\ F \text{ zárt},\ F \subset A\}.\end{aligned}$$

Egyszerűsítés után az előbbi egyenlőségből már adódik a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B}_0(X),\ F \subset A,\ F \text{ zárt}\}$$

állítás is. ■

4.3.2.4. Lemma. *Tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ normális topologikus tér esetén*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0(X) = \Omega(\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt } F_\sigma\text{-halmaz}\}) = \\ \Omega(\{B \in \mathcal{P}(X) : B \text{ zárt } G_\delta\text{-halmaz}\}).\end{aligned}$$

Speciálisan, ha az $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$ metrikus tér, akkor $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}(X)$.

Bizonyítás. Emlékeztetünk a 4.3.1.3. Lemmára, miszerint $\mathcal{B}_0(X) = \Omega(\sigma(\mathcal{C}_0(X)))$. Ugyanakkor a 4.1.3.4. Lemma miatt

$$\sigma(\mathcal{C}_0(X)) = \{G \in \mathcal{P}(X) : G \text{ nyílt } F_\sigma\text{-halmaz}\}.$$

Innen a $\mathcal{B}_0(X)$-re vonatkozó első egyenlőség nyilván következik. A második egyenlőséghez vegyük észre, hogy egy A nyílt F_σ-halmaz $X \setminus A$ komplementere nyilván G_δ-halmaz. Ezért a generált szigma-algebra értelmezéséből (ld. 2.1.) a lemmabeli második egyenlőség már triviális.

Ha az $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$ metrikus tér és az $F \in \mathcal{P}(X)$ zárt halmaz, akkor

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \inf\{\rho(x, y) : y \in F\} < 1/n\}.$$

Mivel minden $n = 1, 2, ...$ mellett az

$$\{x \in X : \inf\{\rho(x, y) : y \in F\} < 1/n\}$$

halmaz (könnyen beláthatóan) nyílt, ezért az F halmaz G_δ-típusú. Így alkalmazható a lemma $\mathcal{B}_0(X)$-re vonatkozó első állítása:

$$\mathcal{B}_0(X) = \Omega(\{B \in \mathcal{P}(X) : B \text{ zárt } G_\delta\text{-halmaz}\}) =$$
$$\Omega(\{B \in \mathcal{P}(X) : B \text{ zárt halmaz}\}) = \Omega(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(X).$$

■

Ha tehát valamilyen $1 \leq p \in \mathbf{N}$ esetén $X := \mathbf{R}^p$, a $\rho : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \to [0, +\infty)$ pedig a „szokásos" metrikák valamelyike (pl. az euklideszi metrika), akkor azt a korábban már említett megjegyzésünket kapjuk, miszerint

$$\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^p) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^p).$$

A következő tételben metrikus terek egy elég tág osztálya esetén adunk jellemzést Borel-mértékekre, ami más vonatkozásban is fontos szerepet kap majd.

4.3.2.5. Tétel. *Legyen az (X, ρ) egy teljes, szeparábilis metrikus tér, a*

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$$

pedig egy véges Borel-mérték. Ekkor minden $A \in \mathcal{B}(X)$ halmazra

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \in \mathcal{T}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Bizonyítás. Elöljáróban emlékeztetünk az előző 4.3.2.4. Lemmára, miszerint a metrikus terek feletti Baire- és Borel-halmazok ugyanazok. Ezért a tételbeli μ egyúttal Baire-mérték is az (X, ρ) téren, így a 4.3.2.3. Lemmát (valamint a most nyilvánvalóan fennálló

$$\mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T} = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$$

egyenlőséget) figyelembe véve elegendő a tételnek a szuprémumra vonatkozó részét bebizonyítani. Sőt, azt is csak abban az esetben, ha a szóban forgó A halmaz zárt. Ti. megint csak a 4.3.2.3. Lemma miatt ekkor

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ zárt}\} =$$
$$\sup\Big\{\sup\{\mu(K) : K \subset F,\ K \text{ kompakt}\} : F \subset A,\ F \text{ zárt}\Big\} =$$
$$\sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Mivel minden kompakt $K \subset A$ esetén a μ mérték monotonitása alapján $\mu(K) \leq \mu(A)$, ezért

$$\sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\} \leq \mu(A).$$

Következésképpen a „fordított" irányú

$$\mu(A) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$$

becslést kell csupán igazolnunk. Ez nyilván következik abból, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám mellett egy alkalmas kompakt $B \subset A$ halmazzal $\mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$.

Legyen tehát $A \in \mathcal{B}(X)$ zárt halmaz. Ekkor minden kompakt $K \in \mathcal{P}(X)$ mellett az $A \cap K$ is kompakt, és a μ végessége miatt (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu(A) - \mu(A \cap K) = \mu(A \cup K) - \mu(K) \leq \mu(X) - \mu(K).$$

Ezért elég csak azt belátni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan kompakt $K \in \mathcal{P}(X)$ halmaz, hogy $\mu(X) - \mu(K) \leq \varepsilon$, hiszen ekkor a $B := A \cap K$ halmaz „megfelelő".

Az (X, ρ) tér szeparábilitása miatt egy alkalmas $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\overline{\{x_n \in X : n \in \mathbf{N}\}} = X,$$

amiből minden $r > 0$ esetén

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_r(x_i) := \bigcup_{i=0}^{\infty} \{y \in X : \rho(x_i, y) < \varepsilon\}$$

következik. A 2.3.1.4. Tételt felhasználva tehát

$$\mu(X) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{k} K_r(x_i)\Big)$$

adódik. Következésképpen bármelyik $0 < n \in \mathbf{N}$ természetes számhoz van olyan $k_n \in \mathbf{N}$ index, hogy

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{k_n} K_{1/n}(x_i)\Big) \geq \mu(X) - \varepsilon\cdot 2^{-n}.$$

Ha

$$B_n := \bigcup_{i=0}^{k_n} \overline{K_{1/n}(x_i)} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

akkor a B_n zárt, és

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) \geq \mu(X) - \varepsilon\cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

(Ez utóbbi becslés pl. teljes indukcióval (ld. 2.3.1.3. Tétel)

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i\Big) = \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) + \mu(B_{n+1}) - \mu\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) \cup B_{n+1}\Big) \geq$$

$$\geq \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) + \mu(B_{n+1}) - \mu(X)$$

alapján könnyűszerrel belátható.)

Legyen most már $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, ekkor a K zárt, és (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) \geq \mu(X) - \varepsilon\cdot \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \mu(X) - \varepsilon.$$

Azt kell még belátni, hogy a K kompakt. Vegyük észre ehhez, hogy

$$K \subset B_n = \bigcup_{i=0}^{k_n} \overline{K_{1/n}(x_i)} \subset \bigcup_{i=0}^{k_n} K_{2/n}(x_i) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

így a K nyilván teljesen korlátos (ld. 4.2. xviii) megjegyzés). Innen az (X, ρ) tér teljessége alapján a K halmaz kompaktsága már következik. ■

A most bebizonyított tételre is hivatkozva vezessük be az alábbi definíciót:

4.3.2.6. Definíció. Legyen adott az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér. Ekkor

a) a $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ Borel-mérték *reguláris*, ha bármelyik $A \in \mathcal{B}(X)$ halmaz esetén

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \in \mathcal{T}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\};$$

b) a $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$ Baire-mérték *reguláris*, ha tetszőleges $A \in \mathcal{B}_0(X)$ halmazra

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}\} =$$

$$\sup\{\mu(K) : K \in \mathcal{B}_0(X),\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Ha tehát a μ reguláris Borel-mérték és $\mu(A) < +\infty$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan kompakt $K \in \mathcal{P}(X)$ és $U \in \mathcal{T}$ nyílt halmazok, amelyekkel $K \subset A \subset U$ és $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ teljesül.

A 2.7.1.6. Tétel szerint az $(\mathbf{R}^p, \mathcal{T})$ $(1 \leq p \in \mathbf{N})$ téren értelmezett ($\mathbf{R}^p$ feletti) Borel-Lebesgue-mérték reguláris (pl. az euklideszi $\mathcal{T}$ topológia szerint).

Mivel bármelyik μ véges Baire-mérték esetén

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}\}$$

(ld. 4.3.2.3. Lemma), ezért minden ilyen mérték „kívülről" eleve reguláris. Továbbá, ha az X kompakt, akkor – lévén minden zárt $F \in \mathcal{P}(X)$ halmaz kompakt – az előbbi μ (ugyancsak a 4.3.2.3. Lemmára tekintettel) reguláris.

A 4.3.2.5. Tételt felhasználva metrikus tereken értelmezett mérhető függvényekre adunk a következő állításban egy – talán első hallásra kissé meglepő – jellemzést. Nevezetesen megmutatjuk, hogy az említett függvények mértékelméleti szempontból nincsenek túl „messze" a folytonos függvényektől.

4.3.2.7. Tétel (Luzin). *Legyen az* (X, ρ) *teljes, szeparábilis metrikus tér, az* $(Y, \mathcal{T})$ *pedig olyan topologikus tér, aminek van megszámlálható topologikus bázisa. Legyen továbbá adott az* $f : X \to Y$ *függvény és a* μ *véges Borel-mérték az* (X, ρ) *téren. Ekkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek*:

a) *van olyan* $g : X \to Y$ *függvény, ami Borel-mérhető, más szóval* $g^{-1}[G] \in \mathcal{B}(X)$ $(G \in \mathcal{B}(Y))$, *és* $f = g$ μ*-m.m.*;

b) *minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz megválasztható egy olyan* $K \in \mathcal{P}(X)$ *kompakt halmaz, hogy* $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$, *és az* f *függvénynek a* K*-ra való leszűkítése folytonos*;

c) *alkalmas* $K_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ *kompakt, páronként diszjunkt halmazokból álló sorozattal, valamint egy* $V \in \mathcal{B}(X)$ μ*-nulla-mértékű halmazzal igaz az, hogy*

$$X = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n\Big) \cup V, \quad V \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n\Big) = \emptyset,$$

és az f *függvény bármelyik* K_n*-re* $(n \in \mathbf{N})$ *való leszűkítése folytonos.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy a feltételek között szereplő „megszámlálható topologikus bázis" létezése a következőt jelenti (ld. 4.1.1.): van olyan $G_n \in \mathcal{T}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat, hogy bármelyik $Z \in \mathcal{T}$ halmaz előállítható $Z = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} G_n$ alakban egy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal.

Az előbbi emlékeztetőben bevezetett jelöléseket is használva tegyük fel először azt, hogy az a) állítás igaz, és lássuk be a b)-t. Legyen ehhez az $U \in \mathcal{B}(X)$ egy olyan μ-nulla-mértékű halmaz, amivel

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in X \setminus U).$$

A g függvényre tett feltétel miatt $g^{-1}[G_n] \in \mathcal{B}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel a 4.3.2.5. Tétel szerint a μ reguláris, ezért minden $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$ mellett valamilyen $K_n \in \mathcal{P}(X)$ kompakt és $U_n \in \mathcal{P}(X)$ nyílt halmazzal

$$K_n \subset g^{-1}[G_n] \subset U_n, \quad \mu(U_n \setminus K_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}.$$

Ha $A := \bigcup_{n=0}^{\infty}(U_n \setminus K_n)$, akkor az A nyílt, és

$$\mu(A) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n \setminus K_n) < \varepsilon.$$

Ismét csak a 4.3.2.5. Tételre hivatkozva létezik olyan $K \in \mathcal{P}(X)$ kompakt halmaz is, hogy az $\tilde{A} := X \setminus A$ jelöléssel

$$K \subset \tilde{A} \setminus U = X \setminus (A \cup U), \quad \mu((\tilde{A} \setminus U) \setminus K) < \varepsilon - \mu(A),$$

így

$$\mu(X \setminus K) = \mu(A \cup U \cup ((\tilde{A} \setminus U) \setminus K)) \leq \mu(A) + \mu((\tilde{A} \setminus U) \setminus K) < \varepsilon.$$

Legyen a g_0 a g függvénynek az $\tilde{A}$-ra való leszűkítése. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$g_0^{-1}[G_n] = g^{-1}[G_n] \cap \tilde{A}, \quad K_n \subset g^{-1}[G_n] \subset U_n, \quad U_n \setminus K_n \subset A$$

alapján

$$U_n \cap \tilde{A} \subset K_n \cap \tilde{A} \subset g_0^{-1}[G_n] \subset U_n \cap \tilde{A}.$$

Tehát $g_0^{-1}[G_n] = U_n \cap \tilde{A}$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért a bevezető emlékeztetőben szereplő bármelyik $Z = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_n \in \mathcal{T}$ nyílt halmazra

$$g_0^{-1}[Z] \cap \tilde{A} = S \cap \tilde{A},$$

ahol az $S := \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_n$ nyílt részhalmaza az X-nek. Ebből adódóan a g_0 folytonos. Mivel az f, g függvényeknek a K-ra való leszűkítései nyilván megegyeznek, így innen egyúttal az $K \ni x \mapsto f(x)$ leképezés folytonossága már következik.

Ezzel az a) $\Longrightarrow$ b) következtetést igazoltuk. A b) $\Longrightarrow$ c) irányhoz először is lássuk be azt, hogy létezik kompakt, páronként diszjunkt halmazoknak egy olyan $K_n \in \mathcal{P}(X)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ sorozata, amelyre

$$\mu\Big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\Big) < 1/n,$$

és az f függvénynek a K_n-re való leszűkítése folytonos $(n = 1, 2, ...)$. Valóban, legyen a K_1 az $\varepsilon := 1$ választásnak megfelelő b)-beli K halmaz. Ha valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén a $K_1, ..., K_n$ halmazok már eleget tesznek a feltételeinknek, akkor jelöljük K'-vel az $\varepsilon := 1/2(n+1)$ választással a b)-ben kapott K halmazt, és tekintsük az $L := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$-t. A μ regularitása miatt (ld. 4.3.2.5. Tétel) ekkor van olyan $K_{n+1} \subset K' \setminus L$ kompakt halmaz, amivel

$$\mu(K' \setminus L) - \mu(K_{n+1}) = \mu(K' \cap (X \setminus L) \cap (X \setminus K_{n+1})) < \frac{1}{2(n+1)}.$$

Következésképpen

$$\mu(X \setminus (L \cup K_{n+1})) = \mu((X \setminus K') \cap (X \setminus L)) + \mu(K' \cap (X \setminus L) \cap (X \setminus K_{n+1})) \leq$$

$$\mu(X \setminus K') + \mu(K' \cap (X \setminus L) \cap (X \setminus K_{n+1})) < \frac{1}{n+1}.$$

A $V := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ halmaz nyilván eleget tesz a c)-ben mondottaknak.

Hátra van még a c) $\Longrightarrow$ a) állítás bizonyítása. Jegyezzük meg ehhez első esetként azt a triviális tényt, hogy amennyiben a c) feltételben $V = \emptyset$, akkor a $g := f$ függvény nyilván

eleget tesz az a)-nak. Feltehetjük tehát, hogy $V \neq \emptyset$, amikor is valamilyen $y \in f[V]$ mellett legyen

$$g(x) := \begin{cases} y & (x \in V) \\ f(x) & (x \in X \setminus V). \end{cases}$$

Tehát $f = g$ μ-m.m. Ha $G \in \mathcal{T}$, akkor

$$g^{-1}[G] = (g^{-1}[G] \cap V) \cup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} (g^{-1}[G] \cap K_n) \Big) = V_0 \cup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} g_n^{-1}[G] \Big),$$

ahol $V_0 := g^{-1}[G] \cap N$ és a g_n $(n \in \mathbf{N})$ a g (tehát egyúttal az f) függvénynek a K_n-re való leszűkítése. Világos, hogy $V_0 = V$ $(y \in G)$ és $V_0 = \emptyset$ $(y \notin G)$, továbbá a $g_n = f_{|K_n}$ folytonossága miatt valamilyen $U_n \in \mathcal{P}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ nyílt halmazzal

$$g_n^{-1}[G] = K_n \cap U_n = \mathcal{B}(X).$$

Ebből

$$g^{-1}[G] = V_0 \cup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} (K_n \cup U_n) \Big) \in \mathcal{B}(X)$$

adódik, így $\mathcal{B}(Y) = \Omega(\mathcal{T})$ és a 2.7.1.3. Lemma alapján a g-re vonatkozó a)-beli első állítás is igaz. ■

Legyen az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér lokálisan kompakt és a végtelenben megszámlálható. A $\mathcal{K}(X)$ Stone-féle vektorhálón értelmezett absztrakt integrálból fogunk kiindulni. Tudjuk (ld. 4.1.3.8-9. Lemmák), hogy ha az

$$I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$$

leképezés egy pozitív lineáris funkcionál, akkor az I egyúttal absztrakt integrál. A 4.1.3.6. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy $\sigma(\mathcal{K}(X)) = \sigma(\mathcal{C}(X))$. Ezért a 4.3.1.3., 4.1.3.4. Lemmák miatt

$$\Omega_{\mathcal{K}(X)} = \Omega(\sigma(\mathcal{K}(X))) = \Omega(\sigma(\mathcal{C}(X))) = \Omega(\sigma(\mathcal{C}_0(X))) = \Omega_{\mathcal{C}_0(X)} = \mathcal{B}_0(X).$$

Következésképpen minden $\mu : \Omega_{\mathcal{K}(X)} \to [0, +\infty]$ mérték eleve Baire-mérték.

Alkalmazzuk a Daniell-Stone-tételt (ld. 4.3.1.4. Tétel) az előbbi I absztrakt integrálra. Ekkor a fenti bevezető észrevételeket is szem előtt tartva azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$ Baire-mérték, hogy

$$\mathcal{K}(X) \subset L^1(\mu), \quad I(f) = \int f \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

teljesül. Igaz továbbá az is, hogy minden kompakt $K \in \mathcal{B}_0(X)$ halmaznak a $\mu(K)$ mértéke véges. Ui. (ld. 4.1.3.2. Lemma) van olyan $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy $\chi_K \leq f$, amiből

$$\mu(K) = \int \chi_K \, d\mu \leq \int f \, d\mu = I(f) < +\infty$$

következik.

Mindezek alapján tehát lokálisan kompakt tereken azok a Baire-, ill. Borel-mértékek lesznek „érdekesek" a számunkra, amelyek szerint minden kompakt Baire-halmaz, ill. minden kompakt halmaz mértéke véges. Egy $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus tér esetén legyen már most $\Lambda_0(X)$, ill. $\Lambda(X)$ az ilyen tulajdonságú $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to [0, +\infty]$ Baire-mértékek, ill. $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ Borel-mértékek halmaza.

Például minden $p = 1, 2, ...$ mellett az $\mathbf{R}^p$ a „szokásos" topológiák bármelyikével lokálisan kompakt, és a Borel-Lebesgue-mérték (ld. 2.7.) a fentieknek eleget tevő Borel-mérték. Ugyanakkor egy $(X, \mathcal{P}(X))$ diszkrét tér esetén $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$, és valamilyen $K \in \mathcal{P}(X)$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha véges. Tehát egy $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ mérték akkor és csak akkor tartozik a $\Lambda(X)$-hez, ha tetszőleges $x \in X$ mellett $\mu(\{x\}) < +\infty$.

Összefoglalva az eddig mondottakat, a következő tételt kapjuk:

4.3.2.8. Tétel. *Legyen az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt, a végtelenben megszámlálható topologikus tér. Ekkor*:

a) *tetszőleges $\mu \in \Lambda_0(X)$ Baire-mérték esetén $\mathcal{K}(X) \subset L^1(\mu)$, és a*

$$\mathcal{K}(X) \ni g \mapsto \int g \, d\mu$$

leképezés pozitív lineáris funkcionál;

b) *ha az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pozitív lineáris funkcionál, akkor egyértelműen létezik olyan $\mu \in \Lambda_0(X)$ Baire-mérték, hogy*

$$I(f) = \int f \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{K}(X)).$$

Már csak a $\mathcal{K}(X) \subset L^1(\mu)$ állítás igényel némi indokolást. Legyen ehhez $g \in \mathcal{K}(X)$. A 4.1.3.2. Lemma szerint van olyan $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, amire $f(x) = 1$ $(x \in \operatorname{supp} g)$, következésképpen az $\{f \geq 1/2\} \in \mathcal{B}_0(X)$ halmaz az $\{f \geq 1/2\}$ szinthalmaz zártsága és $\{f \geq 1/2\} \subset \operatorname{supp} f$ miatt kompakt, és

$$\operatorname{supp} g \subset \{f \geq 1/2\}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|g| \leq \|g\| \cdot \chi_{\{f \geq 1/2\}},$$

amiből – tekintve, hogy a g függvény az $\Omega_{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{B}_0(X)$ szigma-algebrára nézve mérhető – $\int |g| \, d\mu \leq \|g\| \cdot \mu(\{f \geq 1/2\}) < +\infty$, azaz $g \in L^1(\mu)$ adódik.

Vegyük észre, hogy az általában fennálló $\Omega_{\mathcal{K}(X)} \subset \mathcal{B}_0(X)$ tartalmazás miatt a 4.3.2.8. Tétel a) állításának a fenti bizonyításában a tér végtelenben való megszámlálhatósága valójában nem játszott szerepet, így a szóban forgó a) része a tételnek tetszőleges lokálisan kompakt topologikus tér esetén is igaz.

4.3.3. Haar-mérték

Ebben a pontban néhány kiegészítő megjegyzést fűzünk a lokálisan kompakt terekről eddig mondottakhoz. (A részleteket illetően az irodalmi felsorolásban szereplő műveket ajánljuk az Olvasó figyelmébe.) A szóban forgó pont célja az, hogy eligazítást nyújtson a Haar-mértéket behatóbban tanulmányozni kívánók számára.

A továbbiakban – anélkül, hogy ezt minden egyes alkalommal külön említenénk – valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az $(X, \mathcal{T})$ mindig egy lokálisan kompakt topologikus teret fog jelenteni. Az eddig „megszokott" jelöléseket használjuk ezután is.

Pozitív lineáris funkcionálok

Elöljáróban egy rövid áttekintést adunk a pozitív, lineáris funkcionálokkal kapcsolatban az eddig mondottakról, egyúttal egy más megközelítését is adva a témakörnek. Legyen tehát az $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$ tetszőleges, akkor egy alkalmas monoton növekedő $f_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$f = \sup_n f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Ha az $x \in X$ olyan, hogy $f(x) < +\infty$, ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexszel $f_n(x) > f(x) - \varepsilon$. Mivel az f_n függvény folytonos, ezért egyúttal az x-nek egy alkalmas $K(x)$ környezetével

$$f_n(y) > f(x) - \varepsilon \qquad (y \in K(x)).$$

Az (f_n) sorozat monoton nőve tart az f-hez, így egyúttal

$$f(y) > f(x) - \varepsilon \qquad (y \in K(x))$$

is igaz. Ha pedig $f(x) = +\infty$, akkor – hasonló gondolatmenettel – tetszőleges $A \in (0, +\infty)$ esetén az előbbi $K(x)$-ről feltehető, hogy

$$f(y) > A \qquad (y \in K(x)).$$

Röviden szólva azt kaptuk, hogy minden $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$ függvény alulról félig folytonos. Ha tehát

$$\mathcal{M}(X) := \{f : X \to [0, +\infty] : \text{ az } f \text{ alulról félig folytonos}\},$$

akkor $\mathcal{K}(X)_*^+ \subset \mathcal{M}(X)$. Pl. egyszerűen belátható az, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ halmazra a χ_A karakterisztikus függvény alulról félig folytonos.

Nyilvánvaló, hogy a fenti értelmezésből kifolyólag bármelyik $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$ függvényre

$$f = \sup\{g \in \mathcal{K}(X)^+ : g \leq f\}.$$

Mutassuk meg, hogy „ezen az úton" minden $\mathcal{M}(X)$-beli függvényt megkaphatunk. Többek között ezzel kapcsolatos a

4.3.3.1. Lemma. *A fenti tetszőleges lokálisan kompakt* $(X, \mathcal{T})$ *tér esetén*

a) *ha* $f \in \mathcal{M}(X)$ *és* $0 \le c \in \mathbf{R}$, *akkor* $cf \in \mathcal{M}(X)$;

b) *legyen* $\Gamma \neq \emptyset$ *és* $f_\gamma \in \mathcal{M}(X) \quad (\gamma \in \Gamma)$, *ekkor* $\sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \in \mathcal{M}(X)$;

c) *ha a* b)*-beli* Γ *halmaz véges, akkor* $\min_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \in \mathcal{M}(X)$;

d) *minden* $f \in \mathcal{M}(X)$ *függvényre igaz az, hogy*

$$f = \sup\{g \in \mathcal{K}(X)^+ : g \le f\}.$$

Bizonyítás. Az a) – c) állítások az alulról félig folytonosság definíciója alapján meglehetősen nyilvánvalóak, ezért csak a d) bizonyítását részletezzük. Azt kell ehhez belátnunk, hogy ha $f \in \mathcal{M}(X)$ és $x \in X$, akkor

$$f(x) = \sup\{g(x) : f \ge g \in \mathcal{K}(X)^+\}.$$

Ha itt $f(x) < +\infty$, akkor mindez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $g \in \mathcal{K}(X)^+$, hogy $g \le f$ és $g(x) \ge f(x) - \varepsilon$. A tétel megfogalmazása előtt mondottak szerint viszont

$$f(y) > f(x) - \varepsilon \qquad (y \in K(x)),$$

ahol a $K(x)$ (az ε-től függő) valamilyen (feltehető, hogy nyílt) környezete az x-nek. Mivel az $(X, \mathcal{T})$ tér lokálisan kompakt, ezért (ld. 4.2. xix) megjegyzés) van olyan K kompakt környezete az x-nek, hogy $K \subset K(x)$. A 4.1.3.2. Lemma szerint megadható egy $h \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény úgy, hogy egyrészt $\mathcal{R}_h \subset [0, 1]$ és $\operatorname{supp} h \subset K(x)$, másrészt pedig

$$h(t) = 1 \qquad (x \in K).$$

Ez azt jelenti, hogy a $g := (f(x) - \varepsilon)\cdot h \in \mathcal{K}(X)^+$ függvénnyel $g \le f$ és

$$g(y) = f(x) - \varepsilon \qquad (y \in K),$$

speciálisan $g(x) = f(x) - \varepsilon$.

Analóg módon „intézhetjük el" az $f(x) = +\infty$ esetet is. ■

Legyen az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pozitív lineáris funkcionál, és a 4.3.3.1. Lemma d) állítását szem előtt tartva értelmezzük az

$$\tilde{I} : \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$$

leképezést az alábbiak szerint:

$$\tilde{I}(f) := \sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)^+,\ g \le f\} \qquad (f \in \mathcal{M}(X)).$$

Erre az $\tilde{I}$ funkcionálra könnyűszerrel igazolhatók a következő lemmában megfogalmazott tulajdonágok.

4.3.3.2. Lemma.

a) $\mathcal{K}(X)^+ \subset \mathcal{M}(X)$ *és* $\tilde{I}(f) = I(f)$ $(f \in \mathcal{K}(X)^+)$;

b) $f, g \in \mathcal{M}(X)$, $f \leq g \implies \tilde{I}(f) \leq \tilde{I}(g)$;

c) $f \in \mathcal{M}(X)$, $0 \leq c \in \mathbf{R} \implies \tilde{I}(cf) = c \cdot \tilde{I}(f)$.

Speciálisan, ha $f_n \in \mathcal{M}(X)$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az előbbi lemmák szerint

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}(X),$$

az $(\tilde{I}(f_n))$ sorozat monoton növő, és $f_n \leq f$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt $\tilde{I}(f_n) \leq \tilde{I}(f)$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}(f_n) \leq \tilde{I}(f).$$

A következő tételben az $\tilde{I}$ funkcionál monoton folytonosságát (ld. 4.4. vi) megjegyzés) igazoljuk.

4.3.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak az* $f_n \in \mathcal{M}(X)$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvények. Ekkor* $\tilde{I}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}(f_n)$.

Bizonyítás. Ha $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ és $f, f_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $\inf_n(f - f_n) = 0$. Ezért (ld. 4.2. x) megjegyzés)

$$\inf_n I(f - f_n) = I(f) - \sup_n I(f_n) = 0,$$

tehát

$$\tilde{I}(\lim_{n\to\infty} f_n) = I(f) = \sup_n I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}(f_n).$$

Az általános $f_n \in \mathcal{M}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ esetben a tétel megfogalmazása előtt mondottakra utalva elgendő azt belátni, hogy

$$\tilde{I}(f) \leq \sup_n \tilde{I}(f_n).$$

Legyen ehhez

$$\mathcal{A} := \{g \in \mathcal{K}(X)^+ : g \leq f_n \text{ valamilyen } n \in \mathbf{N} \text{ mellett}\}.$$

Ekkor

$$f = \sup_n(\sup\{g \in \mathcal{K}(X)^+ : g \leq f_n\}) = \sup\{g : g \in \mathcal{A}\}.$$

Ha $g_0 \in \mathcal{K}(X)^+$ és $g_0 \leq f$, akkor

$$g_0 = \min\{g_0, f\} = \sup\{\min\{g_0, g\} : g \in \mathcal{A}\}.$$

Viszont g_0, $\min\{g_0, g\} \in \mathcal{K}(X)^+$ $(g \in \mathcal{A})$, ezért az első eset alapján

$$\tilde{I}(g_0) = \sup\{\tilde{I}(\min\{g_0, g\}) : g \in \mathcal{A}\} \leq \sup\{\tilde{I}(g) : g \in \mathcal{A}\} \leq \sup_n \tilde{I}(f_n).$$

Következésképpen

$$\tilde{I}(f) = \sup\{\tilde{I}(g_0) : g_0 \in \mathcal{K}(X)^+,\, g_0 \leq f\} \leq \sup_n \tilde{I}(f_n).$$

■

Az előbbi tételben követett gondolatmenettel látható be a

4.3.3.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{M}(X)$ *halmaz bármelyik két* $f, g \in \mathcal{D}$ *eleméhez van olyan* $h \in \mathcal{D}$, *hogy* $h \geq \max\{f, g\}$. *Ekkor az* $F := \sup\{f : f \in \mathcal{D}\}$ *jelöléssel*:

$$\tilde{I}(F) = \sup\{\tilde{I}(f) : f \in \mathcal{D}\}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti lemmából speciális esetként egyszerűen következik a 4.3.3.3. Tétel. Világos továbbá, hogy

$$\tilde{I}(f + g) = \tilde{I}(f) + \tilde{I}(g) \qquad (f, g \in \mathcal{M}(X)).$$

Ui. $f + g = \sup\{u + v : u, v \in \mathcal{K}(X)^+,\, u \leq f;\, v \leq g\}$ és a 4.3.3.4. Lemma miatt az I additivitása alapján

$$\tilde{I}(f + g) = \sup\{I(u + v) : u, v \in \mathcal{K}(X)^+,\, u \leq f;\, v \leq g\} =$$

$$\sup\{I(u) + I(v) : u, v \in \mathcal{K}(X)^+,\, u \leq f;\, v \leq g\} =$$

$$\sup\{I(u) : u \in \mathcal{K}(X)^+,\, u \leq f\} + \sup\{I(v) : v \in \mathcal{K}(X)^+,\, v \leq g\} = \tilde{I}(f) + \tilde{I}(g).$$

Sőt, az is egyszerűen adódik, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$, $f_\gamma \in \mathcal{M}(X)$ $(\gamma \in \Gamma)$, akkor

$$\tilde{I}\Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\Big) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{I}(f_\gamma)$$

(ahol $\sum_{\gamma \in \Gamma} ... := \sup_{\Gamma_0 \subset \Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma_0} ...$) és a szuprémum a véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmazokra vonatkozik).

Legyen ezek után az $f : X \to [0, +\infty]$ függvény tetszőleges, és

$$\hat{I}(f) := \inf\{\tilde{I}(g) : g \in \mathcal{M}(X),\, f \leq g\}.$$

Ekkor az eddigiek alapján nem okoz nehézséget az alábbiak belátása.

4.3.3.5. Lemma. *A fenti* $\hat{I} : [0,+\infty]^X \to [0,+\infty]$ *leképezés rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*:

a) $f \in \mathcal{M}(X) \implies \hat{I}(f) = \tilde{I}(f)$, *azaz* $\hat{I}_{|\mathcal{M}(X)} = \tilde{I}$;

b) $f, g \in [0,+\infty]^X$, $f \le g \implies \hat{I}(f) \le \hat{I}(g)$;

c) $f \in [0,+\infty]^X$, $0 \le c \in \mathbf{R} \implies \hat{I}(cf) = c\cdot \hat{I}(f)$;

d) $f, g \in [0,+\infty]^X \implies \hat{I}(f+g) \le \hat{I}(f) + \hat{I}(g)$.

Jegyezzük meg, hogy az $\hat{I}$ funkcionál általában nem additív, csak szubadditív (ld. d)). Viszont az $\hat{I}$-re is igaz a monoton folytonosság, azaz a

4.3.3.6. Tétel. *Legyen az* $f_n \in [0,+\infty]^X$ $(n \in \mathbf{N})$ *sorozat monoton növő, más szóval* $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. *Ekkor*

$$\hat{I}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n).$$

Bizonyítás. Legyen $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, ekkor nyilván igaz, hogy $f_n \le f$ $(n \in \mathbf{N})$, következésképpen (ld. 4.3.3.5. Lemma) $\hat{I}(f_n) \le \hat{I}(f)$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel az $(\hat{I}(f_n))$ sorozat is monoton növekedő (ld. 4.3.3.5. Lemma), ezért létezik a tételbeli $\lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n)$ határérték, és

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n) \le \hat{I}(f).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n) = +\infty$ esetén igaz a tétel. Elegendő tehát azt bebizonyítani, hogy

$$\hat{I}(f) \le \lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n),$$

ahol $\lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n) < +\infty$ már feltehető.

Az $\hat{I}$ értelmezése miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz minden $n \in \mathbf{N}$ mellett létezik olyan $g_n \in \mathcal{M}(X)$ függvény, hogy $g_n \ge f$ és

$$(*) \qquad \tilde{I}(g_n) < \hat{I}(f_n) + \varepsilon\cdot 2^{-n-1}.$$

Legyen

$$G_n := \max\{g_0, ..., g_n\}\ (\in \mathcal{M}(X)) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor

$$f = \sup_n f_n \le \sup_n g_n \le \sup_n G_n. \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A G_n-ekről megmutatjuk, hogy

$$(**) \qquad \tilde{I}(G_n) < \hat{I}(f_n) + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, a $(*)$ felhasználásával a következőket mondhatjuk:

$$G_{n+1} = \max\{G_n, g_{n+1}\} = G_n + g_{n+1} - \min\{G_n, g_{n+1}\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\tilde{I}(G_{k+1}) = \tilde{I}(G_k) + \tilde{I}(g_{k+1}) - \tilde{I}(\min\{G_k, g_{k+1}\}) \leq \tilde{I}(G_k) + \tilde{I}(g_{k+1}) - \hat{I}(f_k) <$$
$$\tilde{I}(G_k) + \hat{I}(f_{k+1}) - \hat{I}(f_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k-2} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Innen a k-szerinti összegzéssel kapjuk a $(**)$-ot.

Végül, a $(**)$ szerint (ld. 4.3.3. Tétel)

$$\hat{I}(f) \leq \tilde{I}(\lim_{n\to\infty} G_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}(G_n) \leq \lim_{n\to\infty} (\hat{I}(f_n) + \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n) + \varepsilon,$$

amiből a $\varepsilon \to +0$ határátmenet után következik a kívánt $\hat{I}(f) \leq \lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n)$ egyenlőtlenség. ■

Emlékeztetünk arra, hogy a Daniell–Stone-tétel (4.3.1.4. Tétel) bizonyításában az ott szereplő $I : \mathcal{F} \to$ pozitív lineáris funkcionál (absztrakt integrál) $\mathcal{F}^+$-ra való leszűkítését az $\mathcal{F}^*_+$-ra terjesztettük ki, ahol most $\mathcal{F} = \mathcal{K}(X)$, és kaptuk (jelen esetben) az

$$I^* : \mathcal{K}(X)^+_* \to \overline{\mathbf{R}}$$

leképezést. Nevezetesen, ha $f = \sup_n f_n \in \mathcal{K}(X)^+_*$ egy alkalmasan választott $f_n \in \mathcal{K}(X)^+$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal, akkor

$$I^*(f) := \sup_n I(f_n),$$

ahol $I^*(f)$ csak az f-től függ, az őt „előállító" (f_n) sorozattól nem. Könnyű meggondolni, hogy egyúttal

$$I^*(f) = \sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)^+,\ g \leq f\} = \tilde{I}(f)$$

is igaz. Valóban, az $I^*(f) \leq \tilde{I}(f)$ egyenlőtlenség triviális lévén, tegyük fel indirekt módon, hogy $I^*(f) < \tilde{I}(f)$. Ekkor valamilyen $g \in \mathcal{K}(X)^+$, $g \leq f$ függvénnyel $I(g) > I^*(f)$ teljesülne. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a

$$g_n := \max\{f_n, g\} \in \mathcal{K}(X)^+ \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat is monoton növő, és $\sup_n g_n = f$. Következésképpen $I^*(f) = \sup_n I(g_n)$, és így $g \leq g_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt $I^*(f) \geq I(g)$, ami ellentmond az előbbi „fordított" irányú becslésnek.

Más szóval azt kaptuk, hogy $\hat{I}_{|\mathcal{K}(X)^*_+} = \tilde{I}_{|\mathcal{K}(X)^*_+} = I^*$, azaz

$$\hat{I}(f) = \tilde{I}(f) = I^*(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^*_+).$$

Definiáljuk a $\hat{\mu} : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ leképezést az alábbiak szerint:

$$\hat{\mu}(A) := \hat{I}(\chi_A) \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

Tehát

$$\hat{\mu}(A) = \inf\{\tilde{I}(g) : g \in \mathcal{M}(X),\, \chi_A \leq g\} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

A külső mérték axiómái (ld. 2.5.) alapján könnyűszerrel igazolható az, hogy a $\hat{\mu}$ külső mérték. Alkalmazható tehát a Caratheodory-tétel (ld. 2.5.2. Tétel), amiből az (X, Θ, ν) mértékteret kapjuk. Itt a Θ a $\hat{\mu}$-mérhető halmazok szigma-algebrája, ahol $A \in \Theta$ azt jelenti, hogy

$$\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(B \cap A) + \hat{\mu}(B \setminus A) \qquad (B \in \mathcal{P}(X))$$

(és az $=$ helyett $\geq$-t is írhatunk), valamint $\nu := \hat{\mu}_{|\Theta}$. Tudjuk (ld. 2.5.), hogy minden olyan $A \subset X$ halmaz $\hat{\mu}$-mérhető, amelyikre $\hat{\mu}(A) = 0$. Továbbá (ez utóbbi következményeként) a ν teljes mérték (ld. 2.6. iv) megjegyzés), azaz $A \in \Theta$, $\nu(A) = 0$ esetén minden $B \subset A$ halmazra is $B \in \Theta$ (és $\nu(B) = 0$).

A most definiált $\hat{\mu}$ külső mértékre igaz a

4.3.3.7. Tétel.

a) $\hat{\mu}(A) = \inf\{\hat{\mu}(T) : T \in \mathcal{T},\, A \subset T\} \quad (A \in \mathcal{P}(X))$;

b) $\hat{\mu}(A) = \sup\{\hat{\mu}(F) : F \subset X \text{ kompakt},\ F \subset A\} \quad (A \in \mathcal{T})$;

c) $\hat{\mu}(A) = \sup\{\hat{\mu}(V) : V \in \mathcal{T},\, \overline{V} \text{ kompakt},\ \overline{V} \subset A\} \quad (A \in \mathcal{T})$;

d) $\hat{\mu}(F) < +\infty \quad (F \subset X,\, F \text{ kompakt})$;

e) $\mathcal{B}(X) = \Omega(\mathcal{T}) \subset \Theta$;

f) $\hat{\mu}(A) = \sup\{\hat{\mu}(F) : F \subset X \text{ kompakt},\ F \subset A\} \quad (A \in \Theta,\, \hat{\mu}(A) < +\infty)$.

Bizonyítás. Az a) nyilván igaz, ha $\hat{\mu}(A) = +\infty$, hiszen minden $T \in \mathcal{T}$, $A \subset T$ esetén $\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(T)$. Ezért feltehetjük, hogy $\hat{\mu}(A) < +\infty$, amikor is tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in \mathcal{M}(X)$, hogy $g \geq \chi_A$ és

$$\tilde{I}(g) < \hat{\mu}(A) + \varepsilon.$$

Legyen

$$U := \{g > 1 - \varepsilon\},$$

ekkor a g alulról félig folytonosságából könnyen adódik az, hogy az U halmaz nyílt, így $\chi_U \in \mathcal{M}(X)$. Világos továbbá, hogy

$$A \subset U,\ \chi_U \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot g =: G.$$

Ezért (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\hat{\mu}(U) = \hat{I}(\chi_U) \le \tilde{I}(G) = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \tilde{I}(g) < \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot (\hat{\mu}(A) + \varepsilon).$$

Ha itt $\varepsilon \to +0$, akkor $\hat{\mu}(U) \le \hat{\mu}(A)$ adódik, amiből $\hat{\mu}(A) \ge \inf\{\hat{\mu}(T) : T \in \mathcal{T},\, A \subset T\}$ következik. Mivel a fordított irányú egyenlőtlenség a $\hat{\mu}$ monotonitása alapján nyilvánvaló, ezért az a)-t beláttuk.

A b) bizonyításához legyen $A \in \mathcal{T}$. Ekkor $\chi_A \in \mathcal{M}(X)$ miatt (ld. 4.3.3.5. Lemma) tetszőleges

$$\beta < \hat{\mu}(A) = \hat{I}(\chi_A) = \tilde{I}(\chi_A) = \sup\{I(f) : f \in \mathcal{K}(X)^+,\, f \le \chi_A\}$$

esetén létezik olyan $f \in \mathcal{K}(X)^+$, amire $f \le \chi_A$ és $I(f) > \beta$. Legyen továbbá

$$F_n := \{f \ge 1/n\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az f folytonossága miatt minden $0 < n \in \mathbf{N}$ index mellett az F_n zárt, valamint $F_n \subset \operatorname{supp} f$, így az F_n kompakt, és nyilván

$$F_n \subset F_{n+1} \subset \{f > 0\}.$$

Utóbbi miatt a (χ_{F_n}) sorozat monoton nőve tart a $\chi_{\{f>0\}}$ függvényhez. Mivel $f \le \chi_A$ alapján egyúttal $f \le \chi_{\{f>0\}}$ is igaz, ezért a 4.3.3.5. Lemma és a 4.3.3.6. Tétel (valamint a $\hat{\mu}$ értelmezése) szerint

$$\beta < I(f) = \hat{I}(f) \le \hat{I}(\chi_{\{f>0\}}) = \hat{I}\Big(\lim_{n\to\infty} \chi_{F_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \hat{I}\Big(\chi_{F_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(F_n).$$

Így alkalmas $0 < n \in \mathbf{N}$ indexre $\hat{\mu}(F_n) > \beta$. Figyelembe véve, hogy tetszőleges kompakt $F \subset A$ halmaz esetén $\hat{\mu}(F) \le \hat{\mu}(A)$, ezért a b)-t is beláttuk.

A c)-t analóg módon bizonyíthatjuk be. A d) igazolásához legyen az $F \subset X$ halmaz kompakt. A 4.1.3.2. Lemma alapján van olyan $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy $f(x) = 1$ $(x \in F)$ és $K \subset \operatorname{supp} f$. Így $\chi_F \le f$, ezért az előbb már hivatkozottakra tekintettel

$$\hat{\mu}(F) = \hat{I}(\chi_F) \le \hat{I}(f) = I(f) < +\infty.$$

Az e)-hez először is vegyük észre, hogy ha egy $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazra

$$\hat{\mu}(U) \ge \hat{\mu}(U \cap B) + \hat{\mu}(U \setminus B) \qquad (U \in \mathcal{T},\, \hat{\mu}(U) < +\infty)$$

teljesül, akkor $B \in \Theta$. Ha ui. $S \subset X$, ekkor $\hat{\mu}(S) = +\infty$ esetén nyilván igaz, hogy

$$\hat{\mu}(S) \ge \hat{\mu}(S \cap B) + \hat{\mu}(S \setminus B).$$

Ezért feltehető, hogy $\hat{\mu}(S) < +\infty$. Legyen ekkor az $U \in \mathcal{T}$ halmaz olyan, hogy $S \subset U$, amikor is a feltételünk miatt

$$\hat{\mu}(U) \geq \hat{\mu}(U \cap B) + \hat{\mu}(U \setminus B) \geq \hat{\mu}(S \cap B) + \hat{\mu}(S \setminus B).$$

Következésképpen az a) alapján

$$\hat{\mu}(S) = \inf\{\hat{\mu}(U) : U \in \mathcal{T},\, S \subset U\} \geq \hat{\mu}(S \cap B) + \hat{\mu}(S \setminus B),$$

ami a B halmaz $\hat{\mu}$-mérhetőségét jelenti.

Lássuk most be azt, hogy $\mathcal{T} \subset \Theta$. Ha ui. $U, V \in \mathcal{T}$ és $\hat{\mu}(U) < +\infty$, akkor (ld. a)) minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $H \in \mathcal{T}$, hogy $U \cap (X \setminus V) \subset H$ és

$$(*) \qquad \hat{\mu}(H) < \hat{\mu}(U \cap (X \setminus V)) + \varepsilon/2.$$

A c) pont szerint létezik olyan $W \in \mathcal{T}$, amivel $\overline{W} \subset U \cap V$ és

$$\hat{\mu}(W) + \varepsilon/2 > \hat{\mu}(U \cap V).$$

Legyen

$$W_0 := U \cap H \cap (X \setminus \overline{W}).$$

Ekkor $W_0 \in \mathcal{T}$ és $W \cap W_0 = \emptyset$. Mivel $U \cap (X \setminus V) \subset W_0 \subset H$, ezért a $(*)$ szerint

$$|\hat{\mu}(W_0) - \hat{\mu}(U \cap (X \setminus V))| < \varepsilon/2,$$

továbbá hasonlóan

$$|\hat{\mu}(W) - \hat{\mu}(U \cap V)| < \varepsilon/2.$$

Mindebből azt kapjuk, hogy

$$\Big|\hat{\mu}(W) + \hat{\mu}(W_0) - \Big(\hat{\mu}(U \cap V) + \hat{\mu}(U \cap (X \setminus V))\Big)\Big| < \varepsilon.$$

Ugyanakkor $W, W_0 \subset U$, így (ld. 4.3.3.8. Lemma)

$$\hat{\mu}(U) \geq \hat{\mu}(W \cup W_0) = \hat{I}(\chi_{W \cup W_0}) = \hat{I}(\chi_W + \chi_{W_0}) = \hat{I}(\chi_W) + \hat{I}(\chi_{W_0}) =$$

$$\hat{\mu}(W) + \hat{\mu}(W_0) > \hat{\mu}(U \cap V) + \hat{\mu}(U \cap (X \setminus V)) - \varepsilon.$$

Ha itt $\varepsilon \to +0$, akkor

$$\hat{\mu}(U) \geq \hat{\mu}(U \cap V) + \hat{\mu}(U \cap (X \setminus V))$$

adódik, amiből a bizonyítás elején mondottak alapján $V \in \Theta$ már következik.

Tehát $\mathcal{T} \subset \Theta$, ahol a $\Theta \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra, ezért $\mathcal{B}(X) = \Omega(\mathcal{T}) \subset \Theta$.

Végül, bizonyítsuk be az f) állítást. Legyen ehhez $\varepsilon > 0$, ekkor (ld. a)) megadható olyan $V \in \mathcal{T}$ halmaz, hogy $A \subset V$, $\hat{\mu}(V) < +\infty$, és

$$\hat{\mu}(V \cap (X \setminus A)) = \hat{\mu}(V \setminus A) < \varepsilon/4.$$

A b) pont szerint viszont van olyan kompakt $E \subset V$ halmaz, amivel

$$\hat{\mu}(V \setminus E) < \varepsilon/2,$$

valamint az a) miatt van olyan $W \in \mathcal{T}$ halmaz is, hogy

$$V \setminus A \subset W \subset V \quad \text{és} \quad \hat{\mu}(W) < \varepsilon/2.$$

Ha $F := E \setminus W$, akkor (ld. 4.1.2.1. Lemma) az E zártsága miatt az F zárt, így – lévén az E kompakt is – az F kompakt, és nyilván $F \subset A$. Továbbá

$$\hat{\mu}(A \setminus F) = \hat{\mu}((A \setminus E) \cup (A \cap W)) \leq \hat{\mu}(V \setminus E) + \hat{\mu}(W) < \varepsilon.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(F) + \hat{\mu}(A \setminus F)$, ezért

$$\hat{\mu}(F) > \hat{\mu}(A) - \varepsilon.$$

Mivel az f)-ben az $=$ helyett a $\geq$ triviálisan teljesül, ezért az eddig mondottakból az f) állítás következik. ■

Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X)$ és $F \in \mathcal{B}(X)$ $(F \subset X,\ F$ kompakt) miatt az előbbi tétel e) pontja alapján a tétel többi állításában (a megfelelő helyeken) $\hat{\mu}$ helyett ν írható:

a) $\hat{\mu}(A) = \inf\{\nu(T) : T \in \mathcal{T},\ A \subset T\}$ $(A \in \mathcal{P}(X))$;

b) $\nu(A) = \sup\{\nu(F) : F \subset X$ kompakt, $F \subset A\}$ $(A \in \mathcal{T})$;

c) $\nu(A) = \sup\{\nu(V) : V \in \mathcal{T},\ \overline{V}$ kompakt, $\overline{V} \subset A\}$ $(A \in \mathcal{T})$;

d) $\nu(F) < +\infty$ $(F \subset X,\ F$ kompakt);

f) $\nu(A) = \sup\{\nu(F) : F \subset X$ kompakt, $F \subset A\}$ $(A \in \Theta,\ \nu(A) < +\infty)$.

Speciálisan (ld. a))

aa) $$\nu(A) = \inf\{\nu(T) : T \in \mathcal{T},\ A \subset T\} \qquad (A \in \Theta).$$

Az aa), b) tulajdonságok alapján azt mondjuk röviden, hogy a ν *reguláris.*

Gondoljuk meg, hogy egy $A \subset X$ halmazt illetően az $A \in \Theta$ tartalmazás akkor és csak akkor teljesül, ha minden $K \subset X$ kompakt halmazzal

$$A \cap K \in \Theta.$$

Ha ui. $A \in \Theta$, akkor (ld. 4.3.3.7. Tétel) $K \in \mathcal{B}(X) \subset \Theta$ miatt $A \cap K \in \Theta$ nyilvánvaló. Fordítva, ha $A \cap K \in \Theta$ tetszőleges kompakt $K \subset X$ halmaz esetén igaz, akkor legyen az $U \in \mathcal{T}$ olyan, hogy $\nu(U) < +\infty$. A 4.3.3.7. Tétel f) pontja szerint minden $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett egy alkalmas kompakt $K_n \subset U$ halmazzal $\nu(U) \geq \nu(K_n) > \nu(U) - 1/n$. Tehát $\lim_{n\to\infty} \nu(K_n) = \nu(U)$, és ezért a

$$\mathcal{B}(X) \ni B := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset U$$

halmazzal – a nyilvánvaló $\nu(K_n) \leq \nu(B) \leq \nu(U) \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ becslésre tekintettel – $\nu(B) = \nu(U)$. Ha tehát $C := U \setminus B$, akkor $C \in \Theta$ és $\hat{\mu}(C) = \nu(C) = \nu(U) - \nu(B) = 0$. Világos, hogy $U = B \cup C$, így

$$A \cap U = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n) \Big) \bigcup (A \cap C) =: Y \cup Z.$$

Az itt szereplő $A \cap K_n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ halmazok a feltételezésünk szerint valamennyien a Θ-ban vannak, ezért $Y \in \Theta$. Ugyanez igaz a Z-re is, hiszen $0 \leq \hat{\mu}(Z) \leq \hat{\mu}(C) = 0$ miatt $\hat{\mu}(Z) = 0$.

Azt kaptuk, hogy az előbbi (véges mértékű) $U \in \mathcal{T}$ halmazzal $A \cap U \in \Theta$. Innen világos, hogy $U \setminus A \in \Theta$ és

$$\nu(U) = \nu(U \cap A) + \nu(U \setminus A).$$

Ekkor viszont a 4.3.3.7. Tétel e) állításának a bizonyításából az következik, hogy $A \in \Theta$.

A 4.3.3.7. Tétel f) pontjában (és annak az előbbi, a mérhető halmazokra vonatkozó speciális esetében) szereplő $\hat{\mu}(A) < +\infty$ (ill. $\nu(A) < +\infty$) feltétel általában nem hagyható el. Ugyanakkor igaz pl. az f) következő kiterjesztése: ha az $A \in \Theta$ halmazra valamilyen $X_n \in \Theta$, $\nu(X_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

teljesül, akkor fennáll az előbbi f) egyenlőség. Ti. nyilván elegendő ezt már csak akkor meggondolni, ha $\nu(A) = +\infty$, azaz azt belátni, hogy ekkor

$$(**) \qquad \sup\{\nu(F) : F \subset X \text{ kompakt}, F \subset A\} = +\infty.$$

Legyen ehhez

$$Y_n := \bigcup_{k=0}^{n} X_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor $Y_n \in \Theta$, $Y_n \subset Y_{n+1}$, $\nu(Y_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$, továbbá (ld. 2.3.1.4. Tétel)

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A \cap Y_n) = \nu(A) = +\infty.$$

Így ha $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\varepsilon < \nu(A \cap Y_n) < +\infty.$$

A fentiek szerint viszont

$$\nu(A \cap Y_n) = \sup\{\nu(F) : F \subset X \text{ kompakt}, F \subset A \cap Y_n\},$$

következésképpen van olyan $F \subset A \cap Y_n \subset A$ kompakt halmaz, hogy $\nu(F) > \varepsilon$. Mivel itt az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért a $(**)$ egyenlőség már nyilvánvaló.

Legyen $A \in \Theta$ és $\nu(A) < +\infty$. Ekkor a fenti f) tulajdonság miatt minden $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas kompakt $F_n \subset A$ halmazzal $\nu(F_n) > \nu(A) - 1/n$. Ha tehát

$$F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

akkor $F \subset A$, $F \in \mathcal{B}(X) \subset \Theta$, és

$$\nu(A) \geq \nu(F) \geq \nu(F_n) > \nu(A) - 1/n \to \nu(A) \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\nu(F) = \nu(A)$. Következésképpen a $C := A \setminus F$ halmazra

$$A = F \cup C,$$

ahol tehát $F \in \mathcal{B}(X)$, $C \in \Theta$ és $\nu(C) = \nu(A) - \nu(F) = 0$ (ld. 2.6. vii) megjegyzés).

4.3.3.8. Lemma. *Tetszőleges $A, B \in \Theta$, $A \cap B = \emptyset$ halmazokra és $0 \leq a, b \in \mathbf{R}$ számokra*

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) = a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B).$$

Bizonyítás. Először is vegyük figyelembe, hogy tetszőleges $f, g : X :\to [0, +\infty]$ függvényekre és $0 \leq c \in \mathbf{R}$ számra (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\hat{I}(f + g) \leq \hat{I}(f) + \hat{I}(g), \quad \hat{I}(cf) = c\cdot \hat{I}(f).$$

Ezért elegendő azt belátni, hogy a tételbeli szereplőkkel

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \geq a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B) \; (= a\cdot \nu(A) + b\cdot \nu(B)).$$

Nyilván feltehető, hogy $a > 0$ és $b > 0$. Továbbá

$$a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B \geq a\cdot \chi_A,$$

így (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \geq \hat{I}(a\cdot \chi_A) = a\cdot \hat{I}(\chi_A) = a\cdot \nu(A),$$

következésképpen $\nu(A) = +\infty$ esetén

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) = +\infty = a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B).$$

Más szóval $\nu(A) < +\infty$ (és ugyanígy $\nu(B) < +\infty$) is feltehető.

Hasonlóan elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $\nu(A) > 0$ és $\nu(B) > 0$. Ha ui. (pl.) $\nu(A) = 0$, akkor az előzőkkel analóg módon

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \geq \hat{I}(b\cdot \chi_B) = b\cdot \hat{I}(\chi_B) = b\cdot \nu(B) = a\cdot \nu(A) + b\cdot \nu(B).$$

Feltételezve tehát az előbb mondottakat induljunk ki első esetként abból, hogy az A is és a B is kompakt. Legyenek az U_0, $V_0 \in \mathcal{T}$ diszjunkt halmazok olyanok (ld. 4.2. xx) megjegyzés), hogy $A \subset U_0$ és $B \subset V_0$. A 4.3.3.7. Tétel alapján feltehető, hogy $\nu(U_0)$, $\nu(V_0) < +\infty$. Világos, hogy

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \leq a\cdot \nu(A) + b\cdot \nu(B) < +\infty.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor az $\hat{I}$ értelmezésére tekintettel van olyan $f \in \mathcal{M}(X)$ függvény, hogy $f \geq a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B$ és

$$\tilde{I}(f) < \hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\delta > 0$ és

$$U_1 := \{f > a - \delta\}, \quad V_1 := \{f > b - \delta\},$$

akkor ezek a halmazok az f alulról félig folytonossága miatt nyíltak. Az

$$U := U_1 \cap U_0, \quad V := V_1 \cap V_0$$

halmazokkal $A \subset U \subset U_0$ és $B \subset V \subset V_0$, továbbá $U \cap V = \emptyset$. Világos, hogy

$$f \geq (a - \delta)\cdot \chi_U + (b - \delta)\cdot \chi_V,$$

következésképpen (ld. 4.3.3.2. Lemma) az $\tilde{I}$ additivitása (ld. a 4.3.3.3. Lemma után mondottak)

$$\tilde{I}(f) \geq \tilde{I}((a - \delta)\cdot \chi_U + (b - \delta)\cdot \chi_V) = (a - \delta)\cdot \tilde{I}(\chi_U) + (b - \delta)\cdot \tilde{I}(\chi_V) =$$

$$(a - \delta)\cdot \nu(U) + (b - \delta)\cdot \nu(V) = a\cdot \nu(U) + b\cdot \nu(V) - \delta\cdot \nu(U_0) - \delta\cdot \nu(V_0) \geq$$

$$a\cdot \nu(A) + b\cdot \nu(B) - \delta\cdot \nu(U_0) - \delta\cdot \nu(V_0) = a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B) - \delta\cdot \nu(U_0) - \delta\cdot \nu(V_0).$$

Válasszuk itt a δ-t úgy, hogy

$$\delta\cdot (\nu(U_0) + \nu(V_0)) < \varepsilon/2,$$

ekkor

$$\tilde{I}(f) > a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B) - \varepsilon/2.$$

Tehát figyelembe véve az eddigieket azt kapjuk, hogy

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) > \tilde{I}(f) - \varepsilon/2 > a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B) - \varepsilon.$$

Ha $\varepsilon \to +0$, akkor a kívánt

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \geq a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B)$$

becslés adódik.

Legyenek most már A, $B \in \Theta$ (a kiindulási feltételek mellett) tetszőlegesek. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ mellett (ld. 4.3.3.7. Tétel) léteznek olyan kompakt $E \subset A$, $F \subset B$ halmazok, hogy

$$a\cdot \nu(E) > a\cdot \nu(A) - \varepsilon/2, \quad b\cdot \nu(F) > b\cdot \nu(B) - \varepsilon/2.$$

Ezért (az előbbi, a kompakt halmazokra vonatkozó első eset szerint)

$$a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B \geq a\cdot \chi_E + b\cdot \chi_F$$

alapján (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\hat{I}(a\cdot \chi_A + b\cdot \chi_B) \geq \hat{I}(a\cdot \chi_E + b\cdot \chi_F) = a\cdot \hat{I}(\chi_E) + b\cdot \hat{I}(\chi_F) =$$

$$a\cdot \nu(E) + b\cdot \nu(F) > a\cdot \hat{I}(\chi_A) + b\cdot \hat{I}(\chi_B) - \varepsilon.$$

Innen $\varepsilon \to +0$ után a lemma állítása következik. ■

A Daniell–Stone-tétel (4.3.1.4. Tétel) bizonyítása során egy μ^* külső mértéket definiáltunk, amiről kiderült, hogy a most tekintett $\mathcal{F} = \mathcal{K}(X)$ esetre fogalmazva

$$\mu^*(A) = \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{K}(X)_*^+,\ \chi_A \leq f\} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

Ezt egybevetve a $\hat{\mu}$ fenti értelmezésével (és figyelembe véve az előbb mondottakat) máris azt kapjuk, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazra

$$\hat{\mu}(A) \leq \inf\{\tilde{I}(g) : g \in \mathcal{K}(X)_*^+,\ \chi_A \leq g\} = \inf\{I^*(g) : g \in \mathcal{K}(X)_*^+,\ \chi_A \leq g\} = \mu^*(A),$$

azaz $\hat{\mu} \leq \mu^*$.

A fentiekben vizsgált $\hat{I}$ funkcionál integrál-alakban való előállíthatóságát mondja ki a

4.3.3.9. Tétel. *Az eddigi jelöléseket használva azt mondhatjuk, hogy minden, a Θ-ra nézve mérhető $f : X \to [0 + \infty]$ függvényre*

$$\hat{I}(f) = \int f\, d\nu.$$

Bizonyítás. Ha valamilyen $A \in \Theta$ halmazzal $f = \chi_A$, akkor

$$\hat{I}(f) = \hat{I}(\chi_A) = \hat{\mu}(A) = \nu(A) = \int \chi_A \, d\nu = \int f \, d\nu.$$

Legyen most az $f : X \to [0, +\infty]$ tetszőleges Θ-mérhető függvény. Ekkor (ld. a 3.3.2.4. Tétel bizonyítása) az

$$A_{in} := \begin{cases} \{i \cdot 2^{-n} \leq f < (i+1) \cdot 2^{-n}\} & (i = 0, ..., n \cdot 2^n - 1) \\ \\ \{f \geq n\} & (i = n \cdot 2^n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazok minden $\mathbf{N} \ni n$-re a Θ-ban vannak és páronként diszjunktak. Ha

$$f_n := \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} i \cdot 2^{-n} \cdot \chi_{A_{in}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az f_n-ek nyilván valamennyien $L_0^+(\nu)$-beliek, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Ezért (ld. 4.3.3.6. Tétel, 4.3.3.8. Lemma, 3.3.2.3. Tétel)

$$\hat{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \hat{I}(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} i \cdot 2^{-n} \cdot \hat{I}(\chi_{A_{in}}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} i \cdot 2^{-n} \cdot \int \chi_{A_{in}} \, d\nu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} i \cdot 2^{-n} \cdot \chi_{A_{in}} \right) d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu = \int f \, d\nu.$$

■

A fenti tétel alapján a Θ-ra nézve mérhető (nem-negatív) függvényekre, azaz az $L^+(\nu)$ függvényosztály elemeire alkalmazhatók a 3.3.2. pontban mondott tételek. Esetenként azonban a mérhetőségtől függetlenül is kaphatunk analóg állításokat, ha az $\int h \, d\nu$ integrál helyett az $\hat{I}$ funkcionál $\hat{I}(h)$ „eredményét" szerepeltetjük. Így pl. tetszőleges $h : X \to [0, +\infty]$ függvényre:

- $\hat{I}(h) = 0 \iff \hat{\nu}(\{h > 0\}) = 0$;
- $\hat{I}(h) < +\infty \implies \hat{\nu}(\{h = +\infty\}) = 0$;
- ha a $h_n : X \to [0, +\infty]$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozatra $\lim_{n\to\infty} \hat{I}(h_n) = 0$ teljesül, akkor egy alkalmas (n_k) indexsorozattal

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = 0 \qquad (\nu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ha ui. $\hat{I}(h) = 0$, akkor a nyilvánvaló

$$\chi_{\{h>0\}} \leq \lim_{n\to\infty}(nh)$$

egyenlőtlenség és a 4.3.3.5. Lemma, a 4.3.3.6. Tétel alapján

$$0 \leq \nu(\{h > 0\}) = \hat{I}(\chi_{\{h>0\}}) \leq \hat{I}(\lim_{n\to\infty}(nh)) = \lim_{n\to\infty}\hat{I}(nh) = \lim_{n\to\infty}(n\cdot \hat{I}(h)) = 0.$$

Innen már világos, hogy $\nu(\{h > 0\}) = 0$.

Fordítva, ha $\nu(\{h > 0\}) = 0$, akkor a $h \leq \lim_{n\to\infty}(n\cdot \chi_{\{h>0\}}))$ egyenlőtlenségből kiindulva az előbbiekkel analóg módon kapjuk az $\hat{I}(h) = 0$ egyenlőséget.

Most tegyük fel azt, hogy $\hat{I}(h) < +\infty$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\chi_{\{h=+\infty\}} \leq \varepsilon\cdot h,$$

következésképpen (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$0 \leq \hat{\nu}(\{h = +\infty\}) = \hat{I}(\chi_{\{h=+\infty\}}) \leq \varepsilon\cdot \hat{I}(h),$$

amiből (az $\varepsilon \to 0$ határátmenet után) a $\hat{\nu}(\{h = +\infty\}) = 0$ egyenlőség nyilvánvaló.

Végül, tekintsük a $\lim_{n\to\infty}\hat{I}(h_n) = 0$ feltételnek eleget tevő $h_n \in [0, +\infty]^X \quad (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozatot. Válasszuk a (nyilván létező) (n_k) indexsorozatot úgy, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\hat{I}(h_{n_k}) < +\infty$$

legyen. Ekkor a 4.3.3.6. Tételből könnyűszerrel adódik az, hogy

$$\hat{I}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{n_k}\right) < +\infty.$$

Így az előbb már belátottak szerint $\sum_{k=0}^{\infty} h_{n_k}(x) < +\infty \quad (\nu\text{-m.m. } x \in X)$ helyen fennáll, ezért minden ilyen x-re $\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = 0$.

A 4.3.3.9. Tételből speciálisan megkapjuk a Riesz-tételt, miszerint

4.3.3.10. Tétel (Riesz). *Legyen $X \neq \emptyset$, az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus tér, az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pedig pozitív lineáris funkcionál. Ekkor az előbbiekben definiált ν mértékkel*

$$I(f) = \int f\, d\nu \qquad (f \in \mathcal{K}(X)).$$

Valóban, ha $f \in \mathcal{K}(X)^+$, akkor $I(f) = \hat{I}(f)$ miatt az előző tételből adódik az állítás, innen pedig a „szokásos" $f = f^+ - f^-$ felbontásból minden $f \in \mathcal{K}(X)$ esetén is.

Ha a ν mérték véges, azaz $\nu(X) < +\infty$, akkor

$$|I(f)| \leq \int |f|\, d\nu \leq \nu(X) \cdot \|f\| \qquad (f \in \mathcal{K}(X)).$$

Más szóval, az I *korlátos lineáris funkcionál.* Nem nehéz meggondolni, hogy ebből a szempontból a ν végessége szükséges is ahhoz, hogy alkalmas $\alpha \geq 0$ konstanssal teljesüljön az

$$|I(f)| \leq \alpha \cdot \|f\| \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

korlátossági feltétel. Ha ui. ez az utóbbi becslés fennáll, akkor a ν értelmezése szerint (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\nu(X) = \hat{I}(\chi_X) = \tilde{I}(\chi_X) = \sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)^+,\, g \leq \chi_X\},$$

ahol az itt szereplő g függvényekkel

$$I(g) = |I(g)| \leq \alpha \cdot \|g\| \leq \alpha \cdot \|\chi_X\| = \alpha.$$

Tehát $\nu(X) \leq \alpha < +\infty$. Egyúttal az is kiderült, hogy $\nu(X) < +\infty$ esetén

$$\inf\{\alpha \geq 0 : |I(f)| \leq \alpha \cdot \|f\| \quad (f \in \mathcal{K}(X))\} =$$

$$\min\{\alpha \geq 0 : |I(f)| \leq \alpha \cdot \|f\| \quad (f \in \mathcal{K}(X))\} = \nu(X).$$

Speciálisan ez a helyzet akkor, ha a szóban forgó $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér kompakt.

Ha a 4.3.3.10. Tételt egybevetjük a 4.3.2.8. Tétellel, akkor azt látjuk, hogy a 4.3.3. pontban követett bizonyítási eljárásnak köszönhetően elhagyható lett a szóban forgó lokálisan kompakt topologikus tér végtelenben való megszámlálhatóságára vonatkozó feltétel. A 4.3.2.8. Tétellel szemben viszont itt nincs szó az I funkcionált az előbbi értelemben előállító ν mérték egyértelműségéről. Tegyük fel pl., hogy az X a megszámlálhatónál nagyobb számosságú végtelen halmaz, legyen $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$. Ekkor egy $A \subset X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha az A véges, következésképpen – lévén minden $f : X \to \mathbf{R}$ függvény „automatikusan" folytonos – egy $f : X \to \mathbf{R}$ függvényt illetően $f \in \mathcal{K}(X)$ azzal ekvivalens, hogy egy alkalmas véges $A \subset X$ halmazzal $f(x) = 0 \quad (x \in X \setminus A)$. Tekintsük az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$, $I \equiv 0$ pozitív lineáris funkcionált. Ha $\Omega := \mathcal{P}(X)$, akkor a $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$, $\mu \equiv 0$ mértékkel nyilván igaz, hogy $I(f) = \int f\, d\mu \quad (f \in \mathcal{K}(X))$. Legyen ugyanakkor

$$\eta(A) := \begin{cases} 0 & \text{(az } A \text{ legfeljebb megszámlálható)} \\ +\infty & \text{(különben)} \end{cases} \qquad (A \subset X).$$

Világos, hogy az η mérték. Ha $f \in \mathcal{K}(X)$, akkor a véges $A := \operatorname{supp} f$ halmazzal

$$f = \sum_{x \in A} f(x) \cdot \chi_{\{x\}},$$

ezért

$$\int f \, d\eta = \sum_{x \in A} f(x) \cdot \eta(\{x\}) = 0 = I(f).$$

Ugyanakkor $\mu \neq \eta$, hiszen az X-re vonatkozó feltétel miatt pl. $\eta(X) = +\infty \neq \mu(X) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy ha a 4.3.3.10. Tételben az ottani mérték egyértelműségét is szeretnénk biztosítani, akkor ezt csak bizonyos plusz feltételek mellet várhatjuk. Pl. igaz a

4.3.3.11. Tétel. *Tekintsük a 4.3.3.10. Tételben szereplő $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt topologikus teret. Legyenek az $\Omega_i \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebrák és a $\mu_i : \Omega_i \to [0, +\infty]$ $(i = 1, 2)$ mértékek olyanok, hogy $i = 1, 2$ mellett az alábbiak teljesülnek:*

1° $\mathcal{B}(X) \subset \Omega_i$;

2° $\mu_i(A) = \sup\{\mu_i(F) : F \subset X \text{ kompakt}, \ F \subset A\} \quad (A \in \mathcal{T})$;

3° $\mu_i(F) < +\infty \quad (F \subset X, \ F \text{ kompakt})$;

4° $\mu_i(A) = \inf\{\mu_i(T) : T \in \mathcal{T}, \ A \subset T\} \quad (A \in \Omega_i)$.

Tegyük fel továbbá, hogy

5°
$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2 \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+).$$

Ekkor $\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad (A \in \Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Bizonyítás. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy (ld. 1°) bármelyik $f \in \mathcal{K}(X)$ függvény Ω_i-mérhető, speciálisan $\mathcal{K}(X)^+ \subset L^+(\mu_i)$ $(i = 1, 2)$. Legyen először az $F \in \mathcal{B}(X)$ halmaz kompakt, amikor is (ld. 1°) $F \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$. Ekkor (ld. 3°) $\mu_1(F), \mu_2(F) < +\infty$, és 4° alapján egy alkalmas

$$U_n \in \mathcal{T}, \ F \subset U_n, \ \mu_1(U_n), \ \mu_2(U_n) < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazsorozattal

$$\mu_1(F) = \lim_{n \to \infty} \mu_1(U_n) = \lim_{n \to \infty} \mu_1(U_n) = \mu_2(F).$$

Az is feltehető, hogy

$$\mu_i(U_n \setminus F) < 2^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}, \ i = 1, 2).$$

A 4.1.3.2. Lemma szerint minden $n \in \mathbf{N}$ mellett van olyan $f_n \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy

$$\mathcal{R}_{f_n} \subset [0, 1], \ f_n(x) = 1 \ (x \in F), \ F \subset \operatorname{supp} f_n \subset U_n.$$

Ha

$$g_n := \min\{f_0, ..., f_n\} \ (\in \mathcal{K}(X)^+) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a (g_n) sorozat nyilván monoton fogyó. Az is igaz, hogy μ_i-m.m. $x \in X \quad (i = 1, 2)$ helyen

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_F(x).$$

Legyen ui. $x \in F$, ekkor $g_n(x) = 1 \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt a $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1 = \chi_F(x)$ egyenlőség triviálisan teljesül. Ha $x \in X \setminus F$ és $x \in U_k \setminus F$ legfeljebb véges sok $k \in \mathbf{N}$ indexre áll fenn, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ esetén $g_k(x) = 0 \quad (N \le k \in \mathbf{N})$, így $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 = \chi_F(x)$. Ezért a $(*)$ egyenlőség csak az

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (U_k \setminus F) =: A$$

pontokban lehet esetleg nem igaz, ahol

$$\mu_i(A) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu_i(U_k \setminus F) < \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\mu_i(A) = 0 \ (i = 1, 2)$.

A Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) és az 5° alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\mu_1(F) = \int \chi_F \, d\mu_1 = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu_2 =$$

$$\int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu_2 = \int \chi_F \, d\mu_2 = \mu_2(F).$$

Tehát $\mu_1(F) = \mu_2(F)$. Innen a mértékekre tett 2° feltétel miatt tetszőleges $T \in \mathcal{T}$ halmazra

$$\mu_1(T) = \sup\{\mu_1(F) : F \subset T, \, F \text{ kompakt}\} = \sup\{\mu_2(F) : F \subset T, \, F \text{ kompakt}\} = \mu_2(T)$$

következik, azaz $\mu_{1_{|\mathcal{T}}} = \mu_{2_{|\mathcal{T}}}$. Ez utóbbiból viszont a 4° „külső regularitás" szerint

$$\mu_1(A) = \inf\{\mu_1(T) : A \subset T \in \mathcal{T}\} =$$

$$\inf\{\mu_2(T) : A \subset T \in \mathcal{T}\} = \mu_2(A) \qquad (A \in \Omega_1 \cap \Omega_2)$$

adódik. ■

Az előzőekben megkonstruált $\nu : \Theta \to [0, +\infty]$ mértékkel kapcsolatban az alábbiakat jegyezzük meg. Készítsük el ui. (ld. 3.5.) az $L^p(\nu)$ tereket, amikor is a következőt mondhatjuk: a $\mathcal{K}(X)$ tér tetszőleges $1 \le p < +\infty$ esetén mindenütt sűrű az $L^p(\nu)$-ben. Más

szóval bármelyik $f \in L^p(\nu)$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in \mathcal{K}(X)$ (kompakt tartójú folytonos) függvény, hogy

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Valóban, az $L^p(\nu)$-k értelmezéséből tudjuk (ld. 3.6. xx) megjegyzés), hogy alkalmasan vett $h \in L_0(\nu) \cap L^p(\nu)$ (lépcsős)függvénnyel $\|f - h\|_p < \varepsilon/2$. Ha itt $h = \sum_{y \in \mathcal{R}_h} y \cdot \chi_{\{h=y\}}$, akkor

$$\|h\|_p^p = \sum_{y \in \mathcal{R}_h} |y|^p \cdot \nu(\{h = y\}) < +\infty$$

miatt $\nu(\{h = y\}) < +\infty$ $(0 \neq y \in \mathcal{R}_h)$. Megmutatjuk, hogy ha $\delta > 0$ és $0 \neq y \in \mathcal{R}_h$, akkor valamilyen $g_y \in \mathcal{K}(X)$ függvénnyel

$$\|\chi_{\{h=y\}} - g_y\|_p < \delta.$$

A ν regularitása (ld. 4.3.3.7. Tétel) miatt ui. létezik olyan $U_y \in \mathcal{T}$ és $F_y \subset X$ kompakt halmaz, hogy

$$F_y \subset \{h = y\} \subset U_y,$$

valamint $\nu(U_y \setminus F_y) < \delta^p$. A 4.1.3.2. Lemmát alkalmazva kapunk olyan $g_y \in \mathcal{K}(X)$ függvényt, hogy

$$\mathcal{R}_{g_y} \subset [0, 1],\ g_y(x) = 1\ \ (x \in F_y),\ g_y(x) = 0\ \ (x \in X \setminus U_y).$$

Világos, hogy

$$\|\chi_{\{h=y\}} - g_y\|_p \leq \nu(U_y \setminus F_y)^{1/p} < \delta.$$

Legyen most már

$$g := \sum_{0 \neq y \in \mathcal{R}_h} y \cdot g_y,$$

ekkor $g \in \mathcal{K}(X)$ és

$$\|h - g\|_p = \left\| \sum_{0 \neq y \in \mathcal{R}_h} |y| \cdot (\chi_{\{h=y\}} - g_y) \right\|_p \leq$$

$$\sum_{0 \neq y \in \mathcal{R}_h} |y| \cdot \|\chi_{\{h=y\}} - g_y\|_p \leq \delta \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_h} |y| =: q \cdot \delta$$

(ahol a q-t definiáló összeg véges sok tagú, így $0 \leq q \in \mathbf{R}$). Ha tehát a δ-t úgy választjuk, hogy $q \cdot \delta < \varepsilon/2$, akkor $\|h - g\|_p < \varepsilon/2$. Következésképpen

$$\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - g\|_p < \varepsilon.$$

A pozitív lineáris funkcionálokról mondottak befejezéséül röviden tárgyaljuk a 4.3.3.10. Tétel egy speciális esetét, a „klasszikus" Riesz-tételt. Legyen ehhez valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$,

$a < b$ esetén $X := [a, b]$, a $\mathcal{T}$ topológia pedig az $[a, b]$ intervallum „szokásos" topológiája. Ekkor $\mathcal{K}(X) = C[a, b]$. Tekintsük az

$$I : C[a, b] \to \mathbf{R}$$

pozitív lineáris funkcionált, valamint az I-ből a fentiek szerint „elkészített $\hat{I}$ kiterjesztést, és vezessük be az alábbi függvényt:

$$g(x) := \begin{cases} \hat{I}(\chi_{[a,x)}) & (a \leq x < b) \\ \hat{I}(\chi_{[a,b]}) & (x = b). \end{cases}$$

A 4.3.3.9. Tétel jelöléseivel az $[a, b]$ intervallum, és minden $x \in [a, b)$ esetén az $[a, x)$ intervallum (Borel-halmaz lévén) Θ-mérhető, így a $\chi_{[a,b]}$, $\chi_{[a,x)}$ karakterisztikus függvényekre is ugyanez mondható. Következésképpen a most említett tétel szerint

$$g(x) := \begin{cases} \int \chi_{[a,x)}\, d\nu = \nu([a, x)) & (a \leq x < b) \\ \int \chi_{[a,b]}\, d\nu = \nu([a, b]) & (x = b). \end{cases}$$

Világos, hogy a g függény monoton növő, és $\chi_{[a,b]} \in C[a, b]$ miatt (ld. 4.3.3.2. Lemma, 4.3.3.5. Lemma)

$$g(b) = I(\chi_{[a,b]}) < +\infty.$$

Ha $a \leq u < v < b$, akkor (ld. még 4.3.3.8. Lemma)

$$\nu([u, v)) = \nu([a, v)) - \nu([a, u)) = g(v) - g(u),$$

és analóg módon

$$\nu([u, b]) = \nu([a, b]) - \nu([a, u)) = g(b) - g(u).$$

Vegyük az $[a, b]$ intervallumnak egy

$$\tau := \{x_0, ..., x_n\}$$

felosztását (ahol $0 < n \in \mathbf{N}$, és $x_0 := a < x_1 < \ldots < x_n := b$). Legyenek továbbá (tetszőlegesen) adottak a $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, ..., n-1)$ pontok, és a $\xi_\tau := (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ jelöléssel egy $f \in C[a, b]$ esetén definiáljuk az F_{τ,ξ_τ} függvényt a következőképpen:

$$F_{\tau,\xi_\tau} := \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i) \cdot \chi_{[x_i,x_{i+1})} + f(\xi_{n-1}) \cdot \chi_{[x_{n-1},x_n]}.$$

Az f függvény egyenletes folytonossága miatt nyilvánvaló, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy a fenti ξ_i-k tetszőleges megválasztása mellett

$$|f(x) - F_{\tau,\xi_\tau}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a, b]),$$

hacsak

$$\delta_\tau = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, ..., n-1\} < \delta.$$

(Mindezt (ld. 1.5. ix) megjegyzés) röviden így jelöljük: $\lim_{\delta_\tau \to 0} F_{\tau,\xi_\tau} = f$). Az is világos, hogy

$$|F_{\tau,\xi_\tau}(x)| \leq |f(x)| \qquad (x \in [a,b]),$$

továbbá (ld. 1.5. ix) megjegyzés)

$$\int F_{\tau,\xi_\tau}\, d\nu = \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i)\cdot \nu([x_i, x_{i+1})) + f(\xi_{n-1})\cdot \nu([x_{n-1}, x_n]) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)$$

(az f függvénynek a g-re vonatkozó Riemann-Stieltjes-integrál-közelítő összege). Ezért alkalmazható a 3.5.6. (Lebesgue-)Tétel, miszerint (ld. 1.5. xiv) megjegyzés)

$$\int f\, d\nu = \lim_{\delta_\tau \to 0} \int F_{\tau,\xi_\tau}\, d\nu = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \int_a^b f\, dg$$

(az f függvénynek a g-re vonatkozó Riemann-Stieltjes-integrálja.) Továbbá (ld. 1.5. xv) megjegyzés)

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f\, dg \right| \leq (g(b) - g(a))\cdot \|f\|.$$

Ha már most egy tetszőleges monton növő $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényből indulunk ki, akkor az

$$I_g(f) := \int_a^b f\, dg \qquad (f \in C[a,b])$$

egyenlőséggel definiált (nyilván lineáris)

$$I_g : C[a,b] \to \mathbf{R}$$

funkcionálra is

$$|I_g(f)| \leq (g(b) - g(a))\cdot \|f\| \qquad (f \in C[a,b]).$$

Más szóval az I_g korlátos lineáris funkcionál. Világos, hogy az I_g pozitív is, ui. bármelyik $\tau \subset [a,b]$ felosztásra, ξ_τ vektorra és $0 \leq f \in C[a,b]$ függvényre (a definícióból következően) $S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) \geq 0$, így $\int_a^b f\, dg \geq 0$.

Ugyanakkor (ld. 4.4. xxv) megjegyzés) akármilyen korlátos lineáris

$$I : C[a,b] \to \mathbf{R}$$

funkcionál előállítható $I = J - L$ alakban, ahol a

$$J, L : C[a,b] \to \mathbf{R}$$

funkcionálok mindegyike pozitív lineáris funkcionál. Ezért alkalmas

$$g_1,\ g_2 : [a,b] \to [0,+\infty)$$

monoton növő függvényekkel $J = I_{g_1}$ és $L = I_{g_2}$. Ha tehát $h := g_1 - g_2$, akkor $I = I_h$, ahol (ld. 1.5. xvi) megjegyés) a h függvény korlátos változású. Fordítva, a Jordan-tételre (ld. 1.5. xvi) megjegyzés) tekintettel a fenti I_g funkcionálok mintájára tetszőleges $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos változású függvény „generál" egy

$$I_h : C[a,b] \to \mathbf{R}$$

korlátos lineáris funkcionált az

$$I_h(f) := \int_a^b f\, dh \qquad (f \in C[a,b])$$

módon, ahol (ld. 1.5. xviii) megjegyzés) a h függvény $V(h)$ teljes változásával

$$|I_h(f)| \le V(h) \cdot \|f\| \qquad (f \in C[a,b]).$$

Összefoglalva az eddigieket tehát azt mondhatjuk, hogy az $I : C[a,b] \to \mathbf{R}$ funkcionál akkor és csak akkor korlátos lineáris funkcionál, ha valamilyen korlátos változású

$$h : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvénnyel $I = I_h$.

Tegyük fel, hogy az $I : C[a,b] \to \mathbf{R}$ korlátos lineáris funkcionált két korlátos változású $h_1,\ h_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény is „előállítja": $I = I_{h_1} = I_{h_2}$. Ha $h := h_1 - h_2$, akkor egyrészt a h függvény is nyilván korlátos változású, másrészt

$$\int_a^b f\, dh = I_{h_1}(f) - I_{h_2}(f) = 0 \qquad (f \in C[a,b]).$$

Legyen a $c \in (a,b)$ olyan hely, ahol a h folytonos, és tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (a \le x \le c) \\ 1 - n(x-c) & (c < x \le c + 1/n) \\ 0 & (c + 1/n < x \le b) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor minden $0 < n \in \mathbf{N}$ indexszel $f_n \in C[a,b]$, és (ld. 1.5. xii) megjegyzés)

$$0 = \int_a^b f_n\,dh = \int_a^c f_n\,dh + \int_c^{c+1/n} f_n\,dh + \int_{c+1/n}^b f_n\,dh.$$

Mivel

$$\int_a^c f_n\,dh = h(c) - h(a),\ \int_{c+1/n}^b f_n\,dh = 0,$$

és a h teljes változás függvényének a folytonossága (ld. 1.5. xvii) megjegyzés) miatt

$$\left|\int_c^{c+1/n} f_n\,dh\right| \le T_h(c+1/n) - T(c) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért szükségszerűen $h(c) = h(a)$. Ugyanakkor az $f \equiv 1 \in C[a,b]$ függvénnyel

$$0 = \int_a^b f\,dh = h(b) - h(a),$$

azaz (az előbbiekkel együtt)

$$(*) \qquad h(a) = h(b) = h(c).$$

Lássuk be, hogy a most mondottak „megfordítása" is igaz, más szóval a $(*)$ feltétel elégséges is ahhoz, hogy $\int_a^b f\,dh = 0$ teljesüljön minden $f \in C[a,b]$ függvényre. Legyen ehhez

$$\mathcal{D} := \{x \in [a,b] : h \in C\{x\}\}.$$

Tudjuk (lévén a h két monoton növő függvény különbsége), hogy az $[a,b] \setminus \mathcal{D}$ halmaz legfeljebb megszámlálható, így a $\mathcal{D}$ mindenütt sűrű az $[a,b]$ intervallumban. Ezért megválaszthatjuk a $\tau_n \subset [a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ felosztásokat úgy, hogy $\tau_n \setminus \{a,b\} \subset \mathcal{D}$ $(n \in \mathbf{N})$, és $\lim_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$. Következésképpen tetszőleges $f \in C[a,b]$, és (ld. 1.5. ix) megjegyzés) ξ_{τ_n} $(n \in \mathbf{N})$ mellett a $(*)$ feltétel miatt $S_{\tau_n,\xi_{\tau_n}}(f,h) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, így

$$\int_a^b f\,dh = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n,\xi_{\tau_n}}(f,h) = 0.$$

Tegyük fel pl., hogy a $h_i : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(i = 1,2)$ korlátos változású függvényekre a következők teljesülnek:

a) $h_i(a) = 0$ és $h_i(x) = \dfrac{h_i(x+0) + h_i(x-0)}{2}$ $(a < x < b,\ i = 1,2)$;

b) $\displaystyle\int_a^b f\,dh_1 = \int_a^b f\,dh_2$ $(f \in C[a,b])$.

Ekkor $h_1 = h_2$.

A $h := h_1 - h_2$ függvénnyel ui. $h(a) = 0$ és

$$h(x) = \frac{h(x+0) + h(x-0)}{2} \qquad (a < x < b)$$

is igaz. Továbbá a fenti $\mathcal{D}$ halmazzal

$$0 = h(a) = h(b) = h(c) \qquad (c \in \mathcal{D}).$$

A $\mathcal{D}$ halmaz mindenütt sűrű az $[a, b]$-ben, ezért bármilyen $x \in (a, b)$ esetén megválaszthatók a c_n, $\tilde{c}_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatok úgy, hogy $\tilde{c}_n < x < c_n$ $(n \in \mathbf{N})$ és

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x.$$

Így

$$h(x-0) = \lim_{n\to\infty} h(\tilde{c}_n),\ h(x+0) = \lim_{n\to\infty} h(c_n),$$

amiből $h(\tilde{c}_n) = h(c_n) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ figyelembevételével $h(x \pm 0) = 0$. Tehát

$$h(x) = \frac{h(x+0) + h(x-0)}{2} = 0 \qquad (a < x < b)$$

adódik. Mindez a $h(a) = h(b) = 0$ egyenlőségekkel együtt azt jelenti, hogy $h \equiv 0$, azaz $h_1 = h_2$.

Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $I : C[a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik olyan $h : [a, b] \to$ korlátos változású függvény, amire $I(f) = \int_a^b f\, dh$ $(f \in C[a, b])$, és a h-ra a fenti a), b) tulajdonságok teljesülnek (következésképpen egyetlen ilyen, az I-t előállító h létezik). Ha ui. a $\tilde{h} : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos változású függvény az előbbi értelemben előállítja az I-t, akkor egyrészt feltehető, hogy $\tilde{h}(a) = 0$ (ti. a $\tilde{h}$ mellett nyilván a $\tilde{h} - \tilde{h}(a)$ függvény is előállítja az I-t). Másrészt legyen

$$h(a) := 0,\ h(b) := \tilde{h}(b),\ h(x) := \frac{\tilde{h}(x+0) + \tilde{h}(x-0)}{2} \qquad (a < x < b).$$

Ekkor $h(x) = \tilde{h}(x)$ $(x = a,$ vagy $x = b,$ vagy $a < x < b$ és $\tilde{h} \in \mathcal{C}\{x\})$. Azt sem nehéz belátni, hogy a h is korlátos változású. Ehhez nyilván feltehető, hogy a $\tilde{h}$ monoton növő (különben bontsuk fel a $\tilde{h}$-ot két monoton növő függvény különbségére.). Így viszont a h is monoton növő. Továbbá

$$h(x-0) = \tilde{h}(x-0),\ h(x+0) = \tilde{h}(x+0) \qquad (a < x < b),$$

tehát a fentiek szerint $I(f) = \int_a^b f\, dh$ $(f \in C[a, b])$.

Haar-integrál, Haar-mérték

A továbbiakban a Haar-mértéket illetően adunk egy eligazító összefoglalást. Legyen ehhez az $(X, \mathcal{T})$ egy topologikus tér, ahol $X \neq \emptyset$, és tegyük fel, hogy az X halmaz a

$$\wp : X \times X \to X$$

műveletre nézve csoport. Az utóbbi neutrális elemét e-vel, az $x \in X$ elem esetén az $xy = yx = e$ egyenlőségnek eleget tevő (egyértelműen létező) y elemet x^{-1}-gyel, a $\wp$ csoportművelet „eredményét" valamilyen $(x, y) \in X \times X$ esetén $\wp(x, y) =: xy$-nal fogjuk jelölni. (A továbbiakban mind elnevezésbeli, mind jelöléstechnikai szempontból a multiplikatív terminológiát követjük: xy az x és az y „szorzata", x^{-1} az x „inverze", e a csoport „egységeleme".) Azt mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ hármas *topologikus csoport,* ha

a) az $\wp$ függvény (a $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ szorzat-topológia (ld. 4.2. xxiii) megjegyzés) értelmében) folytonos;

b) az $X \ni x \mapsto x^{-1} \in X$ leképezés szintén folytonos.

Ez tehát azt jelenti, hogy minden $x, y \in X$ mellett az xy és az x^{-1} elem tetszőleges V_{xy} és $V_{x^{-1}} \in \mathcal{T}$ környezetéhez megadhatók az x, y olyan U_x, W_x, $V_y \in \mathcal{T}$ környezetei, hogy

$$tz \in V_{xy} \quad (t \in U_x, z \in V_y), \quad s^{-1} \in V_{x^{-1}} \quad (s \in W_x).$$

Röviden szólva

$$U_x V_y \subset V_{xy}, \quad W_x^{-1} \subset V_{x^{-1}},$$

ahol általában az $\emptyset \neq A, B \subset X$ halmazokra

$$AB := \{ab \in X : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} := \{a^{-1} \in X : a \in A\}.$$

A most mondott értelmezésből nyilvánvaló, hogy az

$$X \ni x \mapsto x^{-1} \in X$$

leképezés, valamint bármilyen (rögzített) $z \in X$ elemmel az

$$X \ni x \mapsto zx \in X, \quad X \ni x \mapsto xz \in X$$

leképezések az X önmagára való homeomorfizmusai. Innen az is rögtön következik, hogy ha $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$, akkor $A^{-1} \in \mathcal{T}$ és

$$zA := \{z\}A = \{za \in X : a \in A\} \in \mathcal{T}, \; Az := A\{z\} = \{az \in X : a \in A\} \in \mathcal{T}.$$

Az is világos, hogy ha az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz kompakt, akkor az A^{-1} is az.

A 4.2. i) megjegyzésre utalva belátjuk, hogy igaz a

4.3.3.12. Lemma. *Az eddigi jelöléseket megtartva tegyük fel, hogy az $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ halmazrendszer környezetbázisa az e egységelemnek. Ekkor a*

$$\mathcal{B} := \{xU \in \mathcal{P}(X) : x \in X, U \in \mathcal{U}\},$$

$$\mathcal{B}_* := \{Ux \in \mathcal{P}(X) : x \in X, U \in \mathcal{U}\}$$

halmazrendszerek egyaránt topologikus bázist alkotnak.

Bizonyítás. Legyen ui. $\emptyset \neq T \in \mathcal{T}$ és $a \in T$. Ekkor $e \in a^{-1}T \in \mathcal{T}$. Ezért (ld. 4.2. i) megjegyzés) van olyan $U \in \mathcal{U}$ halmaz, hogy $e \in U \subset a^{-1}T$, és így

$$a = ae \in aU \subset a(a^{-1}T) = (aa^{-1})T = eT = T.$$

Nyilvánvaló tehát, hogy $T = \bigcup_{a \in T}(aU)$, ahol $aU \in \mathcal{B}$ $(a \in T)$. Tehát (ld. 4.1.) a $\mathcal{B}$ topologikus bázis (és analóg módon a $\mathcal{B}_*$ is az). ■

4.3.3.13. Lemma. *A fenti tetszőleges $(X, \mathcal{T}, \wp)$ topologikus csoport esetén minden nyílt (kompakt) $\emptyset \neq A, B \subset X$ halmazra AB nyílt (kompakt).*

Bizonyítás. Ha $\emptyset \neq A, B \in \mathcal{T}$, akkor

$$AB = \{ab \in X : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B}(Ab),$$

ahol valamennyi Ab $(b \in B)$ halmaz nyílt. Következésképpen $AB \in \mathcal{T}$. Ha A is és B is kompakt, akkor a Tyihonov-tétel (ld. 4.2. xxiv) megjegyzés) szerint az $A \times B$ halmaz kompakt a $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ szorzat-topológia értelmében. Ugyanakkor $AB = \wp[A \times B]$, más szóval az AB szorzat egy kompakt halmaznak $(A \times B)$ egy folytonos függvény $(\wp)$ által létesített képe. Ezért (ld. 4.2. xxii) megjegyzés) az AB (képhalmaz) is kompakt. ■

A következő lemma előtt az alábbiakat jegyezzük meg. Ha a fenti $(X, \mathcal{T}, \wp)$ topologikus csoport esetén az $A \in \mathcal{T}$ halmaz az e egységelemnek egy tetszőleges környezete, azaz $e \in A$, akkor akkor létezik olyan $B \in \mathcal{T}$, $e \in B$ (tehát olyan környezete az e-nek), amelyikre

$$B^2 := BB \subset A.$$

Ui. a $\wp$ „szorzásfüggvénynek" a szorzat-topológia szerinti folytonossága alapján a

$$\varphi(x) := x^2 := xx \qquad (x \in X)$$

függvény is nyilván folytonos (a $\mathcal{T}$ topológia értelmében). Ezért, és a $\varphi(e) = e$ egyenlőség miatt a fenti A-hoz van olyan $B \in \mathcal{T}$, $e \in B$, hogy $\varphi(x) \in A$ $(x \in B)$. Röviden: $B^2 \subset A$.

4.3.3.14. Lemma. *Tekintsük az előbbi topologikus csoportot, és legyen* $f \in \mathcal{K}(X)$. *Ekkor tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számhoz van az* e *egységelemnek olyan* $U \in \mathcal{T}$ *környezete, hogy az alábbiak teljesülnek*:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (x, y \in X,\ x^{-1}y \in U).$$

Bizonyítás. Az f folytonossága miatt (ld. 4.1.) minden $a \in X$ elemhez létezik olyan $U_a \in \mathcal{T}$, $a \in U_a$ környezet, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (x, y \in U_a).$$

Legyen $V_a := a^{-1}U_a$, ekkor $V_a \in \mathcal{T}$ és $e \in V_a$. Jelöljünk W_a-val egy olyan halmazt, amire

$$W_a \in \mathcal{T},\ e \in W_a,\ W_a^2 \subset V_a.$$

Nyilvánvaló, hogy $a \in aW$ $(a \in X)$ miatt

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{a \in X} (aW_a),$$

ahol $aW_a \in \mathcal{T}$ $(a \in X)$. Így a $\operatorname{supp} f$ halmaz kompaktságára tekintettel egy alkalmas $A \subset X$ véges halmazzal is

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{a \in A} (aW_a).$$

Ekkor

$$U := \bigcap_{a \in A} W_a \in \mathcal{T},\ e \in U,$$

és ha az $x, y \in X$ elemekre $x^{-1}y \in U$ igaz, akkor $y \in xU$. Világos, hogy $x \in xU$. Itt feltehető, hogy $U^{-1} = U$, hiszen különben vegyük a továbbiakban az $U \cap U^{-1}$ halmazt.

1° eset: $x \in \operatorname{supp} f$. A fentiek alapján egy alkalmas $a \in A$ elemmel $x \in aW_a$. Mivel $U \subset W_a$, ezért

$$xU \subset xW_a \subset (aW_a)W_a = aW_a^2 \subset aV_a = U_a.$$

Ez azt jelenti, hogy $x, y \in U_a$, amiből az U_a értelmezését figyelembe véve $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ következik.

2° eset: $y \in \operatorname{supp} f$, ekkor

$$\left(x^{-1}y\right)^{-1} = y^{-1}x \in U^{-1} = U,$$

így (az x és az y felcserélésével) alkalmazható az 1° eset.

3° eset: $x, y \notin \operatorname{supp} f$, amikor is $f(x) = f(y) = 0$, ezért az $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ egyenlőtlenség „automatikusan" teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ugyanígy látható be az előbbi lemma következő „változata": a 4.3.3.14. Lemmabeli szereplőkkel

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (x, y \in X,\ yx^{-1} \in U).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény *jobbról egyenletesen folytonos.* Analóg módon, ha az f-re a 4.3.3.14. Lemma állítása igaz, akkor az f *balról egyenletesen folytonos.* (Ugyanezeket az elnevezéseket használjuk akkor is, ha nem egy $f \in \mathcal{K}(X)$ függvényről, hanem valamilyen $f : X \to Y$ leképezésről van szó, ahol az Y pl. egy $(Y, \|.\|)$ normált tér „alaphalmaza", és az $|f(x) - f(y)|$ helyett értelemszerűen az $\|f(x) - f(y)\|$ normát tekintjük.)

A szóban forgó $(X, \mathcal{T}, \wp)$ topologikus csoportot akkor nevezzük *kompaktnak* (*lokálisan kompaktnak*), ha az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér kompakt (lokálisan kompakt) (ld. 4.1.3.). Emlékeztetünk arra, hogy a lokálisan kompakt terek definíciójában eleve feltételeztük, hogy a szóban forgó topologikus tér T_2-tér (ld. 4.1.). Megmutatható, hogy ha az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ topologikus csoport lokálisan kompakt, akkor *normális* is, azaz az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér normális tér (ld. 4.1.).

Egy adott $f : X \to \mathbf{R}$ függvény és $a \in X$ esetén legyen

$${}_af(x) := f(ax),\ f_a(x) := f(xa) \qquad (x \in X)$$

az f függvény (a-val való) *bal oldali,* ill. *jobb oldali eltoltja.* Világos, hogy ha az illető csoport kommutatív, azaz $xy = yx$ $(x, y \in X)$, akkor ${}_af = f_a$.

4.3.3.15. Tétel (Haar Alfréd). *Legyen az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ tetszőleges lokálisan kompakt topologikus csoport. Ekkor létezik olyan $I : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionál, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1° $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+ \implies I(f) > 0$;

2° $f, g \in \mathcal{K}(X)^+ \implies I(f + g) = I(f) + I(g)$;

3° $0 \le \alpha \in \mathbf{R},\ f \in \mathcal{K}(X)^+ \implies I(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot I(f)$;

4° $f \in \mathcal{K}(X)^+,\ a \in X \implies I({}_af) = I(f)$.

Ha egy $J : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionálra is teljesülnek a fenti $1^o \to 4^o$ állítások, akkor van olyan $\lambda > 0$ szám, hogy $J = \lambda \cdot I$.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása több „fejezetből" áll, ezeket római számokkal fogjuk sorszámozni.

I. *Legyen* $f, \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$, *ahol* $\varphi \not\equiv 0$. *Mutassuk meg, hogy alkalmas* $m \in \mathbf{N}$ *indexszel és* $s_1, ..., s_m \in X$ *elemekkel, valamint* $c_1, ..., c_m$ *pozitív számokkal*

$$(*) \qquad f(x) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \varphi(s_j x) \qquad (x \in X).$$

Valóban, ha az $a \in X$ olyan, hogy $\varphi(a) > 0$, akkor válasszuk a $\gamma > 0$ számot és az e egységelem $U \in \mathcal{T}$ környezetét úgy, hogy

$$\varphi(a) \geq \gamma \qquad (x \in aU).$$

(Mivel $a \in aU$ és $\varphi \in \mathcal{C}\{a\}$, ezért ilyen U minden $0 < \gamma < \varphi(a)$ szám esetén létezik.) Nyilvánvaló, hogy $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{y \in X}(yU)$, ezért a $\operatorname{supp} f$ kompaktsága miatt véges sok $y_1, ..., y_k \in X$ elemmel is (valamilyen $k \in \mathbf{N}$ indexszel)

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^{k} (y_k U).$$

Mutassuk meg, hogy ha $\alpha := \|f\| := \|f\|_\infty$, akkor

$$f(x) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi(a y_j^{-1} x) \qquad (x \in X).$$

Ez ui. $x \notin \operatorname{supp} f$ esetén $f(x) = 0$ alapján triviális, ha pedig $x \in \operatorname{supp} f$, akkor egy $l = 1, ..., k$ mellett $x \in y_l U$, ezért $a y_l^{-1} x \in aU$. Így $\varphi(a y_l^{-1} x) \geq \gamma$, tehát

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi(a y_j^{-1} x) \geq \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi(a y_l^{-1} x) \geq \alpha \geq f(x) \qquad (x \in X).$$

Mindez azt jelenti, hogy (pl.) az

$$m := k, \ c_j := \frac{\alpha}{\gamma}, \ s_j := a y_j^{-1} \ \ (j = 1, ..., k)$$

választással fennáll a $(*)$ becslés.

Legyen most már

$$f \div \varphi := \inf \sum_{j=1}^{m} c_j,$$

ahol az infimum a $(*)$-beli c_j-kre és m-ekre vonatkozik. Az előbbi $c_j := \alpha/\gamma$ $(j = 1, ..., k)$ választásból az is kiderül, hogy

$$f \div \varphi \leq \frac{k \cdot \alpha}{\gamma}.$$

Világos továbbá, hogy ha a $(*)$ igaz, akkor

$$\|f\| \le \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \|\varphi\|,$$

ezért

$$\frac{\|f\|}{\|\varphi\|} \le f \div \varphi \le \frac{k \cdot \|f\|}{\gamma}.$$

Lássuk be, hogy a fenti $f, \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényekkel

a) ${}_a f \div \varphi = f \div ({}_a\varphi) = f \div \varphi \quad ((a \in X);$

b) $(\alpha \cdot f) \div \varphi = \alpha \cdot (f \div \varphi) \quad (0 \le \alpha \in \mathbf{R});$

c) $(f + g) \div \varphi \le (f \div \varphi) + (g \div \varphi) \quad (g \in \mathcal{K}(X)_+);$

d) $f \div \psi \le (f \div \varphi) \cdot (\varphi \div \psi) \quad (0 \not\equiv \psi \in \mathcal{K}(X)^+).$

Ezek közül az a), b), c) állítások meglehetősen egyszerűek, ezért kezdjük mindjárt a d)-vel: ha a $(*)$ igaz és

$$\varphi(y) \le \sum_{l=1}^{n} d_l \cdot \psi(t_l y) \qquad (y \in X)$$

alkalmas $n \in \mathbf{N}$, $0 < d_1, ..., d_n \in \mathbf{R}$, $t_1, ..., t_n \in X$ paraméterekkel, akkor

$$f(x) \le \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \sum_{l=1}^{n} d_l \cdot \psi(t_l s_j x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} c_j d_l \cdot \psi(t_l s_j x) \qquad (x \in X).$$

Innen már világos, hogy

$$f \div \psi \le \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\Big) \cdot \Big(\sum_{l=1}^{n} d_l\Big),$$

ezért egyúttal a $\sum_{j=1}^{m} c_j$-kre és a $\sum_{l=1}^{n} d_l$-ekre vett infimumokkal is

$$f \div \psi \le (f \div \varphi) \cdot (\varphi \div \psi).$$

Rögzítsük (a továbbiakban is) a $0 \not\equiv f_0 \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényt. Ekkor nyilván $f_0 \div \varphi > 0$, legyen az eddigi f, φ függvényekkel

$$I_\varphi(f) := \frac{f \div \varphi}{f_0 \div \varphi}.$$

Az $f \equiv 0$ esetben $f \div \varphi = 0$ miatt $I_\varphi(f) = 0$. Ha viszont $f \not\equiv 0$, akkor a fenti d) becslés alapján

$$\frac{1}{f_0 \div f} \le I_\varphi(f) \le f \div f_0.$$

Továbbá az a), b), c) tulajdonságokra tekintettel

A) $I_\varphi({}_a f) = I_\varphi(f) \quad (a \in X)$;

B) $I_\varphi(\alpha\cdot f) = \alpha\cdot I_\varphi(f) \quad (0 \le \alpha \in \mathbf{R})$;

C) $I_\varphi(f+g) \le I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \quad (g \in \mathcal{K}(X)^+)$;

D) $I_\varphi(f) \le I_\varphi(g) \quad (f \le g \in \mathcal{K}(X)^+)$.

II. *Legyen* $n \in \mathbf{N}$, *és tekintsük az* $0 \not\equiv f_1, ..., f_n \in \mathcal{K}(X)^+$ *függvényeket. Belátjuk, hogy bármilyen* $0 < \delta, \Delta \in \mathbf{R}$ *számokhoz van az* e *egységelemnek olyan* $U \in \mathcal{T}$ *környezete, amivel*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\cdot I_\varphi(f_j) \le I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\cdot f_j\Big) + \delta,$$

hacsak $0 \le \lambda_j \le \Delta \quad (j = 1, ..., n)$ *és a* $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$ *függvényre* $\varphi(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$.

Vegyük ehhez az

$$E := \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{supp} f_j$$

(kompakt) halmazt, és legyen a $V \in \mathcal{T}$ egy olyan környezete az e egységelemnek, aminek a $\overline{V}$ lezártja kompakt. A 4.1.3.2. Lemma szerint – lévén az $E\overline{V}$ halmaz kompakt (ld. 4.3.3.13. Lemma) – létezik olyan $g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy $\mathcal{R}_g \subset [0,1]$ és $g(x) = 1 \quad (x \in E\overline{V})$. Legyen továbbá

$$M := \Delta\cdot n\cdot \max\{\|f_1\|, ..., \|f_n\|\}$$

és $0 < \varepsilon < M$. A 4.3.3.14. Lemma alapján a $g, f_1, ..., f_n$ függvények valamennyien balról egyenletesen folytonosak, ezért az e-nek egy alkalmas $U \in \mathcal{T}$ környezetével $U^{-1} = U \subset V$, és

$$|f_j(s) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon^3}{4Mn\cdot\Delta} \qquad (s, x \in X,\ s^{-1}x \in U,\ j = 1, ..., n),$$

valamint

$$|g(s) - g(x)| < \frac{\varepsilon^2}{4M} \qquad (s, x \in X,\ s^{-1}x \in U).$$

Tekintsük a $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényt, amire $\varphi(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$, és válasszuk a $0 \le \lambda_j \le \Delta \quad (j = 1, ..., n)$ számokat. A

$$\Phi := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\cdot f_j + \varepsilon\cdot g$$

függvény segítségével definiáljuk a

$$h_j(x) := \begin{cases} \dfrac{\lambda_j\cdot f_j(x)}{\Phi(x)} & (x \in E) \\ 0 & (x \in X \setminus E) \end{cases} \qquad (j = 1, ..., n)$$

függvényeket. (Emlékeztetünk arra, hogy $e \in V$, ezért $E \subset E\overline{V}$ és $x \in E$ esetén azt mondhatjuk, hogy $\Phi(x) \geq \varepsilon \cdot g(x) = \varepsilon > 0$.) Ekkor $\Phi \in \mathcal{K}(X)^+$, $\sum_{j=1}^n h_j \leq 1$, valamint $h_j \cdot \Phi = \lambda_j \cdot f_j \quad (j = 1, ..., n)$, Ha $s, x \in X$ és $s^{-1}x \in U$, akkor a fentiek szerint

$$|\Phi(s) - \Phi(x)| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot |f_j(s) - f_j(x)| + \varepsilon \cdot |g(s) - g(x)| <$$

$$n \cdot \Delta \cdot \frac{\varepsilon^3}{4Mn \cdot \Delta} + \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2}{4Mn} = \frac{\varepsilon^3}{2M}.$$

Továbbá

$$\|\Phi\| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \|f_j\| + \varepsilon \leq n \cdot \Delta \cdot \max\{\|f_1\|, ..., \|f_n\|\} + \varepsilon = M + \varepsilon < 2M.$$

Mindezeket figyelembe véve bebizonyítjuk, hogy

$$|h_j(s) - h_j(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (s, x \in X,\ s^{-1}x \in U,\ j = 1, ..., n).$$

Valóban, ha $x, s \in E\overline{V}$ is igaz, akkor az előbbi becslések alapján

$$|h_j(s) - h_j(x)| = \left|\frac{\lambda_j \cdot f_j(s)}{\Phi(s)} - \frac{\lambda_j \cdot f_j(x)}{\Phi(x)}\right| = \left|\frac{\lambda_j \cdot f_j(s) \cdot \Phi(x) - \lambda_j \cdot f_j(x) \cdot \Phi(s)}{\Phi(s) \cdot \Phi(x)}\right| \leq$$

$$\frac{\Delta}{\varepsilon^2} \cdot \Big(\big|f_j(s) \cdot \Phi(x) - f_j(s) \cdot \Phi(s)\big| + \Big(\big|f_j(s) \cdot \Phi(s) - f_j(x) \cdot \Phi(s)\big|\Big) <$$

$$\frac{\Delta}{\varepsilon^2} \cdot \left(\|f_j\| \cdot \frac{\varepsilon^3}{2M} + \|\Phi\| \cdot \frac{\varepsilon^3}{4Mn \cdot \Delta}\right) < \frac{\Delta}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{M}{\Delta \cdot n} \cdot \frac{\varepsilon^3}{2M} + \frac{2M \cdot \varepsilon^3}{4Mn \cdot \Delta}\right) = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ha $x \notin E\overline{V}$, akkor egyrészt $x \notin E$, hiszen különben $e \in \overline{V}$ miatt $x = xe \in E\overline{V}$ lenne. Másrészt $s \notin E$, ellenkező esetben ui. $x = ss^{-1}x \in EU \subset E\overline{V}$ alapján $x \in E\overline{V}$ teljesülne. Hasonlóan kapjuk, hogy $s \notin E\overline{V}$ esetén is $x, s \notin E$. Ezért (hacsak $x \notin E\overline{V}$ vagy $s \notin E\overline{V}$) $x, s \notin E$, és így

$$|h_j(s) - h_j(x)| = |0 - 0| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Tegyük most fel azt, hogy

$$\Phi(x) \leq \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi(s_j x) \qquad (x \in X)$$

valamilyen $n \in \mathbf{N}$, $0 < c_1, ..., c_n$ számokkal és $s_1, ..., s_n \in X$ elemekkel. Mivel $\varphi(t) = 0$ $(t \in X \setminus U)$, ezért azt is írhatjuk, hogy

$$\Phi(x) \leq \sum_{j=1,\, x \in s_j^{-1}U}^n c_j \cdot \varphi(s_j x).$$

A $|h_j(s) - h_j(x)|$-ekre vonatkozó előbbi becslést alkalmazva tehát

$$\Phi(x)\cdot h_l(x) \le \sum_{j=1,\, x\in s_j^{-1}U}^{n} c_j\cdot \varphi(s_j x)\cdot \Big(h_l(s_j^{-1}) + \varepsilon/n\Big) \qquad (x\in X,\ l=1,...,n).$$

Innen az következik, hogy

$$\lambda_l\cdot f_l(x) = \Phi(x)\cdot h_l(x) \le \sum_{j=1}^{n} c_j\cdot \Big(h_l(s_j^{-1}) + \varepsilon/n\Big)\cdot \varphi(s_j x) \qquad (x\in X,\ l=1,...,n).$$

Ebből a becslésből viszont azt kapjuk, hogy

$$(\lambda_l\cdot f_l) \div \varphi \le \sum_{j=1}^{n} c_j\cdot \Big(h_l(s_j^{-1}) + \varepsilon/n\Big) \qquad (l=1,...,n).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket az $l=1,...,n$ szerint összegezve (figyelembe véve azt, hogy $\sum_{j=1}^{n} h_j \le 1$) oda jutunk, hogy

$$\sum_{l=1}^{n}((\lambda_l\cdot f_l) \div \varphi) \le (1+\varepsilon)\cdot \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Az itt szereplő $\sum_{j=1}^{n} c_j$ összegek infimuma nem más, kint $\Phi \div \varphi$, így egyúttal

$$(**) \qquad \sum_{l=1}^{n}((\lambda_l\cdot f_l)\div\varphi) \le (1+\varepsilon)\cdot(\Phi\div\varphi)$$

is igaz. Mindkét oldalt elosztva $f_0 \div \varphi$-vel a

$$\sum_{l=1}^{n} I_\varphi(\lambda_l\cdot f_l) \le (1+\varepsilon)\cdot I_\varphi(\Phi)$$

egyenlőtlenség adódik. Ezért a fenti B), C) tulajdonságok, a Φ definíciója, valamint az

$$\frac{1}{f_0 \div f} \le I_\varphi(f) \le f \div f_0$$

becslések és $(**)$ alapján

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l\cdot I_\varphi(f_l) \le (1+\varepsilon)\cdot \Big(I_\varphi\Big(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\cdot f_l\Big) + \varepsilon\cdot I_\varphi(g)\Big) \le$$

$$I_\varphi\Big(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\cdot f_l\Big) + \varepsilon\cdot\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\cdot I_\varphi(f_l) + \varepsilon\cdot(1+\varepsilon)\cdot I_\varphi(g) \le$$

$$I_\varphi\Big(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\cdot f_l\Big)+\varepsilon\cdot\Delta\cdot\sum_{l=1}^{n}(f_l\div f_0)+\varepsilon\cdot(1+\varepsilon)\cdot(g\div f_0).$$

Ha itt az $0<\varepsilon<M$ olyan „kicsi", hogy $\varepsilon\cdot\Delta\cdot\sum_{l=1}^{n}(f_l\div f_0)+\varepsilon\cdot(1+\varepsilon)\cdot(g\div f_0)<\delta$, akkor a **II**. állítást kapjuk.

III. *Tegyük fel, hogy* $0\not\equiv f\in\mathcal{K}(X)^+$, $0<\varepsilon\in\mathbf{R}$, *az* e *egységelem* $U\in\mathcal{T}$ *környezetére pedig*

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\qquad(x,y\in X,\ y^{-1}x\in U).$$

Legyen a $0\not\equiv g\in\mathcal{K}(X)^+$ *függvény olyan, hogy* $g(x)=0\quad(x\in X\setminus U)$, *a kompakt* $E\subset X$ *halmazzal pedig* $f(x)=0\quad(x\in X\setminus E)$. *Ekkor tetszőleges* $\alpha>\varepsilon$ *számhoz megadhatók a* $t_1,...,t_m\in E^{-1}$ *elemek (valamilyen* $m\in\mathbf{N}$ *mellett) és a* $0\le c_1,...,c_m$ *számok úgy, hogy* $\sum_{j=1}^{m}c_j>0$ *és*

$$\Big|f(x)-\sum_{j=1}^{m}c_jg(t_jx)\Big|\le\alpha\qquad(x\in X).$$

A most mondottak bizonyításához először is jegyezzük meg, hogy

$$(f(x)-\varepsilon)\cdot g(s^{-1}x)\le f(s)\cdot g(s^{-1}x)\le(f(x)+\varepsilon)\cdot g(s^{-1}x)\qquad(x,s\in X).$$

Valóban, ha $s^{-1}x\in U$, akkor az f-re tett feltételek szerint $|f(x)-f(s)|<\varepsilon$, azaz

$$f(x)-\varepsilon<f(s)<f(x)+\varepsilon,$$

amiből $g(s^{-1}x)\ge 0$ miatt a fenti egyenlőtlenség már következik. Ha viszont $s^{-1}x\notin U$, akkor a g-re vonatkozó feltétel alapján $g(s^{-1}x)=0$, és így az említett egyenlőtlenségek nyilvánvalóak.

Vezessük be a következő jelölést:

$$g^*(x):=g(x^{-1})\qquad(x\in X)$$

(nyilván $g^*\in\mathcal{K}(X)^+$), és válasszuk az $\eta>0$ számot olyan „kicsire", hogy

$$(f\div g^*)\cdot\eta<\alpha-\varepsilon.$$

Legyen továbbá a $V\in\mathcal{T}$ olyan környezete az e egységelemnek, aminek a $\overline{V}$ lezártja kompakt, és

$$|g(u)-g(v)|<\varepsilon\qquad(u,v\in X,\ uv^{-1}\in V).$$

(Ilyen V van, ui. (ld. 4.3.3.14. Lemma, ill. az után tett megjegyzés) a g jobbról egyenletesen folytonos.) Mivel a feltételek szerint $f(t)=0\quad(t\in X\setminus E)$, ezért $\{f\neq 0\}\subset E$. Világos, hogy $E\subset\bigcup_{s\in E}(sV)$, tehát – az E kompakt lévén – van olyan $m\in\mathbf{N}$ és $s_1,...,s_m\in E$, hogy

$$\{f\neq 0\}\subset E\subset\bigcup_{j=1}^{m}(s_jV).$$

Alkalmazzuk most az egységosztásról szóló 4.1.2.4. Tételt, miszerint alkalmasan megválasztott $h_1, ..., h_m \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényekkel

$$h_j(x) = 0 \qquad (x \in X \setminus (s_j V)) \qquad (j = 1, ..., m),$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} h_j(x) = 1 \qquad (x \in \{f \neq 0\}).$$

Ezért tetszőleges $s, x \in X$ és $j = 1, ..., m$ esetén

$$h_j(s)\cdot f(s)\cdot (g(s^{-1}x) - \eta) \leq h_j(s)\cdot f(s)\cdot g(s_j^{-1}x) \leq h_j(s)\cdot f(s)\cdot (g(s^{-1}x) + \eta).$$

Ui., ha $s_j^{-1}s = (s_j^{-1}x)(s^{-1}x)^{-1} \in V$, akkor $|g(s_j^{-1}x) - g(s^{-1}x)| < \eta$ azaz

$$g(s^{-1}x) - \eta < g(s_j^{-1}x) < g(s^{-1}x) + \eta,$$

és $h_j(s)\cdot f(s) \geq 0$, miatt a kérdéses egyenlőtlenségek már triviálisasn következnek, ha pedig $s_j^{-1}s \notin V$, azaz $s \notin s_j V$, akkor $h_j(s) = 0$. Összegezzük az utóbbi egyenlőtlenségeket, amikor is a **III**. állítás megfogalmazása után tett észrevételünk figyelembevételével

$$(f(x) - \varepsilon)\cdot g(s^{-1}x) - \eta\cdot f(s) \leq \sum_{j=1}^{m} h_j(s)\cdot f(s)\cdot g(s_j^{-1}x) \leq (f(x) + \varepsilon)\cdot g(s^{-1}x) + \eta\cdot f(s)$$

adódik. Ti. $s \in \{f \neq 0\}$ esetén az összegzés után megjelenő $\sum_{j=1}^{m} h_j(s)$ szorzótényezőre $\sum_{j=1}^{m} h_j(s) = 1$ teljesül. Ha viszont $s \notin \{f \neq 0\}$, azaz $f(s) = 0$, akkor az utóbbi két egyenlőtlenség a következő alakú:

$$(f(x) - \varepsilon)\cdot g(s^{-1}x) \leq 0 \leq (f(x) + \varepsilon)\cdot g(s^{-1}x).$$

Itt a második egyenlőtlenség nyilvánvaló, ugyanez mondható akkor is, ha $s^{-1}x \notin U$, hiszen ekkor $g(s^{-1}x) = 0$. Az $s^{-1}x \in U$ esetben pedig az f-re tett feltétel alapján

$$|f(x) - f(s)| = |f(x)| < \varepsilon,$$

ezért $(f(x) - \varepsilon)\cdot g(s^{-1}x) \leq 0$.

Legyen most $0 \not\equiv \psi \in \mathcal{K}(X)^+$. Ekkor a legutóbbi egyenlőtlenségek és az **I**.-beli A), B), C), D) állítások alapján tetszőleges $x \in X$ helyen

$$(***) \qquad (f(x)-\varepsilon)\cdot I_\psi(g^*)-\eta\cdot I_\psi(f) \leq I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} g(s_j^{-1}x)\cdot h_j f\right) \leq$$

$$(f(x) + \varepsilon)\cdot I_\psi(g^*) + \eta\cdot I_\psi(f).$$

Ui. rögzített $x \in X$ mellett $s^{-1}x = (x^{-1}s)^{-1}$, ezért

$$g(s^{-1}x) = g\Big((x^{-1}s)^{-1}\Big) = g^*(x^{-1}s) =_{x^{-1}} g^*(s) \qquad (s \in X),$$

így

$$(f(x) - \varepsilon)\cdot_{x^{-1}} g^* \leq \eta\cdot f + \sum_{j=1}^{m} g(s_j^{-1}x)\cdot h_j f.$$

Innen

$$I_\psi\Big((f(x) - \varepsilon)\cdot_{x^{-1}} g^*\Big) = (f(x) - \varepsilon)\cdot I_\psi({}_{x^{-1}}g^*) = (f(x) - \varepsilon)\cdot I_\psi(g^*) \leq$$

$$I_\psi\left(\eta\cdot f + \sum_{j=1}^{m} g(s_j^{-1}x)\cdot h_j f\right) \leq I_\psi(\eta\cdot f) + I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} g(s_j^{-1}x)\cdot h_j f\right) =$$

$$\eta\cdot I_\psi(f) + I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} g(s_j^{-1}x)\cdot h_j f\right),$$

amiből átrendezéssel kapjuk a $(***)$ bal oldalát. A jobb oldal analóg módon következik.

Az $f \div \psi \leq (f \div \varphi)\cdot(\varphi \div \psi)$ egyenlőtlenségre és az $I_\varphi(f)$ definíciójára (ld. **I.**) tekintettel (megfelelő szereposztással) azt kapjuk, hogy

$$\frac{I_\psi(f)}{I_\psi(g^*)} = \frac{f \div \psi}{g^* \div \psi} \leq f \div g^* = \frac{f \div g^*}{\eta}\cdot \eta < \frac{\alpha - \varepsilon}{\eta},$$

ezért alkalmas $\beta < \varepsilon$ választással

$$\frac{I_\psi(f)}{I_\psi(g^*)} \leq f \div g^* = \frac{\beta - \varepsilon}{\eta}.$$

Ezért a $(***)$-ot az $I_\psi(g^*)$-gal elosztva (az előbb már idézett **I.**-beli B) egyenlőség szerint)

$$f(x) - \beta = f(x) - \varepsilon + \varepsilon - \beta < f(x) - \varepsilon - \eta\cdot \frac{I_\psi(f)}{I_\psi(g^*)} \leq$$

$$I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f\right) \leq f(x) + \varepsilon + \eta\cdot \frac{I_\psi(f)}{I_\psi(g^*)} <$$

$$f(x) + \varepsilon + \beta - \varepsilon = f(x) + \beta,$$

így

$$(****) \qquad \left| f(x) - I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f\right)\right| \leq \beta.$$

Alkalmazzuk most (rögzített $x \in X$ mellett) a **II**. állítást a

$$\delta := \alpha - \beta,\ \Delta := (f_0 \div g^*)\cdot \|g\|,\ \lambda_j := \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)},\ f_j := h_j f \quad (j = 1, ..., m)$$

paraméterekkl. Vegyük észre, hogy $0 \le \lambda_j \le \Delta$ $(j = 1, ..., m)$, ui. mindez azzal ekvivalens, hogy

$$0 \le \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)} = \frac{g(s_j^{-1}x)\cdot (f_0 \div \psi)}{g^* \div \psi} \le (f_0 \div g^*)\cdot \|g\|.$$

Ez utóbi viszont igaz, hiszen $g(s_j^{-1}x) \le \|g\|$ nyilvánvaló, továbbá

$$\frac{f_0 \div \psi}{g^* \div \psi} \le f_0 \div g^* \quad \Longleftrightarrow \quad f_0 \div \psi \le (g^* \div \psi)\cdot (f_0 \div g^*)$$

(ahol az utóbbi egyenlőtlenséget illetően ld. **I**.). Legyen tehát a W a fenti „szereplők" esetén a **II**.-ben kapott környezete az e egységelemnek. Ha $\psi(t) = 0$ $(t \in X \setminus W)$, akkor (ld. **I**.) a B) és a C) állítás miatt

$$\left| I_\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f \right) - \sum_{j=1}^m \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(g^*)}\cdot g(s_j^{-1}x) \right| \le \alpha - \beta.$$

Ez utóbbit igazolandó azt mondhatjuk, hogy **II**. szerint

$$\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot I_\psi(h_j f) \le I_\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f \right) + \alpha - \beta,$$

ahol (ld. **I**.) a B), C) alapján

$$I_\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f \right) \le \sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot I_\psi(h_j f).$$

Ezért

$$\left| \sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot I_\psi(h_j f) - I_\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f \right) \right| =$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot I_\psi(h_j f) - I_\psi\left(\sum_{j=1}^m \frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_j f \right) \le \alpha - \beta.$$

Ez utóbbi a $(****)$-gal együtt már igazolja a **III**. állítást, ha

$$t_j := s_j^{-1},\ c_j := \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(g^*)} \qquad (j = 1, ..., m).$$

Ekkor ui.

$$\Big|f(x)-\sum_{j=1}^{m}c_jg(t_jx)\Big|\le$$

$$\left|f(x)-I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_jf\right)\right|+\left|I_\psi\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{g(s_j^{-1}x)}{I_\psi(g^*)}\cdot h_jf\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{I_\psi(h_jf)}{I_\psi(g^*)}\cdot g(s_j^{-1}x)\right|\le$$

$$\beta+\alpha-\beta=\alpha.$$

IV. Legyen adott az e egységelemnek valamilyen $U\in\mathcal{T}$ környezete, és válasszuk a $0\not\equiv\varphi_U\in\mathcal{K}(X)^+$ függvényt úgy (ld. 4.1.3.2. Lemma), hogy $\varphi_U(x)=0\quad(x\in X\setminus U)$. Az így meghatározott φ_U függvények Φ halmazában vezessük be az alábbi parciális rendezést: ha $\varphi_U,\,\varphi_V\in\Phi$, akkor $\varphi_U\preceq\varphi_V$ jelentse azt, hogy $V\subset U$. Megmutatjuk, hogy *tetszőleges* $f\in\mathcal{K}(X)^+$ *függvényre a*

$$\Phi\ni\varphi\mapsto I_\varphi(f)=\frac{f\div\varphi}{f_0\div\varphi}$$

(általánosított) sorozatnak van határértéke (ld. 4.3. xxvi) megjegyzés).

Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy teljesül a Cauchy-kritérium, nevezetesen: bármilyen $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $0\not\equiv\varphi_*\in\Phi$, hogy

$$|I_\varphi(f)-I_{\hat\varphi}(f)|\le\varepsilon\qquad(\varphi,\,\hat\varphi\in\Phi,\,\varphi_*\preceq\varphi,\,\hat\varphi).$$

Itt nyilván feltehető, hogy $f\not\equiv 0$. Legyen továbbá az $U_0\in\mathcal{T}$ olyan környezete az e egységelemnek, aminek az $\overline{U}_0$ lezártja kompakt, az $\omega\in\mathcal{K}(X)^+$ pedig olyan függvény (ld. 4.1.3.2. Lemma), hogy

$$\omega(x)=1\qquad(x\in F:=\operatorname{supp}(f+f_0)\overline{U}_0).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy a $\operatorname{supp}(f+f_0)$, és így (ld. 4.3.3.13. Lemma) az F halmaz is kompakt.) Ha $0<\varepsilon<1$, akkor jelöljük γ-val a következő számot:

$$\gamma:=\frac{\varepsilon}{4(1+\omega\div f_0)\cdot(1+f\div f_0)}.$$

Az f és az f_0 balról való egyenletes folytonossága (ld. 4.3.3.14. Lemma) miatt van olyan $U\subset U_0$ nyílt környezete az e egységelemnek, hogy

$$|f(x)-f(y)|<\gamma/2,\ |f_0(x)-f_0(y)|<\gamma/2\qquad(x,y\in X,\,y^{-1}x\in U).$$

Ha (ld. 4.1.3.2. Lemma) $g\in\mathcal{K}(X)^+$ és $g(x)=0\quad(x\in X\setminus U)$, akkor az $\alpha:=\gamma$ szereposztással a **III**. állítás szerint alkalmas $t_1,...,t_m\in E^{-1}:=(\operatorname{supp}f)^{-1}$ elemekkel és $c_1,...,c_m$ nem-negatív együtthatókkal

$$\Big|f(x)-\sum_{j=1}^{m}c_j\cdot g(t_jx)\Big|\le\gamma\qquad(x\in X).$$

Mivel $\operatorname{supp} f \subset F$ és $t_j^{-1}U \subset t_j^{-1}U_0 \subset (\operatorname{supp} f)U_0 \subset F \quad (j = 1, ..., m)$, így

$$f(x) = g(t_j x) = 0 \qquad (x \in X \setminus F,\ j = 1, ..., m),$$

ezért azt is írhatjuk, hogy

$$\Big| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot g(t_j x) \Big| \le \gamma \cdot \omega(x) \qquad (x \in X).$$

Más szóval

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) - \gamma \cdot \omega \le f \le \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) + \gamma \cdot \omega.$$

Innen tetszőleges $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre azt kapjuk (ld. **I**. C), D), d)), hogy

$$\Big| I_\varphi(f) - I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) \Big) \Big| \le \gamma \cdot I_\varphi(\omega) = \gamma \cdot \frac{\omega \div \varphi}{f_0 \div \varphi} \le \gamma \cdot (\omega \div f_0).$$

Alkalmazzuk most a **II**. állítást a **III**. bizonyításában (az ottani ψ-vel) szereplő

$$c_j := \frac{I_\psi(h_j f)}{I_\psi(g^*)} \qquad (j = 1, ..., m)$$

együtthatókkal. (Mivel $h_j f \le f$, ezért (ld. **I**. d))

$$c_j \le \frac{I_\psi(f)}{I_\psi(g^*)} = \frac{f \div \psi}{f_0 \div \psi} \cdot \frac{f_0 \div \psi}{g^* \div \psi} = \frac{f \div \psi}{g^* \div \psi} \le f \div g^* \qquad (j = 1, ..., m).)$$

A **II**. alapján tehát létezik az e egységelemnek olyan $V \in \mathcal{T}$ környezete, hogy hacsak a $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre $\varphi(x) = 0 \quad (x \in X \setminus V)$, akkor

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot I_\varphi({}_{t_j}g) = \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \Big) \cdot I_\varphi(g) \le I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) \Big) + \gamma.$$

Mivel (ld. **I**. C))

$$I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) \Big) \le \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot I_\varphi({}_{t_j}g) = \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \Big) \cdot I_\varphi(g),$$

ezért

$$\Big| I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{t_j}g) \Big) - I_\varphi(g) \cdot \sum_{j=1}^{m} c_j \Big| \le \gamma.$$

Egybevetve a fentieket a $c := \sum_{j=1}^{m} c_j \ (> 0)$ jelöléssel

$$|I_\varphi(f) - c \cdot I_\varphi(g)| \le$$

$$\Big|I_\varphi(f) - I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^m c_j\cdot({}_{t_j}g)\Big)\Big| + \Big|I_\varphi\Big(\sum_{j=1}^m c_j\cdot({}_{t_j}g)\Big) - I_\varphi(g)\cdot\sum_{j=1}^m c_j\Big| \le \gamma\cdot(1+\omega\div f_0)$$

adódik. Ugyanezt megismételve az f helyett az f_0-val, egy alkalmas $d>0$ számmal és az e-nek egy $\tilde V\in\mathcal{T}$ környezetével azt írhatjuk, hogy ha $\tilde\varphi\in\mathcal{K}(X)^+$ és $\tilde\varphi(x)=0\quad(x\in X\setminus\tilde V)$, akkor

$$|1-d\cdot I_{\tilde\varphi}(g)|\le\gamma\cdot(1+\omega\div f_0).$$

(Vegyük figyelembe ehhez, hogy $I_{\tilde\varphi}(f_0)=1$.) Következésképpen

$$|I_\varphi(f)-c/d|\le|I_\varphi(f)-c\cdot I_\varphi(g)|+c\cdot|I_\varphi(g)-1/d|=$$

$$|I_\varphi(f)-c\cdot I_\varphi(g)|+\frac{c}{d}\cdot|1-d\cdot I_\varphi(g)|\le\gamma\cdot(1+c/d)\cdot(1+\omega\div f_0),$$

hacsak $\varphi\in\mathcal{K}(X)^+$, $\varphi(x)=0\ \ (x\in X\setminus(V\cap\tilde V))$. Innen egyszerű átrendezéssel az következik, hogy

$$\frac{c}{d}\cdot(1-\gamma\cdot(1+\omega\div f_0))\le I_\varphi(f)+\gamma\cdot(1+\omega\div f_0),$$

amiből meg az, hogy (ld. **I**. és a γ definíciója)

$$\frac{c}{d}+1\le\frac{I_\varphi(f)+1}{1-\gamma\cdot(1+\omega\div f_0)}\le\frac{1+f\div f_0}{1-\gamma\cdot(1+\omega\div f_0)}\le 2\cdot(1+f\div f_0).$$

Ezért

$$\Big|I_\varphi(f)-\frac{c}{d}\Big|\le 2\gamma\cdot(1+\omega\div f_0)\cdot(1+f\div f_0)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $0\not\equiv\varphi,\ \tilde\varphi\in\mathcal{K}(X)^+$, $\varphi(x)=\tilde\varphi(x)=0\quad(x\in X\setminus(V\cap\tilde V))$ esetén

$$|I_\varphi(f)-I_{\tilde\varphi}(f)|\le|I_\varphi(f)-c/d|+|I_{\tilde\varphi}(f)-c/d|\le\varepsilon.$$

Ha tehát a $0\not\equiv\varphi_*\in\mathcal{K}(X)^+$ függvényre $\varphi_*(x)=0\quad(x\in X\setminus(V\cap\tilde V))$ és a $0\not\equiv\varphi,\ \hat\varphi\in\Phi$ függvényekre $\varphi_*\preceq\varphi,\ \hat\varphi$, akkor az e egységelem alkalmas $U,\ \hat U\in\mathcal{T}$ környezeteivel $\varphi=\varphi_U$, és $\hat\varphi=\varphi_{\hat U}$, továbbá $U,\ \hat U\subset V\cap\tilde V$. Így $x\in X\setminus(V\cap\tilde V)$ esetén $x\notin U\cup\hat U$, ezért $\varphi(x)=\hat\varphi(x)=0$ és

$$|I_\varphi(f)-I_{\hat\varphi}(f)|\le\varepsilon.$$

V. A fentiekben vizsgált (általánosított) $\Phi\ni\varphi\mapsto I_\varphi(f)$ sorozat határértékét jelöljük $I(f)$-fel. (Mivel az $\mathbf{R}$ a „szokásos" topológiával T_2-tér, ezért a szóban forgó sorozatnak egyértelműen létezik határértéke.) Az így definiált

$$I:\mathcal{K}(X)^+\to\mathbf{R}$$

funkcionálra az $I_\varphi(f)\ge 1/(f_0\div f))$ (ld. **I**.) becslés miatt

$$I(f)>0\qquad(0\not\equiv f\in\mathcal{K}(X)^+)$$

„automatikusan" fennáll. Hasonlóan, az A), B) (ld. **I.**) állítások alapján

$$I({}_a f) = I(f),\ I(cf) = c\cdot I(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+,\ a \in X,\ 0 \le c \in \mathbf{R}).$$

Ha $f, g \in \mathcal{K}(X)^+$, akkor (ld. **I.**) a C) tulajdonságból $I(f+g) \le I(f) + I(g)$ következik. Ugyanakkor a **II.** állításból (az $m := 2$, $\lambda_1 := \lambda_2 := 1$, $f_1 := f$, $f_2 := g$ választással)

$$I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \le I_\varphi(f+g) + \delta,$$

hacsak a $\varphi = \varphi_U \in \Phi$ függvényre $U \subset U_0$ (ahol az $U_0 \in \mathcal{T}$ az e egységelemnek egy alkalmas, a δ-tól függő környezete). Az I definíciója miatt viszont az e-nek egy $U_1 \in \mathcal{T}$ környezetével

$$I(f) + I(g) \le I_\varphi(f) + I_\varphi(g) + 2\delta,\ \ I_\varphi(f+g) \le I(f+g) + \delta$$

(feltéve, hogy $\varphi = \varphi_U \in \Phi$, $U \subset U_1$). Ezért

$$I(f) + I(g) \le I_\varphi(f+g) + 3\delta \le I(f+g) + 4\delta$$

(ahol $\varphi = \varphi_U \in \Phi$, $U \subset U_0 \cap U_1$). Az itteni $0 < \delta \in \mathbf{R}$ tetszőleges volt, így

$$I(f) + I(g) \le I(f+g)$$

is igaz, ami a fenti fordított becsléssel együtt az

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

additivitást igazolja.

VI. Végül, lássuk be a Haar-tétel egyértelműségi állítását. Legyen tehát a

$$J : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$$

egy, az említett tétel $1^o \to 4^o$ pontjainak eleget tevő pozitív lineáris funkcionál, amire valamilyen $f_1 \in \mathcal{K}(X)^+$ függvénnyel $J(f_1) > 0$. Ha $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+$, akkor alkalmas $m \in \mathbf{N}$, $s_1, ..., s_m \in X$, $0 \le c_1, ..., c_m \in \mathbf{R}$ paraméterekkel

$$f_1 \le \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{s_j} f).$$

Valóban, ha $a \in X$ és $f(a) > 0$, akkor tetszőleges $x \in X$ elemre $x = xa^{-1}a = s_x^{-1}a$, ahol $s_x := ax^{-1}$. Ezért

$${}_{s_x} f(x) = f(s_x x) = f(a).$$

Ha

$$c_x := \begin{cases} 2f_1(x)/f(a) & (f_1(x) > 0) \\ 1 & (f_1(x) = 0), \end{cases}$$

akkor

$$c_x \cdot ({}_{s_x}f)(x) = \begin{cases} 2f_1(x) & (f_1(x) > 0) \\ f(a) & (f_1(x) = 0), \end{cases}$$

következésképpen $c_x \cdot ({}_{s_x}f)(x) > f_1(x)$. Az itt szereplő $c_x \cdot ({}_{s_x}f)$ függvény folytonossága miatt egy alkalmas $K(x) \in \mathcal{T}$ környezettel

$$c_x \cdot ({}_{s_x}f)(t) > f_1(t) \qquad (t \in K(x)).$$

Nyilván $\operatorname{supp} f_1 \subset \bigcup_{x \in X} K(x)$, ezért a $\operatorname{supp} f_1$ kompaktságára hivatkozva vannak olyan $x_1, ..., x_m \in X$ elemek (valamilyen $m \in \mathbf{N}$ mellett), hogy

$$\operatorname{supp} f_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j).$$

Ha $s_j := s_{x_j}$ és $c_j := c_{x_j}$ $(j = 1, ..., m)$, akkor világos, hogy

$$f_1 \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{s_j}f).$$

Tehát

$$J(f_1) \leq \sum_{j=1}^{m} J(c_j \cdot ({}_{s_j}f)) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot J(s_j f) = \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\Big) \cdot J(f).$$

Ez azt jelenti, hogy (ld. 1°) $J(f_1) > 0$ miatt $J(f) > 0$.

Legyen most $f_1 \in \mathcal{K}(X)^+$, $0 \not\equiv g \in \mathcal{K}(X)^+$, és tegyük fel, hogy alkalmas $m \in \mathbf{N}$, $s_1, ..., s_m \in X$, $0 \leq c_1, ..., c_m \in \mathbf{R}$ esetén $f_1 \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot ({}_{s_j}g)$. Ekkor az előbbiek szerint

$$J(f_1) \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\Big) \cdot J(g),$$

és így a $\div$ definíciójára tekintettel

$$f_1 \div g \geq \frac{J(f_1)}{J(g)}.$$

A **III**. állítás alapján (könnyen beláthatóan) tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám és $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény mellett létezik olyan $\omega \in \mathcal{K}(X)^+$ és az e egységelemnek olyan $U \in \mathcal{T}$ környezete,

hogy ha $0 \not\equiv g \in \mathcal{K}(X)^+$ és $g(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$, akkor megfelelő $m \in \mathbf{N}$, $t_1, ..., t_m \in X$, $0 \le c_1, ..., c_m \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(x) \le \varepsilon \cdot \omega(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot g(t_j x) \qquad (x \in X)$$

és

$$f(x) + \varepsilon \cdot \omega(x) \ge \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot g(t_j x) \qquad (x \in X).$$

Az első egyenlőtlenségből

$$f \div g \le \varepsilon \cdot (\omega \div g) + \sum_{j=1}^{m} c_j,$$

a másodikból

$$J(f) + \varepsilon \cdot J(\omega) \ge \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\Big) \cdot J(g)$$

következik. Mindezekből együttesen (felhasználva az **I**.-beli d) becslést) az adódik, hogy

$$J(f) + \varepsilon \cdot J(\omega) \ge \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{\omega \div g}{f \div g}\right) \cdot (f \div g) \cdot J(g) \ge$$

$$(1 - \varepsilon \cdot (\omega \div f)) \cdot (f \div g) \cdot J(g).$$

Ha most $0 \not\equiv f_1 \in \mathcal{K}(X)^+$ és az utolsó egyenlőtlenséget elosztjuk $J(f_1)$-gyel, akkor a fenti $f_1 \div g \ge J(f_1)/J(g)$ becslésre is gondolva

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} + \varepsilon \cdot \frac{J(\omega)}{J(f_1)} \ge (1 - \varepsilon \cdot (\omega \div f)) \cdot \frac{f \div g}{f_1 \div g} = (1 - \varepsilon \cdot (\omega \div f)) \cdot \frac{I_g(f)}{I_g(f_1)}$$

teljesül. Ha itt vesszük a $g \mapsto I_g(f)/I_g(f_1)$ (általánosított) sorozat határértékét (ld. az I definíciója), majd ezt követően az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet, akkor a

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} \ge \frac{I(f)}{I(f_1)}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Világos, hogy az $f \leftrightarrow f_1$ csere után végül a

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} = \frac{I(f)}{I(f_1)}$$

egyenlőség következik. Más szóval a $\lambda := J(f_1)/I(f_1)$ együtthatóval

$$J(f) = \lambda \cdot I(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+),$$

azaz $J = \lambda \cdot I$. ■

Tegyük fel, hogy a fenti I a 4.3.3.15. Tételben szereplő funkcionál. Ekkor (ld. 4.4. xxiii) megjegyzés) a

$$J(f) := I(g) - I(h) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+,\, g := (|f| + f)/2,\, h := (|f| - f)/2)$$

definícióval értelmezett J kiterjesztés is rendelkezik a most említett tétel 4° pontjában megfogalmazott tulajdonsággal:

$$J({}_a f) = J(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X),\, a \in X).$$

Ennek alapján azt mondjuk, hogy a J egy ún. *bal invariáns* lineáris funkcionál, vagy más szóval bal invariáns *Haar-integrál.* (A továbbiakban nem fog félreértést okozni, ha a J helyett is az I szimbólumot használjuk.) Legyen a $\nu : \Theta \to [0, +\infty]$ az I által a 4.3.3.9. Tételnek megfelelő mérték. Ekkor tetszőleges X-beli Borel-halmaz ν-mérhető, azaz $\mathcal{B}(X) = \Omega(\mathcal{T}) \subset \Theta$, és a ν-re az alábbi állítás teljesül:

4.3.3.16. Lemma. *Az előbbiekben definiált ν mértéket illetően a következőket mondhatjuk:*

1) $0 < \nu(A) \quad (\emptyset \neq A \in \mathcal{T})$;
2) *van olyan $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ halmaz, amire $\nu(A) < +\infty$;*
3) *tetszőleges $A \in \Theta$ halmazra és $x \in X$ elemre $xA \in \Theta$ és $\nu(xA) = \nu(A)$;*
4) *minden Θ-mérhető $f : X \to [0, +\infty]$ függvényre az ${}_a f$ függvény is Θ-mérhető, és*
$$\int {}_a f \, d\nu = \int f \, d\nu \qquad (a \in X).$$

Bizonyítás. Valóban, a 4.2. xxv) megjegyzés szerint minden $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ halmaz és $a \in A$ elem esetén van olyan $g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy $\mathcal{R}_g \subset [0, 1]$, $g(a) = 1$ és $g(x) = 0$ $(x \in X \setminus A)$. Ez azt jelenti, hogy $g \leq \chi_A$. Következésképpen (ld. 4.3.3.15. Tétel) $g \not\equiv 0$ alapján

$$\nu(A) = \hat{I}(\chi_A) \geq \hat{I}(g) = I(g) > 0,$$

ami az 1) igazolását jelenti.

A 2) bizonyítását illetően emlékeztetünk a 4.3.3.7. Tételre: ha a $K \subset X$ halmaz kompakt, akkor $\nu(K) < +\infty$, továbbá

$$\nu(K) = \inf\{\nu(T) : T \in \mathcal{T},\, K \subset T\}.$$

Ezért létezik olyan $T \in \mathcal{T}$, hogy $(K \subset T$ és$)$ $\nu(T) < +\infty$.

A 3)-mal kapcsolatban először is jegyezzük meg, hogy ha az $A \subset X$ halmaz ν-mérhető, akkor más szóval $\hat{\mu}$-mérhető, ahol a $\hat{\mu}$ külső mértéket a $\hat{\mu}(Z) = \hat{I}(\chi_Z) \quad (Z \subset X)$ egyenlőség definiálta. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$\hat{\mu}(B) \geq \hat{\mu}(B \cap A) + \hat{\mu}(B \setminus A) \qquad (B \subset X).$$

Az I funkcionál bal invarianciája miatt a 4.3. szerint értelmezett $\hat{I}$ funkcionál is triviálisan bal invariáns, ezért

$$\hat{\mu}(xZ) = \hat{I}(\chi_{xZ}) = \hat{I}({}_{x^{-1}}\chi_Z) = \hat{I}(\chi_Z) = \hat{\mu}(Z) \qquad (Z \subset X)$$

(röviden: a $\hat{\mu}$ külső mérék is bal invariáns). Így

$$\hat{\mu}(xB) = \hat{\mu}(B) \geq \hat{\mu}(B \cap A) + \hat{\mu}(B \setminus A) =$$

$$\hat{\mu}(x(B \cap A)) + \hat{\mu}(x(B \setminus A)) = \hat{\mu}((xB) \cap (xA)) + \hat{\mu}((xB) \setminus (xA)) \qquad (B \subset X).$$

Ha itt a B helyett az $x^{-1}B$ halmazt írjuk, akkor

$$\hat{\mu}(B) \geq \hat{\mu}(B \cap (xA)) + \hat{\mu}(B \setminus (xA)) \qquad (B \subset X),$$

azaz az xA halmaz ν-mérhetősége adódik. Mindezek alapján pedig

$$\nu(A) = \hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(xA) = \nu(xA).$$

Ha a 4)-ben valamilyen $A \in \Theta$ halmazzal $f = \chi_A$, akkor ${}_af = \chi_{a^{-1}A}$, ezért (ld. 3)) a χ_A függvény Θ-mérhető, és

$$\int \chi_{a^{-1}A}\, d\nu = \nu(a^{-1}A) = \nu(A) = \int f\, d\nu.$$

Az integrál linearitása miatt ugyanez igaz minden $f \in L_0^+(\nu)$ lépcsősfüggvényre is. Ha pedig $f \in L^+(\nu)$, akkor egy alkalmas $f_n \in L_0^+(\nu)$, $f_n \leq f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ és } \int f\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu.$$

Világos, hogy ${}_af_n \leq {}_af_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$, valamint ${}_af = \lim_{n\to\infty} {}_af_n$. Ezért ${}_af \in L^+(\nu)$, és az előbbiekre tekintettel

$$\int {}_af\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int {}_af_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu = \int f\, d\nu.$$

■

Az így értelmezett ν mértéket *bal invariáns Haar-mértéknek* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy az $f = f^+ - f^-$ felbontás révén a 4) egyenlőség tetszőleges $f \in L^1(\nu)$ függvényre is igaz:

$$\int {}_af\, d\nu = \int f\, d\nu \qquad (a \in X),$$

vagy ugyanez a „hagyományos" szimbolikával:

$$\int f(x)\,dx = \int f(ax)\,dx$$

(*bal invariáns Haar-integrál*).

Emlékeztetünk arra, hogy a ν (a 4.3.3.7. Lemma értelmében) reguláris. A következő állításból kiderül, hogy némi megszorítással lényegében a $\nu_{|\mathcal{B}(X)}$ az egyetlen reguláris mérték a Borel-halmazok $\mathcal{B}(X) = \Omega(\mathcal{T})$ szigma-algebráján.

4.3.3.17. Lemma. *Legyen a* $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ *olyan reguláris mérték, amire az alábbiak igazak*:

a) $\mu(K) < +\infty \quad (K \in \mathcal{B}(X)$ *kompakt*);

b) *van olyan* $\emptyset \neq T \in \mathcal{B}(X)$ *halmaz, hogy* $\mu(T) > 0$;

c) a μ bal invariáns, azaz $\mu(xA) = \mu(A) \quad (A \in \mathcal{B}(X),\, x \in X)$.

Ekkor létezik olyan $\lambda > 0$ *szám, hogy* $\mu(A) = \lambda \cdot \nu(A) \quad (A \in \mathcal{B}(X))$.

Bizonyítás. Tekintsük az $L_1^+(\mu)$ teret, azaz az összes olyan $f : X \to [0, +\infty)$ függvény által alkotott halmazt, ami mérhető a $\mathcal{B}(X)$-re nézve, és $\int f\,d\mu < +\infty$. Világos, hogy $\mathcal{K}(X)^+ \subset L_1^+(\mu)$, hiszen egyrészt minden $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény – lévén folytonos – mérhető a Borel-halmazok $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebrájára vonatkozóan. Másrészt nyilván $f \leq \|f\| \cdot \chi_{\operatorname{supp} f}$, ahol a $\operatorname{supp} f$ kompakt, így az $a)$ feltétel miatt

$$\int f\,d\mu \leq \int \|f\| \cdot \chi_{\operatorname{supp} f}\,d\mu = \|f\| \cdot \mu(\operatorname{supp} f) < +\infty.$$

Legyen

$$L(f) := \int f\,d\mu \quad (f \in L_1^+(\mu)),\ \mathcal{L} := L_{|\mathcal{K}(X)^+}.$$

Ekkor (az integrál elemi tulajdonságai miatt) az L funkcionál additív és pozitív homogén, tehát az $\mathcal{L}$-re igazak a 4.3.3.15. Tételbeli 2°, 3° állítások. Továbbá a 4.3.3.16. Lemma bizonyításában látottakkal anlóg módon

$$L({}_a f) = L(f) \qquad (f \in L_1^+(\mu),\, a \in X).$$

Mindez azt jelenti, hogy az $\mathcal{L}$ funkcionálra teljesül a 4.3.3.15. Tételben szereplő 4° invariancia is.

Lássuk be, hogy tetszőleges $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ halmazra $\mu(A) > 0$. Valóban, tegyük fel ehhez indirekt módon, hogy valamilyen $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ esetén $\mu(A) = 0$. Ekkor bármelyik $x \in X$

elemmel $xA \in \mathcal{T}$ és a $c)$ feltétel szerint $\mu(xA) = \mu(A) = 0$. Legyen a $\emptyset \neq K \subset X$ kompakt halmaz. Világos, hogy

$$K \subset \bigcup_{x \in X} (xA),$$

ezért alkalmas $n \in \mathbf{N}$ és $x_0, ..., x_n \in X$ mellett $K \subset \bigcup_{i=0}^{n} (x_i A)$. Így

$$0 \leq \mu(K) \leq \sum_{i=0}^{n} \mu(x_i A) = 0,$$

tehát $\mu(K) = 0$. Ugyanakkor a μ feltételezett regularitásából következően minden $T \in \mathcal{T}$ halmazra

$$\mu(T) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt}, \ K \subset T\},$$

amiből $\mu(T) = 0$ adódik. Ez nyilván ellentmond a $b)$ feltételnek.

Legyen most $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+$. Ekkor valamilyen $a \in X$ helyen $f(a) > 0$, így az f folytonossága miatt egy $c > 0$ számmal és egy alkalmas $a \in U \in \mathcal{T}$ halmazzal

$$f(x) > c \qquad (x \in U).$$

A fentiek szerint tehát $\mu(U) > 0$, továbbá az előbb említett regularitás alapján létezik olyan $K \subset U$ kompakt halmaz, amire (ld. $a)$) $0 < \mu(K) < +\infty$. A 4.1.3.2. Lemma miatt van olyan $g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény, hogy $\mathcal{R}_g \subset [0,1]$, $g(x) = 1 \quad (x \in K)$, és $g(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$. Mindebből kifolyólag $f \geq cg$, ami oda vezet, hogy

$$\mathcal{L}(f) = \int f \, d\mu \geq \int (cg) \, d\mu \geq \int_K (cg) \, d\mu = c \cdot \mu(K) > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{L}$ funkcionálra igaz a 4.3.3.15. Tétel 1° pontja is. Ezért a most idézett tétel egyértelműségi állításából következően egy alkalmas $\lambda > 0$ konstanssal azt kapjuk, hogy $\mathcal{L} = \lambda \cdot I$, ahol az I a 4.3.3.15. Tételben szereplő bal invariáns Haar-integrál. Mivel a 4.3.3.10. Tétel szerint $I(f) = \int f \, d\nu \quad (f \in \mathcal{K}(X)^+)$, ezért innen a

$$\mu(A) = \lambda \cdot \nu(A) \qquad (A \in \Omega(\mathcal{T}))$$

egyenlőség a 4.3.3.11. Tételből már nyilván következik. ■

4.3.3.18. Lemma. *Tekintsük az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoportot, és legyen a ν az előbbiekben meghatározott bal invariáns Haar-mérték. Ekkor a következő ekvivalencia teljesül:*

$$\nu(X) < +\infty \iff \text{az } X \text{ kompakt.}$$

Bizonyítás. Induljunk ki először abból, hogy az X kompakt. Ekkor $\chi_X \equiv 1 \in \mathcal{K}(X)^+$ nyilván igaz, ezért a ν-t az előbbiek szerint meghatározó $I : \mathcal{K}(X)^+ \to [0, +\infty)$ funkcionállal

$$\nu(X) = I(\chi_X) \in [0, +\infty),$$

azaz a ν véges.

Fordítva, ha az X nem kompakt, akkor legyen az $U \in \mathcal{T}$ olyan környezete az e egységelemnek, aminek az $\overline{U}$ lezártja kompakt. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $x_0, ..., x_n \in X$ esetén $X \neq \bigcup_{i=0}^n (x_i U)$. Ti. különben

$$X = \bigcup_{i=0}^n (x_i U) = \bigcup_{i=0}^n (\overline{x_i U}) =: \bigcup_{i=0}^n U_i,$$

ahol (ld. 4.3.3.13. Lemma) az U_i $(i = 0, ..., n)$ halmazok valamennyien kompaktak. Ezért az X is kompakt lenne, szemben a feltételezésünkkel.

Mindezek alapján létezik olyan x_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{j=0}^n (x_j U) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen továbbá a $V \in \mathcal{T}$ az e-nek olyan környezete, ami „szimmetrikus", azaz $V = V^{-1}$, és $V^2 \subset U$ (ld. 4.3.). Ekkor az $x_i V$ $(i \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak. Ha ui. valamilyen $i, j \in \mathbf{N}$, $j < i$ esetén $(x_i V) \cap (x_j V) \neq \emptyset$, akkor alkalmas $a, b \in V$ elemekkel $x_i a = x_j b$, azaz $x_i = x_j b a^{-1}$. Itt $a^{-1} \in V^{-1} = V$ miatt $ba^{-1} \in V^2$. Tehát $x_i \in x_j V^2 \subset x_j V$, ami ellentmond az x_n-ek definíciójának.

Tehát

$$\nu(X) \geq \nu\Big(\bigcup_{i=0}^n (x_i V)\Big) = \sum_{i=0}^n \nu(x_i V) = \sum_{i=0}^n \nu(V) = (n+1) \cdot \nu(V) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 4.3.3.16. Lemma) $\nu(V) > 0$, ezért innen a $\nu(X) = +\infty$ egyenlőség már nyilván következik. ■

Ha az X kompakt, akkor a 4.3.3.17. Lemmában szereplő c alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $\mu(X) = 1$ legyen (*normált* Haar-mérték).

A 4.3.3.15. Tétellel analóg módon látható be az ún. *jobb invariáns Haar-integrál* létezését kimondó állítás. Nevezetesen: létezik olyan $\mathcal{I} : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionál, amire teljesülnek a 4.3.3.15. Tétel $1^o \to 3^o$ pontjai, és

$$\mathcal{I}(f_a) = \mathcal{I}(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+,\ a \in X).$$

(Az $\mathcal{I}$ egy *jobb invariáns* funkcionál.) Ha mindezek egy $\mathcal{J} : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionálra is fennállnak, akkor van olyan $\lambda > 0$ szám, hogy $\mathcal{J} = \lambda \cdot \mathcal{I}$.

Ilyen $\mathcal{I}$-t könnyen konstruálhatunk is egy $I : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ bal invariáns funkcionálból. Legyen ui. valamilyen $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ esetén

$$f^*(x) := f(x^{-1}) \qquad (x \in X),$$

és vegyük észre, hogy ha $f \in \mathcal{K}(X)^+$, valamint $a \in X$, akkor egyrészt ${}_af \in \mathcal{K}(X)^+$, másrészt

$${}_{a^{-1}}f^*(x) = f^*(a^{-1}x) = f(x^{-1}a) = f_a(x^{-1}) = (f_a)^*(x) \qquad (x \in X),$$

azaz ${}_{a^{-1}}f^* = (f_a)^*$. (Megjegyezzük, hogy ugyanígy kapjuk a tetszőleges $f \in \mathcal{K}(X)^+$ és $a \in X$ esetén fennálló $f^*_{a^{-1}} = ({}_af)^*$ egyenlőséget.) Legyen ezek után

$$\mathcal{I}(f) := I(f^*) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+).$$

Ekkor

$$\mathcal{I}(f_a) = I((f_a)^*) = I(a^{-1}f^*) = I(f^*) = \mathcal{I}(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+,\ a \in X),$$

tehát az $\mathcal{I} : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionál jobb invariáns.

A bal invariáns Haar-mértékhez vezető eljárással analóg módon kapjuk a σ *jobb invariáns Haar-mértéket,* amire tehát

$$\sigma(Ax) = \sigma(A)$$

igaz minden σ-mérhető $A \subset X$ halmazra és $x \in X$ elemre. Az egyszerre jobb- és bal invariáns Haar-mérték esetén röviden *Haar-mértékről* beszélünk. Megmutatható, hogy a μ Haar-mérték a tükrözéssel szemben is invariáns:

$$\mu(A^{-1}) = \mu(A) \qquad (A \in \Omega(\mathcal{T})).$$

Legyen ui. $\sigma(B) := \mu(B^{-1})$ $(B \in \Omega(\mathcal{T}))$, akkor könnyen belátható módon a σ is eleget tesz a 4.3.3.17. Lemmának. Így egy alkalmas $\lambda > 0$ számmal $\sigma = \lambda \cdot \mu$. Ha az $A \in \Omega(\mathcal{T})$ halmaz olyan, hogy $0 < \mu(A) < +\infty$ és $A^{-1} = A$, akkor rögtön adódik a $\lambda = 1$, azaz a $\sigma = \mu$ egyenlőség. (Ilyen A halmaz létezik, ui. a szóban forgó tér lokálisan kompakt lévén van olyan $\emptyset \neq B \in \mathcal{T}, e \in B$ halmaz, aminek a lezártja – $\overline{B}$ – kompakt. Következésképpen a μ tulajdonságai miatt $0 < \mu(B) \leq \mu(\overline{B}) < +\infty$. Az $\emptyset \neq A := B \cap B^{-1} \in \mathcal{T}$ halmaz tehát nyilván megfelelő.)

Nyilvánvaló, hogy ha a szóban forgó $\wp$ csoportművelet kommutatív, azaz egy $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoportról van szó, akkor a jobb- és bal invariáns Haar-mérték fogalma egybeesik.

4.3.3.19. Lemma. *Legyen az* $(X, \mathcal{T}, \wp)$ *lokálisan kompakt topologikus csoport esetén az* I *egy, a fentiek szerinti bal invariáns Haar-integrál. Tetszőleges* $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+$ *függvénnyel definiáljuk a* $\Delta : X \to (0, +\infty)$ *leképezést a következőképpen:*

$$\Delta(x) := \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} \qquad (x \in X).$$

Ekkor a Δ *olyan folytonos függvény, ami sem az* I*-től, sem pedig az* f*-től nem függ, és a következő értelemben multiplikatív:*

$$\Delta(xy) = \Delta(x) \cdot \Delta(y) \qquad (x, y \in X).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ és a lemmabeli I segítségével

$$I_x(g) := I(g_{x^{-1}}) \qquad (g \in \mathcal{K}(X)).$$

Világos, hogy az így definiált $I_x : \mathcal{K}(X) \to [0, +\infty)$ funkcionál bal invariáns Haar-integrál. Ha ui. $a \in X$, akkor $I_x({}_a g) = I(({}_a g)_{x^{-1}})$, ahol

$$({}_a g)_{x^{-1}}(t) = ({}_a g)(tx^{-1}) = g(atx^{-1}) = g_{x^{-1}}(at) =_a (g_{x^{-1}})(t) \qquad (t \in X),$$

azaz $({}_a g)_{x^{-1}} =_a (g_{x^{-1}})$. Így (mivel az I bal invariáns)

$$I_x({}_a g) = I(({}_a g)_{x^{-1}}) = I({}_a(g_{x^{-1}})) = I(g_{x^{-1}}) = I_x(g).$$

Ezért a 4.3.3.15. Tétel szerint egy alkalmas $0 < c_x \in \mathbf{R}$ számmal

$$I_x(g) = c_x \cdot I(g) \qquad (g \in \mathcal{K}(X)^+).$$

Ha itt az I helyett egy másik, mondjuk $\mathcal{I}$ bal invariáns Haar-integrálból indulunk ki, akkor (megint csak a 4.3.3.15. Tétel szerint) valamilyen $0 < c \in \mathbf{R}$ együtthatóval fennáll az $\mathcal{I}(g) = c \cdot I(g) \quad (g \in \mathcal{K}(X)^+)$ egyenlőség. Következésképpen az I_x „mintájára" értelmezett $\mathcal{I}_x$ bal invariáns Haar-integrálra is $\mathcal{I}_x(g) = c \cdot I_x(g) \quad (g \in \mathcal{K}(X)^+)$, ahol egy $0 < d_x \in \mathbf{R}$ számmal

$$\mathcal{I}_x(g) = d_x \cdot \mathcal{I}(g) \qquad (g \in \mathcal{K}(X)^+).$$

Tehát

$$d_x \cdot \mathcal{I}(g) = d_x c \cdot I(g) = \mathcal{I}_x(g) = c \cdot I_x(g) = c c_x \cdot I(g),$$

amiből a $d_x = c_x$ egyenlőség következik. Más szóval az

$$\frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} \qquad (0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+,\ x \in X)$$

hányados nem függ sem az I-től, sem pedig az f-től.

Ha $x, y \in X$, akkor a $\Delta(xy) = \Delta(x)\cdot\Delta(y)$ egyenlőség a következőt jelenti:

$$\frac{I(f_{(xy)^{-1}})}{I(f)} = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)}\cdot\frac{I(f_{y^{-1}})}{I(f)}$$

(tetszőleges $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvénnyel). Másképp fogalmazva

$$\frac{I(f_{(xy)^{-1}})}{I(f_{x^{-1}})} = \frac{I(f_{y^{-1}})}{I(f)}.$$

Mivel itt a jobb oldali hányados nem függ az f-től, ezért

$$\frac{I(f_{y^{-1}})}{I(f)} = \frac{I(g_{y^{-1}})}{I(g)},$$

ahol $g := f_{x^{-1}}$. Vegyük észre, hogy

$$g_{y^{-1}}(t) = g(ty^{-1}) = f(ty^{-1}x^{-1}) = f(t(xy)^{-1}) = f_{(xy)^{-1}}(t) \qquad (t \in X),$$

azaz $g_{y^{-1}} = f_{(xy)^{-1}}$. Tehát

$$\frac{I(g_{y^{-1}})}{I(g)} = \frac{I(f_{(xy)^{-1}})}{I(f_{x^{-1}})},$$

amivel a jelzett multiplikativitást is igazoltuk.

Végül lássuk be azt, hogy a Δ függvény folytonos. Legyen ehhez az $U \in \mathcal{T}$ az e egységelemet tartalmazó halmaz és $a \in X$. Ekkor az aU szorzat az a-nak egy környezete, és tetszőleges $x \in aU$ esetén valamilyen $z \in U$ segítségével $x = az$. Tehát a Δ multiplikativitása alapján

$$|\Delta(x) - \Delta(a)| = |\Delta(az) - \Delta(ae)| = |\Delta(a)|\cdot|\Delta(z) - \Delta(e)|.$$

Elegendő tehát azt bebizonyítani, hogy $\Delta \in \mathcal{C}\{e\}$, ahol $\Delta(e) = 1$. Legyen ehhez adott az $\varepsilon > 0$ szám, ekkor a 4.3.3.14. Lemma alapján az e egységelemnek a fenti $U \in \mathcal{T}$ környezete úgy is megválasztható, hogy

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \qquad (u, v \in X,\ u^{-1}v \in U).$$

Az is feltehető, hogy az $\overline{U}$ lezárt kompakt. Ha $x \in U$, akkor tetszőleges $t \in X$ esetén az $u := tx^{-1}$, $v := t$ választással $u^{-1}v = x \in U$, így

$$|f(tx^{-1}) - f(t)| = \left|f_{x^{-1}}(t) - f(t)\right| < \varepsilon.$$

Más szóval

$$\left|f_{x^{-1}} - f\right| \le \varepsilon\cdot\omega,$$

ahol (könnyen ellenőrizhetően) $\operatorname{supp} f_{x^{-1}}, \operatorname{supp} f \subset (\operatorname{supp} f)\overline{U}$, és (ld. 4.1.3.2. Lemma) az $\omega \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre

$$\omega(z) = 1 \qquad (z \in (\operatorname{supp} f)\overline{U}).$$

Innen (a már többször látott módon) azt kapjuk, hogy

$$|I(f_{x^{-1}}) - I(f)| \leq \varepsilon \cdot I(\omega).$$

Ezért

$$|\Delta(x) - 1| = \left| \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} - 1 \right| = \frac{|I(f_{x^{-1}}) - I(f)|}{I(f)} \leq \varepsilon \cdot \frac{I(\omega)}{I(f)}.$$

■

A Δ ún. *moduláris függvény* most bebizonyított multiplikativitása alapján azt mondhatjuk, hogy az

$$\mathcal{R}_\Delta \subset (0, +\infty)$$

értékkészlethalmaz (a valós számok közötti szorzásra nézve) csoport. Ha $u, v \in \mathcal{R}_\Delta$, azaz valamilyen $x, y \in X$ mellett $u = \Delta(x)$, $v = \Delta(y)$, akkor

$$u \cdot v = \Delta(x) \cdot \Delta(y) = \Delta(xy).$$

Speciálisan $\Delta^*(x) = \Delta(x^{-1}) = 1/u$, hiszen

$$\Delta(x^{-1}) \cdot u = \Delta(x^{-1}) \cdot \Delta(x)) = \Delta(x^{-1}x) = \Delta(e) = 1.$$

Ha az X halmaz kompakt, akkor a Δ folytonossága miatt az $\mathcal{R}_\Delta$ korlátos. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\mathcal{R}_\Delta = \{1\}$. Valóban, ha valamilyen $0 < u \neq 1$ esetén $u \in \mathcal{R}_\Delta$ is fennállna, akkor – lévén az $\mathcal{R}_\Delta$ csoport a fent jelzett szorzásra nézve – $1/u \in \mathcal{R}_\Delta$ is igaz lenne. Így feltehető, hogy $u > 1$, amiből a csoport-tulajdonság miatt $u^n \in \mathcal{R}_\Delta$ $(n \in \mathbf{N})$ következne. Viszont $u^n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, ami ellentmond az $\mathcal{R}_\Delta$ korlátosságának.

Ezzel az alábbi állítást láttuk be: *ha az X kompakt halmaz, akkor $\Delta \equiv 1$* (az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ egy ún. *unimoduláris csoport*). Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha a $\wp$ kommutatív, ui. ekkor a Δ definíciójában szereplő bal invariáns Haar-integrál egyúttal jobb invariáns is, ezért

$$I(f_{x^{-1}}) = I(f) \qquad (0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+,\ x \in X).$$

4.3.3.20. Lemma. *Legyen az I a 4.3.3.15. Tételben szereplő $I : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ bal invariáns pozitív lineáris funkcionál. Ekkor tetszőleges $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre*

$$I(f) = I(f^*/\Delta).$$

Bizonyítás. Valóban, ha

$$J(f) := I(f^*/\Delta) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+),$$

akkor az így definiált $J : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ funkcionál bal invariáns. Ehhez először is vegyük észre, hogy (ld. 4.3.3.18. Lemma)

$$\Delta(a^{-1})\cdot \Delta(x) = \Delta(xa^{-1}) = \Delta_{a^{-1}}(x) \qquad (x, a \in X),$$

más szóval

$$\Delta_{a^{-1}} = \Delta(a^{-1})\cdot \Delta \qquad (a \in X).$$

Ezért

$$J({}_af) = I(({}_af)^*/\Delta) = I((f^*)_{a^{-1}}/\Delta) = \Delta(a^{-1})\cdot I((f^*)_{a^{-1}}/(\Delta(a^{-1})\cdot \Delta)) =$$
$$\Delta(a^{-1})\cdot I((f^*)_{a^{-1}}/\Delta_{a^{-1}}) = \Delta(a^{-1})\cdot \Delta(a)\cdot I(f^*/\Delta) = \Delta(a^{-1}a)\cdot I(f^*/\Delta) =$$
$$\Delta(e)\cdot I(f^*/\Delta) = I(f^*/\Delta) = J(f) \qquad (\mathcal{K}(X)^+,\ a \in X).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy a 4.3.3.18. Lemma szerint a $h := f^*/\Delta \in \mathcal{K}(X)^+$ függvénnyel is

$$\Delta(a) = \frac{I(h_{a^{-1}})}{I(h)} = \frac{I((f^*)_{a^{-1}}/\Delta_{a^{-1}})}{I(f^*/\Delta)},$$

azaz $\Delta(a)\cdot I(f^*/\Delta) = I((f^*)_{a^{-1}}/\Delta_{a^{-1}})$.)

Világos, hogy a fenti J-re is igazak a 4.3.3.15. Tétel $1^o \to 3^o$ állításai, tehát a J bal invariáns funkcionál. Következésképpen (ld. 4.3.3.15. Tétel) van olyan $\lambda > 0$ konstans, amivel

$$J = \lambda\cdot I.$$

Megmutatjuk, hogy itt $\lambda = 1$. Legyen ui. $\varepsilon > 0$, ekkor (ld. 4.3.3.18. Lemma) a Δ (és így az $1/\Delta$) folytonossága miatt létezik az e egységelemnek olyan $U \in \mathcal{T}$ környezete, hogy

$$\left|1 - \frac{1}{\Delta(x)}\right| < \varepsilon \qquad (x \in U).$$

Ha a $0 \not\equiv g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre $g = g^*$ és $g(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$, akkor

$$\left|g(x) - g(x)\cdot \frac{1}{\Delta(x)}\right| \le \varepsilon\cdot g(x) \qquad (x \in X).$$

(Ilyen függvényt kapunk pl. a $h \in \mathcal{K}(X)^+$, $h(e) = 1$, $h(x) = 0 \quad (x \in X \setminus U)$ (ld. 4.2. xxv) megjegyzés) függvény segítségével: $g := h\cdot h^*$.) Tehát

$$|I(g) - I(g/\Delta)| = |I(g) - I(g^*/\Delta)| = |I(g) - J(g)| = |I(g) - \lambda\cdot I(g)| \le \varepsilon\cdot I(g).$$

Így (mivel az $\varepsilon > 0$ szám tetszőleges volt) $\lambda = 1$. ■

A továbbiakban egy bal invariáns Haar-mértéknek az „inverz argumentum"-transzformációval, ill. a jobb oldali eltolással való viszonyát vizsgáljuk.

4.3.3.21. Tétel. *Tekintsük az* $(X, \mathcal{T}, \wp)$ *lokálisan kompakt topologikus csoportot és az* $I : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ *bal invariáns Haar-integrált. Legyen a* $\hat{\mu}$ *a 4.3.3.7. Tételben az* I*-nek megfelelő külső mérték, a* $\nu : \Theta \to [0, +\infty]$ *pedig az általa meghatározott bal invariáns Haar-mérték. Ekkor*:

a) *bármelyik* Θ*-mérhető* $f : X \to [0, +\infty]$ *függvény esetén az* f^* *is* Θ*-mérhető, és*

$$\int f^* \, d\nu = \int (f/\Delta) \, d\nu, \ \int f \, d\nu = \int (f^*/\Delta) \, d\nu;$$

b) *minden* $A \subset X$ *halmazra és* $x \in X$ *elemre*

$$\hat{\mu}(Ax) = \Delta(x) \cdot \hat{\mu}(A);$$

c) *speciálisan, ha* $A \in \Theta$, *akkor* $Ax \in \Theta$ *és*

$$\nu(Ax) = \Delta(x) \cdot \nu(A);$$

d) *ha az* $f : X \to [0, +\infty]$ *függvény* Θ*-mérhető és az* $x \in X$ *tetszőleges, akkor az* f_x *függvény is* Θ*-mérhető, és*

$$\int f_x \, d\nu = \Delta(x^{-1}) \cdot \int f \, d\nu.$$

Bizonyítás. Az a)-t illetően legyen először $A \in \mathcal{B}(X)$, és bizonyítsuk be azt, hogy $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Valóban, ha

$$\Omega := \{Y \in \mathcal{B}(X) : Y^{-1} \in \mathcal{B}(X)\},$$

akkor könnyen beláthatóan az Ω halmazrendszer szigma-algebra. Tudjuk, hogy $T^{-1} \in \mathcal{T}$ $(T \in \mathcal{T})$ miatt $\mathcal{T} \subset \Omega$, ezért

$$\mathcal{B}(X) = \Omega(\mathcal{T}) \subset \Omega \subset \mathcal{B}(X).$$

Így $\Omega = \mathcal{B}(X)$.

Ha $A \in \Theta$ és $\nu(A) < +\infty$, akkor a 4.3.3.8. Lemma előtt mondottak alapján $A = B \cup C$, ahol $B \in \mathcal{B}(X)$, $C \in \Theta$, és $\nu(C) = 0$. Nyilván

$$A^{-1} = B^{-1} \cup C^{-1},$$

ahol az előbbiek szerint $B^{-1} \in \mathcal{B}(X) \subset \Theta$. Megmutatjuk, hogy $\hat{\mu}(C^{-1}) = 0$. Tekintsük ennek az érdekében a

$$D_n := \{1/n < \Delta < n\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

halmazokat. Mivel (ld. 4.3.3.19. Lemma) a Δ folytonos, a most definiált D_n-ek valamennyien $\mathcal{T}$-beliek. Nyilván elegendő azt belátnunk, hogy

$$\hat{\mu}(C^{-1} \cap D_n) = 0 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ és $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$, ekkor (ld. 4.3.3.7. Lemma) egy alkalmas $E \in \mathcal{T}$ halmazzal $C \subset E$ és $\nu(E) < \varepsilon/n$. Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$ és a $g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény olyan, hogy $g \leq \chi_{E^{-1} \cap D_n}$. Ekkor

$$g^* \leq (\chi_{E^{-1} \cap D_n})^* = \chi_{E \cap D_n}$$

(hiszen – könnyen ellenőrizhetően – $D_n^{-1} = D_n$). A 4.3.3.20. Lemmát figyelembe véve ezért azt mondhatjuk, hogy (ld. 4.3.3.9. Tétel)

$$I(g) = I(g^*/\Delta) \leq I(\chi_{E \cap D_n}/\Delta) = \hat{I}(\chi_{E \cap D_n}/\Delta) = \int (\chi_{E \cap D_n}/\Delta)\, d\nu =$$

$$\int_{E \cap D_n} (1/\Delta)\, d\nu \leq n \cdot \nu(E \cap D_n) \leq n \cdot \nu(E) < n \cdot \varepsilon/n = \varepsilon.$$

Mivel $E^{-1} \cap D_n \in \mathcal{T}$, ezért $\chi_{E^{-1} \cap D_n} \in \mathcal{M}(X)$, és így

$$\hat{\mu}(E^{-1} \cap D_n) = \hat{I}(\chi_{E^{-1} \cap D_n}) = \tilde{I}(\chi_{E^{-1} \cap D_n}) = \sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)^+,\, g \leq \chi_{E^{-1} \cap D_n}\} \leq \varepsilon.$$

Ugyanakkor $C^{-1} \cap D_n \subset E^{-1} \cap D_n$, amiből máris $\hat{\mu}(C^{-1} \cap D_n) \leq \varepsilon$ adódik. Az itt szereplő $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ tetszőleges volt, ezért $\hat{\mu}(C^{-1} \cap D_n) = 0$.

A ν teljessége miatt innen $C^{-1} \cap D_n \in \Theta$ és $\nu(C^{-1} \cap D_n) = \hat{\mu}(C^{-1} \cap D_n) = 0$ következik. Az előbbiekre tekintettel ez azt jelenti, hogy $\hat{\mu}(C^{-1}) = 0$, azaz $C^{-1} \in \Theta$ és $\nu(C^{-1}) = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy ha $A \in \Theta$ és $\nu(A) < +\infty$, akkor $A^{-1} = B^{-1} \cup C^{-1} \in \Theta$. Tetszőleges $A \in \Theta$ esetén emlékeztetünk arra, hogy a 4.3.3.7. Tétel után tett észrevételeink alapján $A^{-1} \in \Theta$ azzal ekvivalens, miszerint minden $K \subset X$ kompakt halmazzal $K \cap A^{-1} \in \Theta$. Vegyük észre, hogy

$$K \cap A^{-1} = (K^{-1} \cap A)^{-1},$$

ahol a K^{-1} halmaz kompakt, így (ld. 4.3.3.7. Tétel) $\nu(K^{-1}) < +\infty$. Tehát $K^{-1} \cap A \in \Theta$ és nyilván $\nu(K^{-1} \cap A) \leq \nu(K^{-1}) < +\infty$. Ezért az előbbiek szerint $K \cap A^{-1} \in \Theta$.

A fentieket figyelembe véve az f^* függvény Θ-mérhetősége már nyilvánvaló. Ha ui. $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor

$$\{f^* > \alpha\} = \{f > \alpha\}^{-1},$$

ahol az f függvény Θ-mérhetősége miatt $\{f > \alpha\} \in \Theta$. Következésképpen $\{f > \alpha\}^{-1} \in \Theta$, ami az f^* függvény Θ-mérhetőségét jelenti.

Az integrálokra vonatkozó a)-beli egyenlőségek $f = (f^*)^*$ miatt nyilván egyenértékűek, így elegendő pl. a másodikat belátni. Ha itt $f \in \mathcal{K}(X)^+$, akkor mindez a 4.3.3.10. Tétel és a 4.3.3.20. Lemma következménye.

Legyen most $f \in \mathcal{M}(X)$ (azaz az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ alulról félig folytonos), ekkor (ld. 4.3.3.5. Lemma, 4.3.3.9. Tétel)

$$\int f\,d\nu = \hat{I}(f) = \tilde{I}(f) := \sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)^+,\ g \le f\},$$

ahol az előbbi szuprémumot meghatározó g függvényekre

$$I(g) = \int g\,d\nu = \int (g^*/\Delta)\,d\nu \le \int (f^*/\Delta)\,d\nu.$$

Következésképpen

$$\int f\,d\nu \le \int (f^*/\Delta)\,d\nu.$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget az f helyett a (nyilvánvalóan $\mathcal{M}(X)$-beli) f^*/Δ függvényre alkalmazzuk, akkor $(f^*/\Delta)^* = f/\Delta^* = f\cdot\Delta$ miatt

$$\int (f^*/\Delta)\,d\nu \le \int f\,d\nu$$

adódik. Más szóval $\int (f^*/\Delta)\,d\nu = \int f\,d\nu$.

Tekintsük végül a tetszőleges Θ-mérhető $f : X \to [0, +\infty]$ függvényt. Ekkor az előbbiek alapján (ld. 4.3.3.9. Tétel)

$$\int f\,d\nu = \hat{I}(f) = \inf\{\tilde{I}(h) : h \in \mathcal{M}(X),\ f \le h\} =$$

$$\inf\left\{\int (h^*/\Delta)\,d\nu : h \in \mathcal{M}(X),\ f \le h\right\} \ge \int (f^*/\Delta)\,d\nu,$$

amiből – megint csak az $f \longleftrightarrow f^*/\Delta$ szerepcsere után – a kívánt $\int (f^*/\Delta)\,d\nu = \int f\,d\nu$ egyenlőség következik.

Mutassuk meg a b) állítást először is abban az esetben, amikor $\emptyset \ne A \in \mathcal{T}$. Ha a $\emptyset \ne B \subset A$ halmaz kompakt, a $g \in \mathcal{K}(X)^+$ függvényre pedig (ld. 4.1.3.2. Lemma) $\mathcal{R}_g \subset [0,1]$, $g(t) = 1 \quad (t \in B)$ és $g(t) = 0 \quad (t \in X \setminus A)$, akkor $g \le \chi_A$. Nyilván

$$g_{x^{-1}} \le (\chi_A)_{x^{-1}} = \chi_{Ax}$$

és $\chi_B \le g$, ezért (ld. 4.3.3.19. Lemma, 4.3.3.5. Lemma)

$$\Delta(x) = \frac{I(g_{x^{-1}})}{I(g)} = \frac{\hat{I}(g_{x^{-1}})}{\hat{I}(g)} \le \frac{\hat{I}(\chi_{Ax})}{\hat{I}(\chi_B)} = \frac{\hat{\mu}(Ax)}{\hat{\mu}(B)}.$$

Tehát $\Delta(x)\cdot\hat{\mu}(B) \le \hat{\mu}(Ax)$. Figyelembe véve a $\hat{\mu}$ regularitását (ld. 4.3.3.7. Lemma) így azt mondhatjuk, hogy

$$\Delta(x)\cdot\hat{\mu}(A) = \Delta(x)\cdot\sup\{\hat{\mu}(B) : B \subset A \text{ kompakt}\} \le \hat{\mu}(Ax).$$

Ismételjük meg a fentieket a kiindulási A helyett Ax-et írva, ekkor a $\emptyset \neq B \subset Ax$ kompakt halmazzal és a g függvénnyel $g \leq \chi_{Ax}$. Továbbá

$$g_x \leq (\chi_{Ax})_x = \chi_A,$$

és végül oda jutunk, hogy

$$\Delta(x^{-1})\cdot \hat{\mu}(Ax) = \frac{\hat{\mu}(Ax)}{\Delta(x)} \leq \hat{\mu}(A),$$

azaz $\hat{\mu}(Ax) \leq \Delta(x)\cdot \hat{\mu}(A)$. Ezt egybevetve az előbbi (fordított irányú egyenlőtlenséggel) a b) állítás következik az $A \in \mathcal{T}$ halmazra.

Tetszőleges $A \subset X$ esetén innen a regularitási 4.3.3.7. Lemmát felhasználva

$$\hat{\mu}(Ax) = \inf\{\hat{\mu}(T) : Ax \subset T \in \mathcal{T}\} = \inf\{\hat{\mu}(T) : A \subset Tx^{-1},\, T \in \mathcal{T}\} =$$

$$\inf\{\hat{\mu}(Tx) : A \subset T \in \mathcal{T}\} = \Delta(x)\cdot \inf\{\hat{\mu}(T) : A \subset T \in \mathcal{T}\} = \Delta(x)\cdot \hat{\mu}(A)$$

adódik.

Mivel $\nu = \hat{\mu}_{|\Theta}$, ezért a c) igazolásához elegendő már csak azt belátni, hogy $Ax \in \Theta$. Ez $(\chi_A)_{x^{-1}} = \chi_{Ax}$ miatt viszont nyilván következik az a)-ből, hiszen $A \in \Theta$ alapján a χ_A függvény Θ-mérhető, így a $(\chi_A)_{x^{-1}} = \chi_{Ax}$ is az. Ezért $Ax \in \Theta$.

A d) bizonyításához emlékeztetünk az

$${}_{a^{-1}}f^* = (f_a)^* \qquad (a \in X)$$

egyenlőségre. Tehát

$$f_a = ((f_a)^*)^* = ({}_{a^{-1}}f^*)^*.$$

Itt az a) szerint az f^* Θ-mérhető, így (ld. 4.3.3.16. Lemma) ${}_{a^{-1}}f^*$ is az. Tehát ismét csak az a) alapján az $f_a = ({}_{a^{-1}}f^*)^*$ szintén Θ-mérhető.

Az

$$\int f_x\, d\nu = \Delta(x^{-1})\cdot \int f\, d\nu$$

egyenlőség igazolásához tegyük fel először azt, hogy valamilyen $A \in \Theta$ halmazzal $f = \chi_A$. Ekkor $f_x = \chi_{Ax^{-1}}$, és a d) állítás miatt

$$\int f_x\, d\nu = \int \chi_{Ax^{-1}}\, d\nu = \nu(Ax^{-1}) = \Delta(x^{-1})\cdot \nu(A) = \Delta(x^{-1})\cdot \int f\, d\nu.$$

Innen a 4.3.3.16. Lemma bizonyításásában látottakkal analóg módon kapjuk ugyanezt tetszőleges, a tételben jelzett f függvényre. ■

Ha $f \in L^p(\nu)$ $(1 \leq p < +\infty)$, akkor a „szokásos" $f = f^+ - f^-$ felbontással kapjuk az előző tételből az alábbiakat:

- $f^*/\Delta \in L^p(\nu)$ és $\|f\|_p = \|f^*/\Delta\|_p$;
- $f_x \in L^p(\nu)$ és $\|f_x\|_p = \Delta(x^{-1})^{1/p} \cdot \|f\|_p$ $(x \in X)$.

Speciálisan, ha a szóban forgó csoport unimoduláris, akkor $f^* \in L^p(\nu)$, valamint

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p \text{ és } \|f_x\|_p = \|f\|_p \quad (x \in X).$$

4.3.3.22. Tétel. *Az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoport esetén legyen adott a $\nu : \Theta \to [0, +\infty]$ bal invariáns Haar-mérték a csoporton. Ekkor tetszőleges $1 \le p < +\infty$ és $f \in L^p(\nu)$ esetén az alábbiak teljesülnek:*

a) *minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható a csoport e egységelemének olyan $U \in \mathcal{T}$ környezete, hogy*

$$\|{}_sf - {}_tf\|_p < \varepsilon \qquad (s, t \in X,\ st^{-1} \in U);$$

b) *bármelyik $t \in X$ elemet is véve minden $\varepsilon > 0$ számhoz van az e egységelemnek olyan $V \in \mathcal{T}$ környezete, amivel*

$$\|f_s - f_t\|_p < \varepsilon \qquad (s \in tV).$$

Bizonyítás. A 4.3.3.11. Tétel bizonyítása után tett észrevételünk szerint a $\mathcal{K}(X)$ halmaz mindenütt sűrű az $L^p(\nu)$-ben, ezért akármilyen $0 < \delta \in \mathbf{R}$ esetén egy alkalmas $g \in \mathcal{K}(X)$ függvénnyel $\|f - g\|_p < \delta$. Világos, hogy (ld. 4.3.3.16. Lemma)

$$\|{}_sf - {}_tf\|_p \le \|{}_sf - {}_sg\|_p + \|{}_sg - {}_tg\|_p + \|{}_tg - {}_tf\|_p =$$

$$\|{}_s(f - g)\|_p + \|{}_sg - {}_tg\|_p + \|{}_t(g - f)\|_p =$$

$$\|f - g\|_p + \|{}_sg - {}_tg\|_p + \|g - f\|_p < 2 \cdot \delta + \|{}_sg - {}_tg\|_p.$$

A 4.3.3.14. Lemma szerint van az e egységelemnek olyan $U \in \mathcal{T}$ környezete, hogy

$$|g(x) - g(y)| < \delta^p \qquad (x, y \in X,\ yx^{-1} \in U).$$

Ha tehát $s, t \in X$ és $st^{-1} \in U$, akkor minden $x \in X$ esetén $sx(tx)^{-1} = st^{-1} \in U$, ezért

$$|{}_sg(x) - {}_tg(x)| = |g(sx) - g(tx)| < \delta^p.$$

Legyen $K := \operatorname{supp} g$, ekkor a K, és egyúttal az $s^{-1}K$, $t^{-1}K$ halmazok kompaktak. Ebből következően a $W := (s^{-1}K) \cup (t^{-1}K)$ halmaz is kompakt, és nyilván $\operatorname{supp}({}_sg - {}_tg) \subset W$. Így az $s, t \in X$, $st^{-1} \in U$ elemekre

$$\|{}_sg - {}_tg\|_p^p = \int |{}_sg - {}_tg|^p d\nu = \int_W |{}_sg - {}_tg|^p d\nu \le \delta^p \cdot \nu(W),$$

ahol a ν bal invariáns lévén $\nu(W) \leq \nu(s^{-1}K) + \nu(t^{-1}K) = 2 \cdot \nu(K)$. Következésképpen

$$\|{}_s g - {}_t g\|_p \leq (2 \cdot \nu(K))^{1/p} \cdot \delta.$$

Összegezve a fentieket azt mondhatjuk, hogy $\|{}_s f - {}_t f\|_p \leq \left(2 + (2 \cdot \nu(K))^{1/p}\right) \cdot \delta$. Ha itt a δ-t úgy választjuk meg, hogy $\left(2 + (2 \cdot \nu(K))^{1/p}\right) \cdot \delta < \varepsilon$ teljesüljön, akkor

$$\|{}_s f - {}_t f\|_p < \varepsilon \qquad (s, t \in X,\ st^{-1} \in U).$$

Ezzel az a) állítást beláttuk. A b) igazolása hasonlóan végezhető. Nevezetesen, most egyelőre tetszőleges $g \in \mathcal{K}(X)$ függvénnyel és $s, t \in X$ elemekkel

$$\|f_s - f_t\|_p \leq \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p =$$

$$\|(f - g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g - f)_t\|_p.$$

A 4.3.3.21. Tétel szerint

$$\|(f - g)_s\|_p = \left(\int |(f - g)_s|^p d\nu\right)^{1/p} = \left(\int (|f - g|^p)_s d\nu\right)^{1/p} =$$

$$\left(\Delta(s^{-1}) \cdot \int |f - g|^p d\nu\right)^{1/p} = \Delta(s^{-1})^{1/p} \cdot \|f - g\|_p,$$

és hasonlóan

$$\|(f - g)_t\|_p = \Delta(t^{-1})^{1/p} \cdot \|f - g\|_p.$$

Így ha itt valamilyen $0 < \delta \in \mathbf{R}$ mellett a $g \in \mathcal{K}(X)$ olyan, hogy $\|f - g\|_p < \delta$, akkor

$$\|f_s - f_t\|_p \leq \left(\Delta(s^{-1})^{1/p} + \Delta(t^{-1})^{1/p}\right) \cdot \delta + \|g_s - g_t\|_p.$$

Alkalmazzuk ismét a 4.3.3.14. Lemmát, most abban a „változatban", miszerint van az e egységelemnek olyan $Y \in \mathcal{T}$ környezete, hogy

$$|g(x) - g(y)| < \delta^p \qquad (x, y \in X,\ x^{-1}y \in Y).$$

Ha tehát $s^{-1}t \in Y$, akkor minden $x \in X$ esetén $(xs)^{-1}xt = s^{-1}t \in Y$, ezért

$$|g_s(x) - g_t(x)| = |g(xs) - g(xt)| < \delta^p.$$

A kompakt $K := \operatorname{supp} g$ halmazzal a $W := (Ks^{-1}) \cup (Kt^{-1})$ halmaz is kompakt, és $\operatorname{supp}(g_s - g_t) \subset W$. Továbbá az előbbiekkel analóg módon

$$\|g_s - g_t\|_p \leq (2 \cdot \nu(K))^{1/p} \cdot \delta.$$

Vegyük figyelembe, hogy a 4.3.3.19. Lemma értelmében a Δ függvény folytonos, így az $X \ni x \mapsto \Delta(x^{-1})^{1/p}$ függvény is az. Ha $s^{-1}t \in Y$, akkor $s^{-1} \in Yt^{-1}$, ahol az $Yt^{-1} \in \mathcal{T}$ halmaz a t^{-1} egy környezete. Az említett folytonosság miatt az Y-ról az is feltehető, hogy

$$\Delta(s^{-1})^{1/p} \leq 2\cdot \Delta(t^{-1})^{1/p} \qquad (s^{-1} \in Yt^{-1}).$$

Ezért

$$\|f_s - f_t\|_p \leq 2\cdot \Big(\Delta(t^{-1})^{1/p} + \nu(K)^{1/p}\Big)\cdot \delta \qquad (s^{-1}t \in Y).$$

Válasszuk a δ-t úgy, hogy $2\cdot \Big(\Delta(t^{-1})^{1/p} + \nu(K)^{1/p}\Big)\cdot \delta < \varepsilon$, akkor a $V := Y^{-1}$ jelöléssel

$$\|f_s - f_t\|_p < \varepsilon \qquad (s \in tV),$$

ami a b) állítás bizonyítását jelenti. ■

Más megfogalmazásban a 4.3.3.22. Tétel (az ottani feltételek mellett) a következőt jelenti: az

$$X \ni x \mapsto {}_x f \in L^p(\nu)$$

leképezés jobbról egyenletesen folytonos. Hasonlóan, az

$$X \ni x \mapsto f_x \in L^p(\nu)$$

hozzárendelés minden $t \in X$ helyen folytonos.

Funkcionálok szorzata

Ebben a pontban röviden áttekintjük a lokálisan kompakt $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ topologikus terek esetén az

$$I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R},\ J : \mathcal{K}(Y) \to \mathbf{R}$$

pozitív lineáris funkcionálokból kiindulva az $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{U})$ szorzattéren (ld. 4.2. xxiii) megjegyzés) „felépített"

$$I \otimes J : \mathcal{K}(X \times Y) \to \mathbf{R}$$

pozitív lineáris szorzatfunkcionál értelmezését, az ennek alapján a fentiek szerint az I, J funkcionáloknak megfelelő ν, μ mértékekből elkészített $\nu \otimes \mu$ szorzatmértéket, és az utóbbi szerinti integrál legfontosabb tulajdonságait. (A részleteket, valamint a felsorolt állítások bizonyításait illetően többnyire csupán utalunk a szakirodalom idevágó fejezeteire.)

A fenti jelöléseket megtartva tekintsünk egy

$$f : X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$$

„kétváltozós" függvényt, és adott $x \in X$, $y \in Y$ esetén legyen most újra (ld. 3.15.)

$$f_x(z) := f(x, z) \quad (z \in Y),\ f^y(t) := f(t, y) \quad (t \in X).$$

(Tehát az előbbiekben használt jelentésével szemben most az f_x szimbólum ismét a 3.15. pontban „jól bevált" jelentéssel bír: egy kétváltozós f függvényt „egyváltozósítunk" az argumentában az első változó (x) rögzítésével.) Tegyük fel, hogy adott az előbbi kétváltozós függvényeknek az

$$\emptyset \neq \mathcal{F}(X,Y) \subset \overline{\mathbf{R}}^{X\times Y}$$

halmaza, ami rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: valamilyen

$$\mathcal{F}(Y) \subset \overline{\mathbf{R}}^{Y},\ \mathcal{F}(X) \subset \overline{\mathbf{R}}^{X}$$

függvényosztályok esetén

$$f_x \in \mathcal{F}(Y),\ f^y \in \mathcal{F}(X) \qquad (f \in \mathcal{F}(X,Y),\ x \in X,\ y \in Y).$$

Ekkor bármilyen

$$\mathcal{I} : \mathcal{F}(X) \to \overline{\mathbf{R}},\ \mathcal{J} : \mathcal{F}(Y) \to \overline{\mathbf{R}}$$

funkcionálok és $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$ függvény mellett értelmezhetők az

$$f^{\mathcal{J}} : X \to \overline{\mathbf{R}},\ f_{\mathcal{I}} : Y \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvények az alábbiak szerint:

$$f^{\mathcal{J}}(x) := \mathcal{J}(f_x),\ f_{\mathcal{I}}(y) := \mathcal{I}(f^y) \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha a fenti $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ topologikus terek mellett

$$\mathcal{F}(X,Y) = \mathcal{K}(X \times Y),\ \mathcal{F}(X) = \mathcal{K}(X),\ \mathcal{F}(Y) = \mathcal{K}(Y).$$

Egyrészt ui. világos, hogy ha $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ (így többek között az f folytonos), akkor az f_x, f_y $(x \in X,\ y \in Y)$ függvények folytonosak. Másrészt azt is könnyű meggondolni, hogy $f_x \in \mathcal{K}(Y)$, $f^y \in \mathcal{K}(X)$ (azaz az f_x, f^y kompakt tartójúak is). Valóban, ehhez elegendő azt igazolni, hogy (pl. az f_x-re részletezve mindezt)

$$\operatorname{supp} f_x \subset (\operatorname{supp} f)_x.$$

Ti. (ld. 4.2. xxiii) megjegyzés) a $(\operatorname{supp} f)_x$ metszethalmaz kompakt, a $\operatorname{supp} f_x$ pedig zárt, így a T_2-tulajdonságra tekintettel (ld. 4.1.2.) kompakt is. Ugyanakkor vegyük észre, hogy

$$\{f_x \neq 0\} = \{f \neq 0\}_x,$$

így

$$\operatorname{supp} f_x = \overline{\{f_x \neq 0\}} = \overline{\{f \neq 0\}_x}.$$

Viszont $\{f \neq 0\} \subset \overline{\{f \neq 0\}}$ miatt

$$\overline{\{f \neq 0\}_x} \subset \overline{(\overline{\{f \neq 0\}})_x} = (\overline{\{f \neq 0\}})_x = (\operatorname{supp} f)_x.$$

(Felhasználtuk a 4.2. xxiii) megjegyzésben mondottakat, miszerint zárt halmaz metszethalmazai zártak.)

Van értelme tehát az alábbi definícióknak: ha adottak az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$, $J : \mathcal{K}(Y) \to \mathbf{R}$ pozitív lineáris funkcionálok, akkor legyen

$$f^J(x) := J(f_x),\ f_I(y) := I(f^y) \qquad (f \in \mathcal{K}(X \times Y),\ x \in X,\ y \in Y).$$

4.3.3.23. Lemma. *Az előbbi jelölésekkel:*

a) $f^J \in \mathcal{K}(X)$, $f_I \in \mathcal{K}(Y)$, és $I(f^J) = J(f_I) \quad (f \in \mathcal{K}(X \times Y))$;

b) *ha az* $I \otimes J : \mathcal{K}(X \times Y) \to \mathbf{R}$ *leképezést az*

$$I \otimes J(f) := I(f^J) \qquad (f \in \mathcal{K}(X \times Y))$$

hozzárendeléssel értelmezzük, akkor az $I \otimes J$ *pozitív lineáris funkcionál.*

Bizonyítás. Tekintsük az $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ függvényt, és legyen

$$U := \mathrm{pr}_1[\{f \neq 0\}],\ V := \mathrm{pr}_2[\{f \neq 0\}].$$

Mivel az f függvény folytonos, ezért $\{f \neq 0\} \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$, így $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{U}$. Továbbá

$$\overline{U} \subset \mathrm{pr}_1[\mathrm{supp}\, f],\ \overline{V} \subset \mathrm{pr}_2[\mathrm{supp}\, f],$$

ahol a $\mathrm{supp}\, f$ halmaz kompakt, következésképpen az $\overline{U}$, $\overline{V}$ halmazok is kompaktak. Világos, hogy $f(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in X \times Y \setminus (U \times V))$ és $U \times V \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$. Ha

$$\mathcal{T}_{U \times V} := \{Z \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{U} : Z \subset U \times V\},$$

$$\mathcal{T}_U := \{A \in \mathcal{T} : A \subset U\},\ \mathcal{T}_V := \{B \in \mathcal{U} : B \subset V\},$$

akkor (a $\mathcal{T}_{U \times V}, \mathcal{T}_U, \mathcal{T}_V$ *relatív topológiák* értelmében) az $(U \times V, \mathcal{T}_{U \times V})$, $(U, \mathcal{T}_U)$, $(V, \mathcal{T}_V)$ terek lokálisan kompakt topologikus terek.

Jelöljük $\mathcal{A}$-val az összes

$$U \times V \ni (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \cdot \psi_i(y)$$

alakú függvény által alkotott halmazt, ahol

$$n \in \mathbf{N},\ \varphi_0, ..., \varphi_m \in \mathcal{K}(U),\ \psi_0, ..., \psi_m \in \mathcal{K}(V).$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{A}$ (a „szokásos" függvényműveletekre nézve) részalgebrát alkot az $U \times V$-n értelmezett, folytonos, valós értékű és korlátos függvények $\mathcal{C}_0(U \times V)$ terében. Ha $g \in \mathcal{C}_0(U \times V)$, akkor (ld. 4.1.) legyen

$$\|g\| := \sup\{|g(\xi)| : \xi \in U \times V\}.$$

Könnyen meggondolható, hogy az $\mathcal{A}$ egy ún. *elválasztó* (rész)algebra: tetszőleges (x, y), $(u, v) \in U \times V$, $(x, y) \neq (u, v)$ pontokhoz létezik $\Phi \in \mathcal{A}$, hogy $\Phi(x, y) \neq \Phi(u, v)$. Valóban, ha (pl.) $x \neq u$, akkor (ld. 4.1.3.2. Lemma) van olyan $\varphi \in \mathcal{K}(U)$, $\psi \in \mathcal{K}(V)$, hogy $\varphi(x) = \psi(y) = 1$ és $\varphi(u) = 0$. Ezért $\varphi(x) \cdot \psi(y) = 1 \neq 0 = \varphi(u) \cdot \psi(v)$. Tehát a Stone-Weierstrass-tétel [1] szerint az $\mathcal{A}$ mindenütt sűrű a $\mathcal{C}_0(U \times V)$ térben (a $\|.\|$ norma értelmében). Mivel $f_{|_{U \times V}} \in \mathcal{C}_0(U \times V)$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (fenti alakú) $\Phi \in \mathcal{A}$, hogy

$$\Big| f(x, y) - \sum_{i=0}^{n} \varphi(x) \cdot \psi(y) \Big| < \varepsilon \qquad \Big((x, y) \in U \times V\Big).$$

Ha az itt szereplő φ_i, ψ_i $(i = 0, ..., n)$ függvényeket a

$$\tilde{\varphi}_i(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & (x \in U) \\ 0 & (x \in X \setminus U) \end{cases}, \quad \tilde{\psi}_i(y) := \begin{cases} \psi_i(y) & (y \in V) \\ 0 & (y \in Y \setminus V) \end{cases}$$

definícióval kiterjesztjük az X-re, ill. az Y-ra, akkor egyszerűen beláthatóan $\tilde{\varphi}_i \in \mathcal{K}(X)$, $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{K}(Y)$ $(i = 0, ..., n)$. Ez azt jelenti, hogy a fenti approximációs egyenlőtlenség így is írható:

$$\Big| f(x, y) - \sum_{i=0}^{n} \tilde{\varphi}(x) \cdot \tilde{\psi}(y) \Big| < \varepsilon \qquad \Big((x, y) \in X \times Y\Big).$$

Emlékeztetünk a 4.1.3.8. Lemmára, miszerint egy-egy alkalmas α, $\beta \geq 0$ együtthatóval

$$|I(\varphi)| \leq \alpha \cdot \|\varphi\| \quad (\varphi \in \mathcal{K}(X), \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{U}),$$

$$|J(\psi)| \leq \beta \cdot \|\psi\| \quad (\psi \in \mathcal{K}(Y), \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{V}).$$

Így minden $x \in X$ esetén az

$$f_x - \sum_{i=0}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) \cdot \tilde{\psi}_i \in \mathcal{K}(Y)$$

[1] Stone-Weierstrass-tétel: legyen az $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ lokálisan kompakt topologikus tér esetén a $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ részalgebra olyan, hogy

a) minden $a, b \in \mathcal{X}$, $a \neq b$ mellett egy alkalmas $\varphi \in \mathcal{Z}$ függvénnyel $\varphi(a) \neq \varphi(b)$;

b) tetszőleges $a \in \mathcal{X}$ elemhez létezik olyan $\varphi \in \mathcal{Z}$, hogy $\varphi(a) \neq 0$.

Ekkor bármelyik $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\varphi \in \mathcal{Z}$ függvény, amivel $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

függvényre az előbbiekre tekintettel

$$|J(f_x) - \sum_{i=0}^{n} \tilde{\varphi}_i(x)\cdot J(\tilde{\psi}_i)| < \beta\cdot\varepsilon,$$

más szóval

$$\Big|f^J(x) - \sum_{i=0}^{n} J(\tilde{\psi}_i)\cdot\tilde{\varphi}_i(x)\Big| \le \beta\cdot\varepsilon.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\sum_{i=0}^{n} J(\tilde{\psi}_i)\cdot\tilde{\varphi}_i \in \mathcal{K}(X)$ és

$$\operatorname{supp}\Big(\sum_{i=0}^{n} J(\tilde{\psi}_i)\cdot\tilde{\varphi}_i\Big) \subset \overline{U}.$$

Mindezekből már világos, hogy $f^J \in \mathcal{K}(X)$ és $\operatorname{supp} f^J \subset \overline{U}$. Ezért ismét a 4.1.3.8. Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\Big\|I(f^J) - \sum_{i=0}^{n} J(\tilde{\psi}_i)\cdot I(\tilde{\varphi}_i)\Big\| \le \alpha\cdot\beta\cdot\varepsilon.$$

Analóg módon adódik az is, hogy $f_I \in \mathcal{K}(Y)$ és

$$\Big\|J(f_I) - \sum_{i=0}^{n} J(\tilde{\psi}_i)\cdot I(\tilde{\varphi}_i)\Big\| \le \alpha\cdot\beta\cdot\varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ szám tetszőleges volt, így szükségszerűen $I(f^J) = J(f_I)$. Az pedig nyilvánvaló, hogy a

$$\mathcal{K}(X\times Y) \ni f \mapsto I(f^J)$$

leképezés pozitív lineáris funkcionál. ■

Megjegyezzük, hogy ha $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, $\psi \in \mathcal{K}(Y)$ és $I(\varphi) \ne 0$, $J(\psi) \ne 0$, akkor az

$$f(x,y) := \varphi(x)\cdot\psi(y) \qquad \big((x,y) \in X\times Y\big)$$

függvényre $f \in \mathcal{K}(X\times Y)$ és

$$I\otimes J(f) = I(\varphi)\cdot J(\psi) \ne 0.$$

Továbbá, a 4.3.3.9. Tétel alapján a 4.3.3.23. Lemma a következő alakban is írható:

$$I\otimes J(f) = \int f\,d(\nu\otimes\mu) = I(f^J) = \int f^J\,d\nu = J(f_I) = \int f_I\,d\mu,$$

ahol

$$\int f^J\,d\nu = \int f^J(x)\,d\nu(x) = \int J(f_x)\,d\nu(x) = \int\Big(\int f_x\,d\mu\Big)\,d\nu(x) =$$

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int f_I \, d\mu = \int \left(\int f(x,y)\, d\nu(x) \right) d\mu(y).$$

(Ez nem más, mint a később bebizonyítandó, a *szukcesszív integrálásról* szóló Fubini-tétel (ld. 4.3.3.26. Tétel) speciális esete.)

Jelöljük $\tilde{I}$, $\tilde{J}$-mal az I, J funkcionáloknak a 4.3.3. pont szerinti kiterjesztéseit az $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}(Y)$ halmazokra, valamint ugyanezen „recept" szerint tekintsük az $I \otimes J$ funkcionál

$$I \widetilde{\otimes} J : \mathcal{M}(X \times Y) \to \overline{\mathbf{R}}$$

kiterjesztését az $\mathcal{M}(X \times Y)$ függvényhalmazra:

$$I \widetilde{\otimes} J(g) := \sup\{I \otimes J(f) : f \in \mathcal{K}(X \times Y)^+,\ f \le g\} \qquad (g \in \mathcal{M}(X \times Y)).$$

Ekkor az alábbiakat mondhatjuk:

4.3.3.24. Lemma. *Tetszőleges $g \in \mathcal{M}(X \times Y)$ függvény mellett*

a) $g_x \in \mathcal{M}(Y)$, $g^y \in \mathcal{M}(X)$ $(x \in X,\ y \in Y)$;

b) $g^{\tilde{J}} \in \mathcal{M}(X)$, $g_{\tilde{I}} \in \mathcal{M}(Y)$;

c) $\tilde{I}(g^{\tilde{J}}) = \tilde{J}(g_{\tilde{I}}) = I \widetilde{\otimes} J(g)$;

d) *ha az* $u : X \to [0, +\infty)$, $v : Y \to [0, +\infty)$ *függvényekkel* $u \in \mathcal{M}(X)$, $v \in \mathcal{M}(Y)$ *és*

$$g(x,y) = u(x) \cdot v(y) \qquad \big((x,y) \in X \times Y\big),$$

akkor

$$I \widetilde{\otimes} J(g) = \tilde{I}(u) \cdot \tilde{I}(v),$$

kivéve az $\tilde{I}(u) = +\infty$, $\tilde{J}(v) = 0$ *és az* $\tilde{I}(u) = 0$, $\tilde{J}(v) = +\infty$ *eseteket.*

Bizonyítás. Az állításban szereplő tetszőleges $g \in \mathcal{M}(X \times Y)$ függvényre legyen

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{K}(X \times Y) : 0 \le f \le g\},$$

amikor is (ld. 4.3.3.1. Lemma) $g = \sup\{f : f \in \mathcal{F}\}$. Ekkor a 4.3.3.23. Lemma szerint $f^J \in \mathcal{K}(X)^+$ $(f \in \mathcal{F})$, és minden $x \in X$ mellett

$$g_x = \sup\{f_x : f \in \mathcal{F}\}.$$

Mivel $f_x \in \mathcal{K}(Y)^+$ $(f \in \mathcal{F})$, ezért (ld. 4.3.3.1. Lemma, 4.3.3.2. Lemma, 4.3.3.4. Lemma) $g_x \in \mathcal{M}(Y)$ és

$$g^{\tilde{J}}(x) = \tilde{J}(g_x) = \sup\{J(f_x) = f^J(x) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Továbbá a 4.3.3.1. Lemmából kifolyólag $g^{\tilde{J}} \in \mathcal{M}(X)$. Analóg módon kapjuk azt, hogy $g^y \in \mathcal{M}(X)$ $(y \in Y)$ és $g_{\tilde{I}} \in \mathcal{M}(Y)$. Végül (ld. 4.3.3.4. Lemma)

$$I \widetilde{\otimes} J(g) = \sup\{I \otimes J(f) : f \in \mathcal{F}\} =$$

$$\sup\{I(f^J) : f \in \mathcal{F}\} = \tilde{I}(\sup\{f^J : f \in \mathcal{F}\}) = \tilde{I}(g^{\tilde{J}}).$$

Ugyanígy látható be az $I \widetilde{\otimes} J(g) = \tilde{J}(g_{\tilde{I}})$ egyenlőség is.

Ezzel az a), b), c) állításokat beláttuk. A d) bizonyításához legyen $y \in Y$, ekkor (a d)-beli g-vel) $g^y = v(y) \cdot u$, ezért (ld. 4.3.3.2. Lemma)

$$\tilde{I}(g^y) = v(y) \cdot \tilde{I}(u).$$

Más szóval $g_{\tilde{I}} = \tilde{I}(u) \cdot v$, és így az $\tilde{I}(u) < +\infty$ esetben (ld. c))

$$\tilde{J}(g_{\tilde{I}}) = I \widetilde{\otimes} J(g) = \tilde{I}(u) \cdot \tilde{J}(v).$$

Hasonlóan kapjuk az utóbbi egyenlőséget a $\tilde{J}(v) < +\infty$ feltételezés mellett is.

Ha $\tilde{I}(u) = +\infty$, akkor minden $0 < c \in \mathbf{R}$ számra $g_{\tilde{I}} \geq cv$, tehát (ld. 4.3.3.2. Lemma)

$$\tilde{J}(g_{\tilde{I}}) = I \widetilde{\otimes} J(g) \geq c \cdot \tilde{J}(v).$$

Mivel most a feltételezésünk miatt $\tilde{J}(v) > 0$, a $c > 0$ szám pedig tetszőleges, ezért

$$I \widetilde{\otimes} J(g) = +\infty = \tilde{I}(u) \cdot \tilde{J}(v).$$

A $\tilde{J}(v) = +\infty$, $\tilde{I}(u) > 0$ esetben analóg módon bizonyítható be a d) állítás. ■

Az $\tilde{I}$, $\tilde{J}$ leképezéseket (amint azt az előbbiekben láttuk) kiterjesztettük a nem-negatív függvények $[0, +\infty]^X$, ill. $[0, +\infty]^Y$ halmazára. Ennek megfelelően az $I \widetilde{\otimes} J$ funkcionál értelmezése is kiterjeszthető tetszőleges $h : X \times Y \to [0, +\infty]$ függvényre, a kiterjesztett funkcionált $I \widehat{\otimes} J$-vel jelölve:

$$I \widehat{\otimes} J(h) := \inf\{I \widetilde{\otimes} J(g) : g \in \mathcal{M}(X \times Y),\ h \leq g\}.$$

4.3.3.25. Lemma. *Bármilyen* $h : X \times Y \to [0, +\infty]$ *függvényre*

$$I \widehat{\otimes} J(h) \geq \max\{\hat{I}(h^{\hat{J}}), \hat{J}(h_{\hat{I}})\}.$$

Ha az $f : X \to [0, +\infty)$, $g : Y \to [0, +\infty)$ *függvényekkel*

$$H(x, y) = f(x) \cdot g(y) \qquad (x \in X,\ y \in Y),$$

akkor az $\hat{I}(f) = +\infty$, $\hat{J}(g) = 0$ *és a* $\hat{J}(g) = +\infty$, $\hat{I}(f) = 0$ *esetek kivételével az*

$$I \widehat{\otimes} J(H) = \hat{I}(f) \cdot \hat{J}(g)$$

egyenlőség teljesül.

Bizonyítás. Valóban, ha $s \in \mathcal{M}(X,Y)$ és $h \le s$, akkor nyilván $s_x \in \mathcal{M}(Y)$ és $h_x \le s_x$ $(x \in X)$. Ezért (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$h^{\hat{J}}(x) = \hat{J}(h_x) \le \hat{J}(s_x) = \tilde{J}(s_x) = s^{\tilde{J}}(x) \qquad (x \in X).$$

Tehát $h^{\hat{J}} \le s^{\tilde{J}}$, ahol (ld. 4.3.3.24. Lemma) $s^{\tilde{J}} \in \mathcal{M}(X)$, és így (ld. 4.3.3.5. Lemma, 4.3.3.24. Lemma)

$$\hat{I}(h^{\hat{J}}) \le \hat{I}(s^{\tilde{J}}) = \tilde{I}(s^{\tilde{J}}) = I \widetilde{\otimes} J(s).$$

Következésképpen

$$I \widehat{\otimes} J(h) = \inf\{I \widetilde{\otimes} J(s) : s \in \mathcal{M}(X \times Y),\, h \le s\} \ge \hat{I}(h^{\hat{J}}),$$

és analóg módon $I \widehat{\otimes} J(h) \ge \hat{J}(h_{\hat{I}})$.

A H függvényt illetően nyilván

$$H_x = f(x)\cdot g,\ H^y = g(y)\cdot f \qquad (x \in X,\, y \in Y),$$

következésképpen (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$H^{\hat{J}}(x) = \hat{J}(H_x) = f(x)\cdot \hat{J}(g) \quad (x \in X),\ H_{\hat{I}}(y) = \hat{I}(H^y) = g(y)\cdot \hat{I}(f) \quad (y \in Y).$$

Más szóval $H^{\hat{J}} = \hat{J}(g)\cdot f$ és $H_{\hat{I}} = \hat{I}(f)\cdot g$. Ezért (ld. 4.3.3.5. Lemma) az $\hat{I}(f)$, $\hat{J}(g) < +\infty$ esetben

$$\hat{I}(H^{\hat{J}}) = \hat{J}(g)\cdot \hat{I}(f) = \hat{J}(H_{\hat{I}}).$$

A 4.3.3.25. Lemma alapján ez azt jelenti, hogy

$$I \widehat{\otimes} J(H) \ge \hat{J}(g)\cdot \hat{I}(f).$$

Ugyanakkor tetszőleges

$$F : X \to [0,+\infty),\ G : Y \to [0,+\infty),\ F \in \mathcal{M}(X),\, G \in \mathcal{M}(Y),\, f \le F,\, g \le G$$

függvényekre

$$H(x,y) \le F(x)\cdot G(y) =: L(x,y) \qquad (x \in X,\, y \in Y).$$

Így $L \in \mathcal{M}(X \times Y)$ miatt

$$I \widehat{\otimes} J(H) \le I \widetilde{\otimes} J(L),$$

ahol a 4.3.3.24. Lemmára tekintettel

$$I \widetilde{\otimes} J(L) = \tilde{I}(F)\cdot \tilde{J}(G).$$

Tehát

$$I \widehat{\otimes} J(H) \le \tilde{I}(F)\cdot \tilde{J}(G),$$

és itt infimumot véve az F és a G függvény szerint

$$I \widehat{\otimes} J(H) \leq \hat{I}(f) \cdot \hat{J}(g)$$

adódik. Ez az előbbi fordított irányú egyenlőtlenséggel együtt az állításunk bizonyítását jelenti.

Ha $\hat{I}(f) = +\infty$ és $\hat{J}(g) > 0$, akkor a fenti $H_{\hat{I}} = \hat{I}(f) \cdot g$ egyenlőség alapján minden $c > 0$ számra

$$H_{\hat{I}} \geq c \cdot g.$$

Így (ld. 4.3.3.5. Lemma)

$$\hat{J}(H_{\hat{I}}) \geq \hat{J}(cg) = c \cdot \hat{J}(g),$$

amiből $\hat{J}(g) > 0$ miatt – lévén a $c > 0$ tetszőleges – $\hat{J}(H_{\hat{I}}) = +\infty$ adódik. Analóg módon kapjuk a $\hat{J}(g) = +\infty$, $\hat{I}(f) > 0$ esetben, hogy $\hat{I}(H^{\hat{J}}) = +\infty$, és ezért (ld. 4.3.3.25. Lemma)

$$I \widehat{\otimes} J(H) = +\infty = \hat{I}(f) \cdot \hat{J}(g).$$

■

Legyen $\nu \otimes \mu$ az $I \otimes J$ funkcionál által a 4.3.3. pontban meghatározott mérték. Tehát $\nu \otimes \mu$ az

$$\mathcal{P}(X \times Y) \ni U \mapsto I \widehat{\otimes} J(\chi_U)$$

külső mértékre vonatkozóan a Caratheodory-tétel (ld. 2.5.2. Tétel) alapján kapott mérték. Ekkor a $\nu \otimes \mu$ szorzatmérték szerinti integrálást illetően a következőket mondhatjuk.

4.3.3.26. Tétel (Fubini). *Tetszőleges $f \in L^1(\nu \otimes \mu)$ függvényre az alábbi állítások teljesülnek*:

a) *megadhatók olyan $A \subset X$ (ν-mérhető), $B \subset Y$ (μ-mérhető) halmazok, hogy $\nu(A) = \mu(B) = 0$, és $f_x \in L^1(\mu)$ $(x \in X \setminus A)$, $f^y \in L^1(\nu)$ $(y \in Y \setminus B)$;*

b) *ha*

$$\varphi(x) := \begin{cases} \int f_x \, d\mu & (x \in X \setminus A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases}, \quad \Phi(y) := \begin{cases} \int f^y \, d\nu & (y \in Y \setminus B) \\ 0 & (y \in B), \end{cases}$$

akkor $\varphi \in L^1(\nu)$, $\Phi \in L^1(\mu)$, és

$$\int \varphi \, d\nu = \int \Phi \, d\mu = \int f \, d(\nu \otimes \mu).$$

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $f \geq 0$. Lássuk be először is azt, hogy az f^y függvény μ-m.m. $y \in Y$ esetén ν-mérhető. Legyen ehhez

$$A_{kn} := \{k/2^n \leq f < (k+1)/2^n\} \qquad (0 < k, n \in \mathbf{N}),$$

ekkor az így definiált A_{kn}-ek valamennyien $\nu \otimes \mu$-mérhetők, és $f \in L^1(\nu \otimes \mu)$ miatt

$$\nu \otimes \mu(A_{kn}) = \int_{A_{kn}} 1 \, d(\nu \otimes \mu) \leq \frac{2^n}{k} \cdot \int_{A_{kn}} f \, d(\nu \otimes \mu) \leq$$

$$\frac{2^n}{k} \cdot \int f \, d(\nu \otimes \mu) < +\infty \qquad (0 < k, n \in \mathbf{N}).$$

Ezért a $\nu \otimes \mu$ mérték regularitása miatt (ld. 4.3.3.7. Tétel)

$$\nu \otimes \mu(A_{kn}) = \sup\{\nu \otimes \mu(B) : B \subset A_{kn},\ B \text{ kompakt}\}.$$

Ez utóbbi tulajdonságból könnyűszerrel adódik kompakt halmazoknak egy olyan $B_j \subset A_{kn}$ $(j \in \mathbf{N})$ sorozata, hogy $B_j \subset B_{j+1}$ $(j \in \mathbf{N})$, és a $B_{kn} := \bigcup_{j=0}^{\infty} B_j$ *szigma-kompakt* halmazra

$$B_{kn} \subset A_{kn},\ \nu \otimes \mu(A_{kn} \setminus B_{kn}) = 0 \qquad (0 < k, n \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$\tilde{f}_n := \max\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^l} \cdot \chi_{B_{kl}} : l = 0, ..., n\right\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \cdot \nu \otimes \mu(A_{kn}) \leq \int \tilde{f}_n \, d(\nu \otimes \mu) \leq \int f \, d(\nu \otimes \mu) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy az $(\tilde{f}_n)$ sorozat monoton növekedő, legyen

$$\tilde{f} := \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n.$$

Mivel (egyszerűen ellenőrizhetően)

$$\int f \, d(\nu \otimes \mu) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \cdot \nu \otimes \mu(A_{kn}),$$

ezért a $(*)$ egyenlőtlenség és a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) szerint

$$\int \tilde{f} \, d(\nu \otimes \mu) = \lim_{n \to \infty} \int \tilde{f}_n \, d(\nu \otimes \mu) = \int f \, d(\nu \otimes \mu).$$

Az is világos, hogy $\tilde{f} \leq f$, és

$$\{\tilde{f} > \alpha\} = \bigcup_{0 < k, n \in \mathbf{N}, k/2^n > \alpha} B_{kn} \qquad (\alpha > 0).$$

(Tehát az $\{\tilde{f} > \alpha\}$ halmaz szigma-kompakt.) Mindezek alapján (ld. 3.3.2.6. Tétel)

$$f = \tilde{f} + h,$$

ahol $h : X \times Y \to [0, +\infty)$, és valamilyen $U \subset X \times Y$, $\nu \otimes \mu(U) = 0$ halmazzal

$$h(x, y) = 0 \qquad \Big((x, y) \in (X \times Y) \setminus U\Big).$$

Legyen

$$B := \{y \in Y : \nu(U^y) = 0\}.$$

Később megmutatjuk (ld. 4.3.3.30. Lemma), hogy $\mu(Y \setminus B) = 0$. Ha $y \in B$ és $\alpha > 0$, akkor az

$$R := \{x \in X : (x, y) \in U,\ h(x, y) > \alpha - \tilde{f}(x, y)\}$$

halmazzal

$$\{f^y > \alpha\} = \{x \in X : f(x, y) > \alpha\} = \{x \in X : \tilde{f}(x, y) > \alpha\} \cup R.$$

Az itt szereplő

$$\{x \in X : \tilde{f}(x, y) > \alpha\} = \{(\tilde{f})^y > \alpha\} = \{\tilde{f} > \alpha\}^y$$

halmaz szigma-kompakt, ezért ν-mérhető. Az R halmazra $R \subset U^y$, így $\nu(U^y) = 0$ és a ν teljessége miatt az R halmaz is ν-mérhető. Összességében azt kaptuk, hogy az $\{f^y > \alpha\}$ nívóhalmaz ν-mérhető (azaz az f^y függvény ν-mérhető), hacsak $y \in B$. Ez $\mu(Y \setminus B) = 0$ alapján azt jelenti, hogy μ-m.m. $y \in Y$ mellett az f^y függvény ν-mérhető.

Ugyanígy láthatjuk be ν-m.m. $x \in X$ esetén az f_x függvény μ-mérhetőségét.

Mivel a $\mathcal{K}(X \times Y)$ halmaz mindenütt sűrű az $L^1(\nu \otimes \mu)$-ben (a $\|.\|_1$ normára nézve), ezért egy alkalmas $\varphi_n \in \mathcal{K}(X \times Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal (ld. 4.3.3.9. Tétel)

$$\lim_{n\to\infty} I \widehat{\otimes} J(|f - \varphi_n|) = \lim_{n\to\infty} \int |f - \varphi_n| \, d(\nu \otimes \mu) = 0.$$

A 4.3.3.25. Lemmát figyelembe véve egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}(|f - \varphi_n|^{\hat{J}}) = 0$$

egyenlőség is teljesül. A fentiekre tekintettel továbbá azt mondhatjuk, hogy ν-m.m $x \in X$ mellett $|f - \varphi_n|_x \in L^+(\mu)$, minden ilyen x-re (ld. 4.3.3.9. Tétel)

$$\hat{J}(|f - \varphi_n|_x) = \int |f - \varphi_n|_x \, d\mu = \int |f(x, y) - \varphi_n(x, y)| \, d\mu(y).$$

A 4.3.3.9. Tétel bizonyítása után tett észrevétel szerint $\lim_{n\to\infty} \hat{I}(|f - \varphi_n|^{\hat{J}}) = 0$ alapján tehát feltehető, hogy

$$\lim_{n\to\infty} |f - \varphi_n|^{\hat{J}}(x) = \lim_{n\to\infty} \hat{J}(|f - \varphi_n|_x) = \lim_{n\to\infty} \int |f - \varphi_n|_x \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |f_x - (\varphi_n)_x| \, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\mu(y) = 0 \qquad (\nu\text{-m.m. } x \in X).$$

Innen az is következik, hogy valamilyen $A \subset X$, $\nu(A) = 0$ halmazzal az $f_x : Y \to [0, +\infty)$ függvény $L^1(\mu)$-beli, és

$$\int f(x,y)\, d\mu(y) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x,y)\, d\mu(y) \qquad (x \in X \setminus A).$$

Mivel (ld. 4.3.3.9. Tétel) minden ilyen x-re

$$\int \varphi_n(x,y)\, d\mu(y) = \hat{J}((\varphi_n)_x) = J((\varphi_n)_x) = \varphi_n^J(x)$$

és (ld. 4.3.3.23. Lemma) $\varphi_n^J \in \mathcal{K}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért az

$$X \ni x \mapsto \varphi(x) := \begin{cases} \int f(x,y)\, d\mu(y) = f^{\hat{J}}(x) & (x \in X \setminus A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases}$$

leképezés ν-mérhető. Analóg módon kapjuk az $|f - \varphi_n|^{\hat{J}}$ függvény ν-mérhetőségét.

Az előbbiek, valamint a 4.3.3.9. Tétel miatt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \hat{I}(|f - \varphi_n|^{\hat{J}}) = \lim_{n\to\infty} \int |f - \varphi_n|^{\hat{J}}\, d\nu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \hat{J}(|f - \varphi_n|_x)\, d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \left(\int |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\mu(y) \right) d\nu(x).$$

Tehát

$$\int |\varphi - \varphi_n^J|\, d\nu = \int \Big| \int (f(x,y) - \varphi_n(x,y))\, d\mu(y) \Big|\, d\nu(x) \le$$

$$\int \left(\int |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\mu(y) \right) d\nu(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

alapján egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} \int |\varphi - \varphi_n^J|\, d\nu = 0.$$

Mindezekből már világos, hogy $\varphi \in L^1(\nu)$. Végül (ld. 4.3.3.23. Lemma)

$$\left| \int f\, d(\nu \otimes \mu) - \int \varphi\, d\nu \right| \le \int |f - \varphi_n|\, d(\nu \otimes \mu) + \left| \int \varphi_n\, d(\nu \otimes \mu) - \int \varphi\, d\nu \right| =$$

$$\int |f - \varphi_n|\, d(\nu \otimes \mu) + \left| \int \varphi_n^J\, d\nu - \int \varphi\, d\nu \right| \le$$

$$\int |f - \varphi_n| \, d(\nu \otimes \mu) + \int |\varphi_n^J - \varphi| \, d\nu \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

így

$$\int f \, d(\nu \otimes \mu) = \int \varphi \, d\nu.$$

Az $\int f \, d(\nu \otimes \mu) = \int \Phi \, d\mu$ egyenlőség hasonlóan következik. ■

A fenti Fubini-tételben szereplő egyenlőségek a „hagyományos" írásmóddal felírva szemléletesen tükrözik a szukcesszív integrálás tényét (ld. 3.15.5. Tétel utáni megjegyzés): ha

$$\int f(x,y) \, d\mu(y) := \varphi(x) \quad (x \in X), \ \int f(x,y) \, d\nu(x) := \Phi(y) \quad (y \in Y),$$

akkor

$$\int f(x,y) \, d(\nu \otimes \mu)(x,y) = \int \left(\int f(x,y) \, d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int \left(\int f(x,y) \, d\nu(x) \right) d\mu(y).$$

A most mondott állításból már nem nehéz belátni, hogy igaz a

4.3.3.27. Tétel (Tonelli). *Tegyük fel, hogy az* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ *függvény* $\nu \otimes \mu$*-mérhető, és alkalmas* $U_n \subset X \times Y$ *halmazokkal* $\nu \otimes \mu(U_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$, *továbbá*

$$f(x,y) = 0 \qquad \Big((x,y) \in (X \times Y) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \Big).$$

Ekkor:

a) *megadhatók olyan* $A \subset X$ *(*ν*-mérhető),* $B \subset Y$ *(*μ*-mérhető) halmazok, hogy* $\nu(A) = \mu(B) = 0$, *az*

$$f_x \quad (x \in X \setminus A), \ f^y \quad (y \in Y \setminus B)$$

függvények pedig μ*-, ill.* ν*-mérhetők*;

b) *ha*

$$\varphi(x) := \begin{cases} \int f_x \, d\mu & (x \in X \setminus A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases}, \ \Phi(x) := \begin{cases} \int f^y \, d\nu & (y \in Y \setminus B) \\ 0 & (y \in B), \end{cases}$$

akkor φ, Φ *mérhető leképezések, és*

$$\int \varphi \, d\nu = \int \Phi \, d\mu = \int f \, d(\nu \otimes \mu).$$

Bizonyítás. Valóban, legyen $V_n := \bigcup_{k=0}^{n} U_k$ $(n \in \mathbf{N})$, ekkor $\nu \otimes \mu(V_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$, és az

$$f_n := \min\{n, f \cdot \chi_{V_n}\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre $f_n \in L^+(\nu \otimes \mu) \cap L^1(\nu \otimes \mu)$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, valamint

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y) \qquad \Big((x,y) \in X \times Y\Big)$$

teljesül. Ezért a Beppo Levi-tétel (ld. 3.3.2.3. Tétel) alapján

$$\int f \, d\,(\nu \otimes \mu) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\,(\nu \otimes \mu).$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in X$, $y \in Y$ elemekre az $((f_n)_x)$, $((f_n)^y)$ sorozatok is monoton növekedők, és

$$(*) \qquad f_x(z) = \lim_{n\to\infty} (f_n)_x(z) \quad (z \in Y), \; f^y(t) = \lim_{n\to\infty} (f_n)^y(t) \quad (t \in X).$$

Ugyanakkor a 4.3.3.26. Tétel szerint minden $n \in \mathbf{N}$ esetén alkalmas $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ halmazokkal $\nu(A_n) = \mu(B_n) = 0$, az $(f_n)_x$ $(x \in X \setminus A_n)$, $(f_n)^y$ $(y \in Y \setminus B_n)$ függvények μ-, ill. ν-mérhetők, és ha

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \int (f_n)_x \, d\mu & (x \in X \setminus A_n) \\ 0 & (x \in A_n) \end{cases}, \; \Phi_n(y) := \begin{cases} \int (f_n)^y \, d\nu & (y \in Y \setminus B_n) \\ 0 & (y \in B_n), \end{cases}$$

akkor $\varphi_n \in L^1(\nu) \cap L^+(\nu)$, $\Phi_n \in L^1(\mu) \cap L^+(\mu)$, valamint

$$\int f_n \, d(\nu \otimes \mu) = \int \varphi_n \, d\nu = \int \Phi_n \, d\mu.$$

Legyen

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \; B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n,$$

ekkor $\nu(A) = \mu(B) = 0$, és a $(*)$ egyenlőségekre tekintettel az

$$f_x \quad (x \in X \setminus A), \; f^y \quad (y \in Y \setminus B)$$

függvények μ-, ill. ν-mérhetők. Továbbá a

$$\tilde{\varphi}_n := \varphi_n \cdot \chi_{X\setminus A} \in L^1(\nu) \cap L^+(\nu), \; \tilde{\Phi}_n := \Phi_n \cdot \chi_{Y\setminus B} \in L^1(\mu) \cap L^+(\mu) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekről az alábbiakat mondhatjuk:

$$\int \varphi_n \, d\nu = \int \tilde{\varphi}_n \, d\nu, \; \int \Phi_n \, d\mu = \int \tilde{\Phi}_n \, d\mu \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\tilde{\varphi}_n \le \tilde{\varphi}_{n+1},\ \tilde{\Phi}_n \le \tilde{\Phi}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n = \varphi,\ \lim_{n\to\infty} \tilde{\Phi}_n = \Phi.$$

Így az előbb már idézett Beppo Levi-tétel miatt

$$\int \varphi\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{\varphi}_n\, d\nu,\ \int \Phi\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{\Phi}_n\, d\mu,$$

amiből – összegezve az eddigieket – az állításunk már nyilvánvaló. ■

A fentiekből már könnyen adódik a

4.3.3.28. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f : X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ *függvény* $\nu \otimes \mu$*-mérhető, és alkalmas* $U_n \subset X \times Y$ *halmazokkal* $\nu \otimes \mu(U_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$, *valamint*

$$f(x,y) = 0 \qquad \Big((x,y) \in (X \times Y) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n\Big).$$

Ekkor az

$$\int f\, d(\nu \otimes \mu),\ \int \left(\int f_x\, d\mu \right) d\nu(x),\ \int \left(\int f^y\, d\nu \right) d\mu(y)$$

integrálok akkor és csak akkor léteznek, végesek és egyenlők, ha az

$$\int |f|\, d(\nu \otimes \mu),\ \int \left(\int |f_x|\, d\mu \right) d\nu(x),\ \int \left(\int |f^y|\, d\nu \right) d\mu(y)$$

integrálok közül akár csak egy is véges.

Ha az eddigiekben szereplő „kétváltozós" f függvény (hasonlóan a korábbi állításokhoz) két „egyváltozós" függvény ún. *Kronecker-szorzata,* akkor a következőket mondhatjuk.

4.3.3.29. Lemma. *Legyen* $f \in L^1(\nu)$, $g \in L^1(\mu)$ *és*

$$f \otimes g(x,y) := f(x) \cdot g(y) \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

Ekkor $f \otimes g \in L^1(\nu \otimes \mu)$, *és*

$$\int f \otimes g\, d(\nu \otimes \mu) = \int f\, d\nu \cdot \int g\, d\mu.$$

Bizonyítás. Legyen $h := f \otimes g$, ekkor (ld. 4.3.3.9. Tétel) a 4.3.3.25. Lemma szerint

$$\int h\, d(\nu \otimes \mu) = I \widehat{\otimes} J(h) = \hat{I}(f) \cdot \hat{J}(g) = \int f\, d\nu \cdot \int g\, d\mu,$$

feltéve, hogy a h függvény $\nu \otimes \mu$-mérhető. Ezért elegendő ez utóbbit belátnunk. Tudjuk (ld. 4.3.), hogy az $\|.\|_1$ norma értelmében a $\mathcal{K}(X)$ halmaz mindenütt sűrű az $L^1(\nu)$ térben, a $\mathcal{K}(Y)$ pedig az $L^1(\mu)$-ben. Megadható tehát olyan $\varphi_n \in \mathcal{K}(X)$ és olyan $\psi_n \in \mathcal{K}(Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|g - \psi_n\|_1 = 0.$$

Tekintsük a

$$h_n := \varphi_n \otimes \psi_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozatot, amikor is a 4.3.3.9. Tétel és a 4.3.3.25. Lemma alapján egyszerűen belátható, hogy

$$I \widehat{\otimes} J(|h - h_n|) \le \|f\|_1 \cdot \|g - \psi_n\|_1 + \|f - \varphi_n\|_1 \cdot \|\psi_n\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Innen (ld. 3.5.7. Tétel) adódik egy alkalmas (m_n) indexsorozat úgy, hogy

$$h(x, y) = \lim_{n\to\infty} h_{m_n}(x, y) \qquad (\nu \otimes \mu\text{-m.m. } (x, y) \in X \times Y).$$

Mivel $h_n \in \mathcal{K}(X \times Y) \subset L^1(\nu \otimes \mu)$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért a h valóban $\nu \otimes \mu$-mérhető. ■

A következő állításokban a $\nu \otimes \mu$ mérték fontos tulajdonságait fogalmazzuk meg. Nevezetesen, igaz a

4.3.3.30. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $U \subset X \times Y$ halmazra $\nu \widehat{\otimes} \mu(U) = 0$. Ekkor ν-m.m. $x \in X$ esetén $\hat{\mu}(U_x) = 0$, továbbá μ-m.m. $y \in Y$ esetén $\hat{\nu}(U^y) = 0$.*

(Megjegyezzük, hogy a ν, μ, $\nu \otimes \mu$ mértékek teljessége miatt az U halmaz $\nu \otimes \mu$-mérhető, és hasonlóan, az U_x halmaz ν-m.m. $x \in X$ mellett ν-mérhető, a U^y halmaz pedig μ-m.m. $y \in Y$ mellett μ-mérhető.)

Bizonyítás. A 4.3.3.25. Lemma alapján

$$0 = \nu \widehat{\otimes} \mu(U) = I \widehat{\otimes} J(\chi_U) \ge \max\{\hat{I}(\chi_U^{\hat{J}}), \hat{J}((\chi_U)_{\hat{I}})\}.$$

Ezért (pl.) $\hat{I}(\chi_U^{\hat{J}}) = 0$, amiből (ld. a 4.3.3.9. Tétel után tett észrevétel) $\hat{\nu}(\{\chi_U^{\hat{J}} > 0\}) = 0$ következik, ahol

$$\chi_U^{\hat{J}}(x) = \hat{J}((\chi_U)_x) = \hat{J}(\chi_{U_x}) = \hat{\mu}(U_x) \qquad (x \in X).$$

Tehát $\hat{\nu}(\{x \in X : \hat{\mu}(U_x) > 0\}) = 0$, azaz $\hat{\mu}(U_x) = 0$ $(\nu\text{-m.m. } x \in X)$.

A $\nu(U^y) = 0$ $(\mu\text{-m.m. } y \in Y)$ állítás hasonlóan adódik. ■

4.3.3.31. Lemma. *Legyen az $A \subset X$ halmaz ν-mérhető, a $B \subset X$ pedig μ-mérhető. Ha a $\nu(A)\cdot\mu(B)$ szorzatban nem a 0 és a $+\infty$ szorzatáról van szó, akkor*:

$$\nu \widehat{\otimes} \mu(A \times B) = \nu(A)\cdot\mu(B).$$

Bizonyítás. Vegyük először is észre, hogy

$$\nu \widehat{\otimes} \mu(A \times B) = I \widehat{\otimes} J(\chi_{A\times B}),$$

ahol

$$\chi_{A\times B} = \chi_A \otimes \chi_B,$$

és

$$\nu(A) = \hat{I}(\chi_A),\ \mu(B) = \hat{J}(\chi_B).$$

Így alkalmazható a 4.3.3.25. Lemma, miszerint

$$I \widehat{\otimes} J(\chi_{A\times B}) = \hat{I}(\chi_A)\cdot\hat{J}(\chi_B).$$

■

Speciálisan, ha az előbbi lemmában $\nu(A), \mu(B) < +\infty$ (azaz $\chi_A \in L^1(\nu)$, $\chi_B \in L^1(\mu)$), akkor (ld. 4.3.3.29. Lemma) a $\chi_{A\times B}$ függvény mérhető. Más szóval az $A \times B$ halmaz $\nu \otimes \mu$-mérhető, és

$$\nu \otimes \mu(A \times B) = \nu(A)\cdot\mu(B).$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor is igaz, ha az $A \subset X$, $B \subset Y$ halmazok tetszőleges ν-mérhető, ill. μ-mérhető és egyaránt *σ-véges* halmazok. Ekkor tehát

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,\ B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n,$$

ahol az $A_n \subset X$ halmaz ν-mérhető, $\nu(A_n) < +\infty$, $A_n \subset A_{n+1}$, valamint a $B_n \subset Y$ halmaz μ-mérhető, $\mu(B_n) < +\infty$, és $B_n \subset B_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ugyanakkor (ld. 4.3.3.29. Lemma) $\chi_{A_n} \in L^1(\nu)$, $\chi_{B_n} \in L^1(\mu)$, és

$$\chi_{A_n\times B_n} = \chi_{A_n} \otimes \chi_{B_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt $\chi_{A_n\times B_n} \in L^1(\nu \otimes \mu)$, azaz az $A_n \times B_n$ halmaz $\nu \otimes \mu$-mérhető, továbbá

$$\nu \otimes \mu(A_n \times B_n) = \int \chi_{A_n\times B_n}\, d(\nu \otimes \mu) =$$

$$\int \chi_{A_n}\, d\nu \cdot \int \chi_{B_n}\, d\mu = \nu(A_n)\cdot\mu(B_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen az $A \times B$ halmaz $\nu \otimes \mu$-mérhető, és a 2.3.1.4. Tétel szerint

$$\nu \otimes \mu(A \times B) = \lim_{n\to\infty} \nu \otimes \mu(A_n \times B_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)\cdot \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \nu(A)\cdot\mu(B).$$

■

4.4. Megjegyzések

i) Legyen az (X, Ω) egy mérhető tér (ld. 2.5.), ekkor az X-en értelmezett mérhető lépcsősfüggvények (ld. 3.3.1.1. Definíció) halmaza egy Stone-féle vektorháló (ld. 3.3.1.2. Tétel). Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$.

ii) Könnyű meggondolni, hogy az előző megjegyzésben az Ω-ról elegendő azt feltenni, hogy (X-beli) gyűrű (ld. 2.1.). Világos, hogy ekkor az $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$ tartalmazás pontosan abban az esetben teljesül, ha $X \in \Omega$, azaz, amikor az Ω algebra (ld. 2.2. vii) megjegyzés).

iii) Ha pl. $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$, akkor az X-en értelmezett, valós értékű, folytonos függvények halmaza egy Stone-féle vektorháló.

iv) Legyen az (X, Ω, μ) egy mértéktér (ld. 2.5.), $p \in [1, +\infty]$, továbbá $\mathcal{F} := L^p(\mu)$ (ld. 3.5.). Figyelembe véve az L^p-terekről mondottakat (ld. 3.5.), rögtön adódik az, hogy a most jelzett $\mathcal{F}$ is egy Stone-féle vektorháló. Az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{1} \in L^\infty(\mu)$, $p < +\infty$ esetén pedig $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$ ekvivalens azzal, hogy a μ mérték véges.

v) Ha az $\mathcal{F}$ az előző iii) megjegyzésben említett vektorháló, és $a \in X$, akkor a

$$\Phi(f) := f(a) \qquad (f \in \mathcal{F})$$

leképezés nyilván egy pozitív lineáris funkcionál.

vi) A 4.3.1.2. Definíció b) feltételében szereplő $I(f_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ számsorozat monoton növekedése miatt

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \sup_n I(f_n) \leq I(f)$$

teljesül tetszőleges $f \in \mathcal{F}$, $\sup_n f_n \leq f$ mellett. Így $\sup_n f_n \in \mathcal{F}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \leq I(\sup_n f_n) = I(\lim_{n\to\infty} f_n)$$

eleve igaz. Az említett feltételben tehát az I és a „monoton limesz"-operátor felcserélhetőségét követeltük meg, amikor is az I-t *monoton folytonosnak* nevezzük.

vii) A 4.3.1. pontbeli jelölésekkel az $I(f)$ $(f \in \mathcal{F})$ számot az f függvény *Daniell-féle integráljának* is nevezik. Lássunk két fontos illusztratív példát a most bevezetett fogalom hátterét illetően.

a) Legyen az (X, Ω, μ) egy mértéktér,

$$\mathcal{F} := \{f \in L_0(\mu) : \mu(\{f = x\}) < +\infty \quad (0 \neq x \in \mathcal{R}_f)\}.$$

Világos, hogy az $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorháló, és

$$I(f) := \int f \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{F})$$

ezen a vektorhálón egy absztrakt integrál.

b) Tekintsük a valamilyen kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett, valós értékű és folytonos függvények (Stone-féle) $\mathcal{F}$ vektorhálóját. Ezen a vektorhálón az

$$I(f) := \int_a^b f \qquad (f \in \mathcal{F})$$

funkcionál egy absztrakt integrál. (Az itt szereplő $\int_a^b f$ az f függvény Riemann-integrálja.) Ezzel kapcsolatban elég annyit megjegyeznünk, hogy

$$f_n \in \mathcal{F},\ f_{n+1} \le f_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b])$$

esetén a Dini-tétel (ld. 4.2. ix) megjegyzés) miatt az (f_n) sorozat egyenletesen konvergens, amiből $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0$ már következik.

viii) Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ vektorháló egy $\|.\| : \mathcal{F} \to [0,+\infty)$ normával *normált vektorháló*, ha

$$\|f\| \le \|g\| \quad (f,g \in \mathcal{F},\ 0 \le f \le g) \ \text{ és } \ \|h\| = \||h|\| \quad (h \in \mathcal{F}).$$

Megmutatható, hogy ekkor bármilyen $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ folytonos, lineáris funkcionál felírható két folytonos, pozitív lineáris funkcionál különbségeként.

ix) Például a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ Banach-tér (ld. 3.5.) egy normált vektorháló. Ha az (X, Ω, μ) egy mértéktér, $1 \le p \le +\infty$, akkor az $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ Banach-tér szintén normált vektorháló.

x) Ha $X \ne \emptyset$, $\mathcal{G}$ egy X-beli gyűrű (ld. 2.1.), és

$$\mathcal{F} := \mathcal{L}\Big(\{\chi_A : A \in \mathcal{G}\}\Big),$$

akkor könnyen beláthatóan $\{f > \alpha\} \in \mathcal{G}$ $(f \in \mathcal{F}^+,\ \alpha > 0)$, valamint

$$A \in \sigma(\mathcal{F}) \iff A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (A_n \in \mathcal{G},\ n \in \mathbf{N}).$$

xi) A 4.3.1.4. Tétel feltételei mellett minden $p \in [1,+\infty)$ esetén az $\mathcal{F} \cap L^p(\mu)$ halmaz mindenütt sűrű az $L^p(\mu)$-ben a $\|.\|_p$ normára vonatkozóan (ahol a μ a 4.3.1.4. Tételben kapott mérték). Valóban, legyen $f \in L^p(\mu)$ és $\varepsilon > 0$. Nyilván feltehető az , hogy $f \ge 0$, amikor is egy monoton növekedő $f_n \in L_0^+(\mu) \cap L^p(\mu)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $f = \sup_n f_n$. A Lebesgue-tétel (3.5.5. Tétel) alapján ekkor $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$, tehát azt is feltehetjük, hogy $f \in L_0^+(\mu)$. Sőt, azt is, hogy egy alkalmas $A \in \Omega_{\mathcal{F}}$

halmazzal $f = \chi_A$, $\mu(A) = \|\chi_A\|_p^p$ pedig véges. Így a 4.3.1.4. Tétel c) állítása miatt van olyan $G \in \sigma(\mathcal{F})$ halmaz, amire $A \subset G$ és

$$(\mu(G) - \mu(A))^{1/p} = \|\chi_G - f\|_p \leq \varepsilon/2$$

teljesül. Mivel $G \in \sigma(\mathcal{F})$, ezért egy monoton növekedő $u_n \in \mathcal{F}^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\chi_G = \sup_n u_n$, így $u_n \in L^p(\mu)$ és $\lim_{n\to\infty} \|\chi_G - u_n\|_p = 0$. Tehát létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $\|\chi_G - u_N\|_p \leq \varepsilon/2$, amiből

$$\|f - u_N\|_p \leq \|f - \chi_G\|_p + \|\chi_G - u_N\|_p \leq \varepsilon$$

következik.

xii) Tegyük fel, hogy van olyan monoton növekedő $u_n \in \mathcal{F}^+$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat (ld. 4.3.1.4. Tétel), amire

- $\sup_n u_n(x) > 0$ $(x \in X)$ és $\sup_n I(u_n) < +\infty$ teljesül.

(Ez a helyzet pl. akkor, ha $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$, ui. az $u_n := \mathbf{1}$ $(n \in \mathbf{N})$ választás nyilván eleget tesz mindkét követelménynek.) Ekkor a 4.3.1.4. Tételben szereplő μ mérték szigma-véges, következésképpen a μ egyértelműsége egyszerűen a 2.5.4. Tételből következik. Legyen ui.

$$f := \sup_n u_n,\ G_k := \{f > 1/k\} \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Nyilvánvaló, hogy $0 < f \in \mathcal{F}_*^+$, $G_k \in \sigma(\mathcal{F})$ $(k = 1, 2, ...)$ és $X = \bigcup_{k=1}^\infty G_k$. Mivel $\chi_{G_k} \leq k\cdot f$, ezért

$$\mu(G_k) \leq k\cdot \int f\, d\mu = k\cdot \sup_n \int u_n\, d\mu = k\cdot \sup_n I(u_n) < +\infty \qquad (k = 1, 2, ...),$$

ezért a μ valóban szigma-véges. Egyszerűen megmutatható, hogy a $\bullet$ feltételek szükségesek is ahhoz, hogy a 4.3.1.4. Tételbeli μ mérték szigma-véges legyen.

xiii) Legyen $X \neq \emptyset$, a $\mathcal{G}$ egy X-beli gyűrű, a $\tilde{\mu}$ pedig egy véges előmérték a $\mathcal{G}$-n (ld. 2.1, 2.3.1.), valalamint

$$\mathcal{F} := \mathcal{L}\Big(\{\chi_A : A \in \mathcal{G}\}\Big).$$

Ekkor az $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorháló, és az

$$I_{\tilde{\mu}}(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot \tilde{\mu}(A_i) \qquad \Big(f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot \chi_{A_i} \in \mathcal{F}\Big)$$

előírással értelmezett $I_{\tilde{\mu}} : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ leképezés pozitív, lineáris funkcionál. (Mindez könnyen meggondolható, azzal együtt, hogy az $I_{\tilde{\mu}}$ definíciója korrekt, azaz $I_{\tilde{\mu}}(f)$ nem függ az $f \in \mathcal{F}$ függvény aktuális $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot \chi_{A_i}$ felbontásától.) Az $I_{\tilde{\mu}}$ funkcionál

pontosan akkor lesz absztrakt integrál, ha a μ kváziméríték. (Ennek az ekvivalenciának az egyik iránya triviális, a másik a 3.3. eredményeivel analóg módon könnyen belátható.) Nyilván fennáll továbbá, hogy $\Omega_{\mathcal{F}} = \Omega(\mathcal{G})$, ezért a 4.3.1.4. Tétel alapján igaz az alábbi következtetés:

$$\tilde{\mu} \text{ kváziméríték} \implies I_{\tilde{\mu}}(f) = \int f\, d\mu \quad (f \in \mathcal{F}),$$

ahol a μ egy alkalmas mérték az $\Omega(\mathcal{G})$-n. Tehát a μ mértéknek a $\mathcal{G}$-re való leszűkítése megegyezik a $\tilde{\mu}$-mal. Ezzel a már ismert kiterjesztési tételt (ld. 2.5.4. Tétel) kaptuk.

xiv) Tekintsük a 4.3.1.4. Tételben szereplő $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorhálót és az $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ absztrakt integrált. Nem nehéz belátni, hogy az

$$[f, g) := \{(x, t) \in X \times \mathbf{R} : x \in X,\ f(x) \le t < g(x)\} \qquad (g, f \in \mathcal{F},\ f \le g)$$

alakú halmazok $\mathcal{H}$ rendszere félgyűrű, az

$$m : \mathcal{H} \to [0, +\infty),\ m([f, g)) := I(g - f) \quad ([f, g) \in \mathcal{H})$$

leképezés pedig szigma-additív. Terjesszük ki az m-et az $\Omega(\mathcal{H})$ szigma-algebrára (ld. 2.3., 2.5.), a kapott mértéket jelöljük ν-vel. Megmutatható, hogy bármelyik $A \in \Omega_{\mathcal{F}}$ halmaz esetén $A \times [0, 1) \in \Omega(\mathcal{H})$, és az

$$\Omega_{\mathcal{F}} \ni A \mapsto \mu(A) := \nu(A \times [0, 1))$$

leképezés mérték. Az is igaz továbbá, hogy $\nu = \mu \otimes \hat{\mu}_1$ (ahol – emlékeztetőül – a $\hat{\mu}_1$ az egydimenziós Lebesgue-mérték (ld. 2.3.2, 2.7.), a $\mu \otimes \hat{\mu}_1$ pedig a szóban forgó két mérték által meghatározott szorzatmérték (ld. 2.9., 3.15.). Innen viszont tetszőleges $f \in \mathcal{F}^+$ függvényre

$$\int f\, d\mu = \mu \otimes \mu_1([0, f)) = \nu([0, f)) = m([0, f)) = I(f)$$

adódik, amiből a $g = g^+ - g^-$ $(g \in \mathcal{F})$ felbontást figyelembe véve minden $\mathcal{F} \ni g$-re $\int g\, d\mu = I(g)$ is következik.

xv) Tegyük fel, hogy $X \neq \emptyset$, az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén pedig legyen az $\mathcal{F}$ az X halmazon értelmezett valós értékű függvényeknek egy vektorhálója (ld. 4.3.), továbbá

$$\mathcal{G} := \{\{f > 1\} \in \mathcal{P}(X) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{G} \neq \emptyset$, és a $\mathcal{G}$ *háló*, azaz minden $A, B \in \mathcal{G}$ esetén

$$A \cup B, A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\Omega(\mathcal{G})$ a legszűkebb olyan X-beli halmazokból álló szigma-algebra, amire nézve tetszőleges $\mathcal{F}$-hez tartozó függvény mérhető. Ui. minden ilyen X-beli Ω szigma-algebra esetén (ilyen nyilván létezik) $\mathcal{G} \subset \Omega$, mivel $\{f > 1\}$ nem más, mint $f^{-1}[(1, +\infty)]$, és az $(1, +\infty)$ „félegyenes" $\mathbf{R}$-beli Borel-halmaz. Következésképpen $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega$, tehát elegendő azt belátni, hogy az $\mathcal{F}$ vektorháló minden eleme mérhető az $\Omega(\mathcal{G})$-re nézve. Ez viszont a 3.1. pont szerint azzal egyenértékű, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ és $f \in \mathcal{F}$ mellett $\{f > \alpha\} \in \Omega(\mathcal{G})$. Ha $\alpha > 0$, akkor – lévén f/α is $\mathcal{F}$-beli –

$$\{f > \alpha\} = \Big\{\frac{f}{\alpha} > 1\Big\} \in \mathcal{G},$$

így ekkor triviálisan $\{f > \alpha\} \in \Omega(\mathcal{G})$. Innen

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > 1/n\}, \ \ \{f = 0\} = X \setminus \{f > 0\} \qquad (f \in \mathcal{F}^+)$$

miatt $\{f \geq 0\} \in \Omega(\mathcal{G})$ $(f \in \mathcal{F}^+)$ is következik. Mivel $f \in \mathcal{F}^+$ és $\mathbf{R} \ni \alpha < 0$ esetén $\{f > \alpha\} = \{f \geq 0\}$, ezért az $\mathcal{F}^+$ elemeinek az $\Omega(\mathcal{G})$-re való mérhetőségét beláttuk. Tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ függvényre ugyanezt a „szokásos" $f = f^+ - f^-$ felbontásból kapjuk, figyelembe véve azt, hogy $f^+, f^- \in \mathcal{F}^+$. (Nyilvánvaló, hogy a $\mathcal{G}$ halmazrendszer definíciójában az „1" helyett bármelyik $\alpha \in (0, +\infty)$ szám mellett az α is írható, valamint $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$ esetén az „1" kicserélhető egy tetszőleges $\mathbf{R} \ni \alpha$-val. Ez a helyzet pl. az $\mathcal{F} = \mathcal{C}(X)$ vektorhálót illetően.)

xvi) Ha $1 \leq p \in \mathbf{N}$ és $\mathcal{T}$ az $\mathbf{R}^p$-beli euklideszi topológia, akkor az $\mathbf{R}^p$ feletti μ_p Borel-Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.1. Definíció) Borel-mérték az $(\mathbf{R}^p, \mathcal{T})$-n a 4.3.3.2. Definíció értelmében. Továbbá, ha $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^p$ kompakt részhalmaza az $\mathbf{R}^p$-nek, akkor a μ_p mértéknek az X-beli Borel-halmazok rendszerére való ν leszűkítése az egyetlen olyan μ Borel-mérték az $(X, \{A \cap X \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{T}\})$ topologikus téren, hogy

$$\int f \, d\nu = \int f \, d\mu \qquad (f \in C(X)).$$

xvii) A 4.3.2.8. Tétel b) részét *Riesz-tételnek* nevezik.

xviii) Az Urysohn-tétel (ld. 4.1.2.2. Tétel) bizonyítása után mondottakra tekintettel (ld. d) állítás) az alábbi következmény igaz (*Tietze-tétel*):

> *tetszőleges normális $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén minden $\emptyset \neq A \in \mathcal{P}(X)$ zárt halmazon értelmezett $f : A \to [a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a \leq b)$, $f \in \mathcal{C}(A)$ függvényhez van olyan $g : X \to [a, b]$, $g \in \mathcal{C}(X)$ függvény, hogy $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$.*

Más szóval, a jelzett feltételek mellett egy zárt halmazon értelmezett korlátos folytonos függvény „folytatható" az egész téren értelmezett korlátos folytonos függvénnyé, miközben a kiterjesztés során a függvény korlátai nem változnak.

A teljesség érdekében lássuk be a most mondottakat. Ehhez nyilván feltehető, hogy $[a,b]=[-1,1]$. Mutassuk meg először is azt, hogy ha az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz zárt, az $u : A \to [-1,1]$ függvény pedig folytonos, akkor van olyan $v : X \to [-1/3, 1/3]$ folytonos leképezés, hogy

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3} \qquad (x \in A).$$

Ha ui.

$$H := \{-1 \leq u \leq -1/3\},\ K := \{1/3 \leq u \leq 1\},$$

akkor az u folytonossága miatt a H, K halmazok zártak és nyilván diszjunktak. A 4.1.2.2. Tétel miatt ezért létezik olyan $g : X \to [0,1]$ folytonos függvény, amire $g(x) = 0 \quad (x \in H)$ és $g(x) = 1 \quad (x \in K)$. Következésképpen a

$$v := \frac{2}{3} \cdot g - \frac{1}{3} : X \to [-1/3, 1/3]$$

folytonos függvényre $v(x) = -1/3 \quad (x \in H)$ és $v(x) = 1/3 \quad (x \in K)$ teljesül. Így az $|u(x) - v(x)| \leq 2/3 \quad (x \in A)$ egyenlőtlenség már nyilvánvaló.

Alkalmazzuk az előbbieket az $u := f$ függvényre, és legyen $g_0 := v$. A teljes indukcióra gondolva tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén már értelmeztük a folytonos

$$g_n : X \to [-1 + (2/3)^{n+1}, 1 - (2/3)^{n+1}]$$

függvényt úgy, hogy

$$|f(x) - g_n(x)| \leq (2/3)^{n+1} \qquad (x \in A).$$

Válasszuk ekkor a fentiekben az

$$u := (3/2)^{n+1} \cdot (f - g_n)$$

függvényt, az ennek megfelelően kapott folytonos $v : X \to [-1/3, 1/3]$ függvényre tehát

$$|(3/2)^{n+1} \cdot (f(x) - g_n(x))| \leq 2/3 \qquad (x \in A).$$

Ebből az adódik, hogy a

$$h_{n+1} := \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot v : X \to [-2^{n+1}/3^{n+2}, 2^{n+1}/3^{n+2}]$$

folytonos függvényre

$$|f(x) - g_n(x) - h_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+2} \qquad (x \in A).$$

Ha

$$g_{n+1} := g_n + h_{n+1},$$

akkor a g_{n+1} folytonos, és

$$|g_{n+1}(x)| \le |g_n(x)| + |h_{n+1}(x)| \le$$

$$1 - (2/3)^{n+1} + 2^{n+1}/3^{n+2} = 1 - (2/3)^{n+2} \qquad (x \in X).$$

Innen viszont azt kapjuk, hogy tetszőleges $m, n, p \in \mathbf{N}$, $m, n \ge p$ és $x \in X$ mellett

$$(*) \qquad |g_m(x) - g_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \right| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} h_{k+1}(x) \right| \le$$

$$\sum_{k=n}^{m-1} |h_{k+1}(x)| \le \sum_{k=p}^{\infty} |h_{k+1}(x)| \le \sum_{k=p}^{\infty} 2^{k+1}/3^{k+2} = \frac{2^{p+1}}{3^{p+2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}.$$

Következésképpen minden $x \in X$ helyen a $(g_n(x))$ számsorozat (lévén az előbbiek szerint Cauchy-sorozat) konvergens, legyen

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Világos továbbá, hogy a konstrukció alapján $g : X \to [-1, 1]$. Mivel (ld. fent)

$$|f(x) - g_n(x)| \le (2/3)^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad (x \in A),$$

ezért $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$, azaz $g_{|A} = f$. Lássuk be, hogy a g folytonos is. Legyen ehhez $a \in X$, amikor is az előbbi $(*)$ (egyenletes) Cauchy-kritérium szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amivel

$$|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon \qquad (x \in X,\ N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Tehát minden $N < n \in \mathbf{N}$, $x \in X$ mellett

$$|g(x) - g_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |g_n(x) - g_m(x)| \le \varepsilon$$

adódik. Ha $N < n \in \mathbf{N}$ (rögzített), akkor $g_n \in \mathcal{C}\{a\}$ miatt megadható olyan $K(a)$ környezet, hogy

$$|g_n(x) - g_n(a)| < \varepsilon \qquad (x \in K(a)),$$

és így egyúttal

$$|g(x) - g(a)| \le$$

$$|g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(a)| + |g_n(a) - g(a)| \le 3\varepsilon \qquad (x \in K(a)).$$

Ez azt jelenti, hogy $g \in \mathcal{C}\{a\}$.

xix) Legyen az $(X, \mathcal{T})$ kompakt topologikus T_2-tér, az $I : \mathcal{C}(X) \to \mathbf{R}$ pedig a $\|.\|_\infty$ értelmében folytonos, lineáris funkcionál. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mu : \mathcal{B}_0(X) \to \mathbf{R}$ előjeles mérték (ld. 2.11.), hogy minden $f \in \mathcal{C}(X)$ esetén $I(f) = \int f \, d\mu$.

xx) Ha az $(X, \mathcal{T})$ lokálisan kompakt tér a végtelenben megszámlálható, akkor tetszőleges $\mu \in \lambda_0(X)$ mérték reguláris (ld. 4.3.2.6. Definíció) és szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció), továbbá bármelyik $A \in \mathcal{B}_0(X)$, $\mu(A) < +\infty$ halmazhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ és olyan $K \in \mathcal{B}_0(X)$ kompakt halmaz, hogy

$$K \subset A \subset G, \ \mu(G \setminus K) < \varepsilon.$$

Ui. a jelzett μ mérték szigma-végessége a 4.1.4.3. Lemmából következik, a Daniell–Stone-tétel (4.3.1.4. Tétel) c) állítása miatt pedig a μ regularitásához csak annyit kell belátni, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{B}_0(X)$ esetén

$$(*) \qquad \mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B}_0(X), \ F \subset A, \ F \text{ kompakt}\}.$$

Ha $\mu(A) < +\infty$ és $\varepsilon > 0$, akkor egy alkalmasan vett $G \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ halmazzal $A \subset G$, $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$ igaz. A μ szigma-végességét kihasználva a „szokásos" technikával kapjuk ugyanezt a $\mu(A) = +\infty$ esetben is. Ezért van olyan $H \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{T}$ halmaz is, amivel $X \setminus A \subset H$, valamint $\mu(H \setminus (X \setminus A)) < \varepsilon$ teljesül. Az $F := X \setminus H \subset A$ halmaz nyilván zárt, $\mathcal{B}_0(X)$-beli, és $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$. Innen már „majdnem" a $(*)$-ot kapjuk, nevezetesen azt, hogy a $(*)$ egyelőre az „F zárt" feltételezéssel igaz.

Mivel az $(X, \mathcal{T})$ tér a végtelenben megszámlálható, ezért (ld. 4.1.4.3. Lemma) kompakt $L_n \in \mathcal{B}_0(X)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazoknak egy monoton növekedő sorozatával $X = \bigcup_{n=0}^\infty L_n$. Ha viszont $F \in \mathcal{B}_0(X)$ zárt halmaz, akkor $K_n := F \cap L_n \in \mathcal{B}_0(X)$ minden $n \in \mathbf{N}$ mellett kompakt, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, és $\bigcup_{n=0}^\infty K_n = F$. A 2.3.1.4. Tételt alkalmazva tehát

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \sup_n \mu(K_n),$$

amiből a $(*)$ adódik. Ebből a meggondolásból továbbá az is következik, hogy hacsak $\mu(A) < +\infty$, ekkor egy alkalmas kompakt $K \in \mathcal{B}_0(X)$ halmazzal $K \subset F$, valamint $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$ is fennáll. Így $K \subset A \subset G$, és

$$\mu(G \setminus K) \le \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F) + \mu(F \setminus K) < 3\varepsilon.$$

xxi) Az előbbi megjegyzés feltételei mellett tetszőleges $p \in [1, +\infty)$ esetén a $\mathcal{K}(X)$ halmaz a ($\|.\|_p$-norma szerint értve) mindenütt sűrű az $L^p(\mu)$ térben. Ha ui. $f \in \mathcal{K}(X)$, akkor $|f|^p \in \mathcal{K}(X) \subset L^1(\mu)$, így $\mathcal{K}(X) \subset L^p(\mu)$. Alkalmazható tehát a xi) megjegyzés.

xxii) Könnyű példát konstruálni annak az igazolására, hogy xx)-ban lényeges a tér végtelenben való megszámlálhatósága. Ha ui. $(X, \mathcal{P}(X))$ olyan diszkrét tér, ahol az X nem megszámlálhatóan végtelen halmaz, és

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ legf. megszámlálható}) \\ \\ +\infty & (\text{különben}) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)),$$

akkor – mivel most a kompakt halmazok éppen a véges részhalmazai az X-nek – minden kompakt $K \in \mathcal{P}(X)$ esetén $\mu(K) = 0$. Tehát a μ nem reguláris.

xxiii) Legyen $X \neq \emptyset$, az $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ halmaz pedig Stone-féle vektorháló (ld. 4.3.2.1. Definíció). Az $I : \mathcal{F}^+ \to \mathbf{R}$ funkcionálról tegyük fel, hogy

- *additív,* azaz $I(f+g) = I(f) + I(g) \quad (f, g \in \mathcal{F}^+)$;
- *pozitív homogén,* tehát $I(cf) = c \cdot I(f) \quad (f \in \mathcal{F}^+, 0 \leq c \in \mathbf{R})$.

Ekkor egyértelműen létezik olyan $J : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionál, hogy

$$J(f) = I(f) \qquad (f \in \mathcal{F}^+).$$

Valóban, tetszőleges $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén a

$$g := \frac{f + |f|}{2}, \quad h := \frac{|f| - f}{2}$$

függvényekre nyiván igazak az alábbiak:

$$f = g - h, \; g \geq 0, \; h \geq 0.$$

A Stone-féle vektorháló értelmezése alapján világos továbbá, hogy g, $h \in \mathcal{F}^+$. Tegyük fel, hogy a G, $H \in \mathcal{F}^+$ függvényekkel

$$g - h = G - H.$$

Ekkor $g + H = h + G \in \mathcal{F}^+$, így

$$I(g) + I(H) = I(g + H) = I(h + G) = I(h) + I(G).$$

Következésképpen $I(g) - I(h) = I(G) - I(H)$, más szóval az $I(G) - I(H)$ különbség nem függ maguktól a G, H függvényektől, csupán a $G - H$ különbségtől, azaz az f-től.

Ez az észrevétel módot arra, hogy a fenti $I : \mathcal{F}^+ \to \mathbf{R}$ funkcionált kiterjesszük az $\mathcal{F}$ halmazra az alábbiak szerint: ha $f \in \mathcal{F}$ és (az előbbiek alapján létező) valamilyen g, $h \in \mathcal{F}^+$ függvényekkel $f = g - h$, akkor legyen

$$J(f) := I(g) - I(h).$$

Ha itt $f \in \mathcal{F}^+$, akkor a $g := f$, $h \equiv 0$ választással $J(f) = I(f)$, tehát a J valóban az I kiterjesztése.

Azt sem nehéz belátni, hogy a J lineáris. Ti. $f, F \in \mathcal{F}$ esetén az $f = g - h$, $F = G - H$ $(g, h, G, H \in \mathcal{F}^+)$ felbontásokkal

$$f + F = (g + G) - (h + H),$$

ahol $g + G, h + H \in \mathcal{F}^+$. Ezért a J értelmezésére tekintettel

$$J(f + F) = I(g + G) - I(h + H) = I(g) + I(G) - I(h) - I(H) =$$

$$(I(g) - I(h)) + (I(G) - I(H)) = J(f) + J(F).$$

A J tehát additív. Speciálisan az $F := F_0 \equiv 0$ esetben

$$J(f) = J(f + F_0) = J(f) + J(F_0),$$

amiből $J(F_0) = 0$ rögtön adódik.

Ha $f \in \mathcal{F}$ és $0 \leq c \in \mathbf{R}$, akkor az előbbi $g, h \in \mathcal{F}^+$ függvényekkel

$$cf = (cg) - (ch),$$

ahol $cg, ch \in \mathcal{F}^+$. Így

$$J(cf) = I(cg) - I(ch) = c \cdot I(g) - c \cdot I(h) = c \cdot (I(g) - I(h)) = c \cdot J(f).$$

Ha viszont az utóbbiakban $0 \geq c \in \mathbf{R}$, akkor $-c \geq 0$, ezért

$$cf = (-c)h - (-c)g = (-c)(-f),$$

továbbá $(-c)f \in \mathcal{F}$ és $(-c)g, (-c)h \in \mathcal{F}^+$. Következésképpen

$$J(cf) = (-c)J(-f).$$

Mivel (ld. fent)

$$0 = J(F_0) = J(f + (-f)) = J(f) + J(-f),$$

ezért $J(-f) = -J(f)$. Ezt figyelembe véve végül azt kapjuk, hogy

$$J(cf) = (-c)J(-f) = (-c)(-J(f)) = cJ(f),$$

azaz a J funkcionál homogén is, és így lineáris.

Amennyiben a $J^* : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionál is az I kiterjesztése, akkor $J^* = J$. Ha ui. $f \in \mathcal{F}$ és a $g, h \in \mathcal{F}^+$ függvényekkel $f = g - h$, akkor

$$J(f) = I(g) - I(h) = J^*(g) - J^*(h) = J^*(g - h) = J^*(f).$$

xxiv) Tekintsük az előbbi megjegyzésben szereplő $\mathcal{F}$ Stone-féle vektorhálót. Az $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionál *korlátos,* ha

$$(*) \qquad \sup\{|I(g)| : g \in \mathcal{F},\, |g| \le f\} < +\infty \qquad (f \in \mathcal{F}^+).$$

Könnyű belátni, hogy minden pozitív lineáris $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ funkcionál az előbbi értelemben korlátos. Tegyük fel ti., hogy $f \in \mathcal{F}^+$, $g \in \mathcal{F}$ és $|g| \le f$, akkor

$$f - g,\ f + g \ge 0$$

miatt az I pozitivitása alapján

$$I(f - g) = I(f) - I(g) \ge 0,\ I(f + g) = I(f) + I(g) \ge 0.$$

Tehát $|I(g)| \le I(f)$, amiből a fenti korlátosság már nyilvánvaló. Speciálisan, ha valamilyen lokálisan kompakt $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén $\mathcal{F} := \mathcal{K}(X)$, és az

$$I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$$

lineáris funkcionál a $\|h\| = \max\{|h(x)| : x \in X\}$ $(h \in \mathcal{K}(X))$ norma szerint korlátos, azaz valamilyen $\alpha \ge 0$ konstanssal

$$|I(h)| \le \alpha \cdot \|h\| \qquad (h \in \mathcal{K}(X)),$$

akkor fennáll a $(*)$ becslés. Ekkor ui. tetszőleges $f \in \mathcal{K}(X)^+$, $g \in \mathcal{K}(X)$, $|g| \le f$ esetén nyilván $\|g\| \le \|f\|$, ezért

$$|I(g)| \le \alpha \cdot \|g\| \le \alpha \cdot \|f\|.$$

Tehát egyúttal

$$\sup\{|I(g)| : g \in \mathcal{K}(X),\, |g| \le f\} \le \alpha \cdot \|f\| < +\infty.$$

xxv) Mutassuk meg, hogy (ld. xxiv) megjegyzés) tetszőleges korlátos lineáris $I : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ funkcionál előállítható $I = I_1 - I_2$ alakban, ahol az I_1, $I_2 : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ leképezések pozitív lineáris funkcionálok. Legyen ui.

$$I_1(f) := \sup\{I(g) : g \in \mathcal{F}^+,\, g \le f\} \qquad (f \in \mathcal{F}^+).$$

Ekkor $I_1 : \mathcal{F}^+ \to \mathbf{R}$ és $I_1(f) \ge I(f)$ $(f \in \mathcal{F}^+)$. Ha $f, g \in \mathcal{F}^+$, $g \le f$ és $0 \le c \in \mathbf{R}$, akkor nyilván $cg \le cf$, így

$$c \cdot I_1(f) = \sup\{c \cdot I(g) : g \in \mathcal{F}^+,\, g \le f\} = \sup\{I(cg) : g \in \mathcal{F}^+,\, g \le f\} =$$

$$\sup\{I(G) : G \in \mathcal{F}^+,\, G \le cf\} = I_1(cf).$$

Tegyük fel, hogy $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}^+$, amikor is minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan $g_1,\ g_2 \in \mathcal{F}^+$ függvények, hogy $g_i \le f_i$ és $I(g_i) > I_1(f_i) - \varepsilon/2 \quad (i = 1, 2)$. Mivel $g_1 + g_2,\ f_1 + f_2 \in \mathcal{F}^+$ és $g_1 + g_2 \le f_1 + f_2$, ezért

$$I_1(f_1 + f_2) \ge I(g_1 + g_2) = I(g_1) + I(g_2) > I_1(f_1) + I_1(f_2) - \varepsilon.$$

Innen (az $\varepsilon \to 0$ határátmenet után) kapjuk az

$$I_1(f_1 + f_2) \ge I_1(f_1) + I_1(f_2)$$

egyenlőtlenséget. Ugyanakkor válasszuk a $g \in \mathcal{F}^+$ függvényt úgy, hogy

$$g \le f_1 + f_2,\ I(g) > I_1(f_1 + f_2) - \varepsilon,$$

és legyen

$$g_1 := \min\{g, f_1\},\ g_2 := g - g_1.$$

Ekkor $0 \le g_1 \le f_1$ és $0 \le g_2 \le f_2$, valamint $g = g_1 + g_2$. Következésképpen

$$I_1(f_1 + f_2) < I(g) + \varepsilon = I(g_1) + I(g_2) + \varepsilon \le I_1(f_1) + I_1(f_2) + \varepsilon,$$

és ($\varepsilon \to 0$ határátmenettel) $I_1(f_1 + f_2) \le I_1(f_1) + I_1(f_2)$.

Ezzel beláttuk, hogy az előbbi I_1 funkcionál additív és pozitív homogén. A xxiii) megjegyzés szerint viszont (az I_1-et kiterjesztve az $\mathcal{F}$-re) feltehető, hogy az I_1 az $\mathcal{F}$-en értelmezett lineáris funkcionál. Az I_1 pozitív is, hiszen $f \in \mathcal{F}^+$ esetén (a $g_0 \equiv 0 \in \mathcal{F}^+$ függvénnyel) $g_0 \le f$, így

$$I_1(f) \ge I(g_0) = 0.$$

Ha $I_2 := I_1 - I$, akkor az I_2 is triviálisan lineáris, az $I_1(f) \ge I(f) \quad (f \in \mathcal{F}^+)$ becslés miatt pedig pozitív.

Megjegyezzük, hogy

$$I_2(f) = -\inf\{I(g) : g \in \mathcal{F}^+,\ g \le f\} \qquad (f \in \mathcal{F}^+).$$

xxvi) Legyen $X \ne \emptyset$, ekkor tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér és $A \subset X$ halmaz esetén $\chi_A \in \mathcal{M}(X)$ akkor és csak akkor teljesül, ha az A nyílt. Ui., ha ez utóbbi igaz és $a \in A$, akkor egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A$. Ezért $\chi_A(x) = 1 \quad (x \in A)$, így $\chi_A \in \mathcal{C}\{a\}$. Ha viszont $b \notin A$, azaz $\chi_A(b) = 0$ és $\varepsilon > 0$, akkor nyilván tetszőleges $K(b)$ környezettel

$$\chi_A(x) > \chi_A(b) - \varepsilon = -\varepsilon \qquad (x \in K(b)),$$

tehát a χ_A függvény a b-ben alulról félig folytonos. Fordítva, ha a χ_A függvény alulról félig folytonos, akkor indirekt módon tegyük fel, hogy az A nem nyílt. Ez azt

jelenti, hogy valamilyen $a \in A$ pontnak tetszőleges $K(a)$ környezetében van olyan $c \in K(a)$, hogy $c \notin A$. Az alulról félig folytonosság miatt az előbbi $K(a)$ környezet megválasztható úgy is, hogy minden $x \in K(a)$ helyen

$$\chi_A(x) > \chi_A(a) - 1/2 = 1/2.$$

Viszont az előbbi c-vel $\chi_A(c) = 0$ miatt ez nem teljesül, tehát az A nyílt.

xxvii) Lássuk be, hogy az előző megjegyzésbeli $(X, \mathcal{T})$ tér és egy $f : X \to [0, +\infty)$ függvény esetén

$$f \in \mathcal{M}(X) \iff \{f > \alpha\} \in \mathcal{T} \quad (0 < \alpha \in \mathbf{R}).$$

Ha ui. $f \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha > 0$ és $x \in \{f > \alpha\}$, akkor az alulról félig folytonosságra hivatkozva $f(x) > \alpha$ miatt van olyan $\varepsilon > 0$ és $K(x)$ környezet, hogy

$$f(t) > f(x) - \varepsilon > \alpha \qquad (t \in K(x)).$$

Ez azt jelenti, hogy $K(x) \subset \{f > \alpha\}$, más szóval az $\{f > \alpha\}$ halmaz nyílt. Ha viszont abból indulunk ki, hogy az $\{f > \alpha\}$ $(0 < \alpha \in \mathbf{R})$ halmazok nyíltak, akkor tetszőleges $x \in X$, $f(x) > 0$ esetén bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is megadva van olyan $\alpha > 0$, hogy $f(x) > \alpha > f(x) - \varepsilon$. Egyrészt tehát $x \in \{f > \alpha\}$, másrészt az utóbbi nívóhalmaz feltételezett nyíltsága miatt valamilyen $K(x)$ környezettel az is teljesül, hogy $K(x) \subset \{f > \alpha\}$. Így $f(t) > \alpha > f(x) - \varepsilon$ $(t \in K(x))$, azaz az f függvény az x-ben alulról félig folytonos. Ha pedig $x \in X$, $f(x) = 0$, akkor $f \geq 0$ miatt az f „automatikusan" alulról félig folytonos az x-ben.

xxviii) Tekintsünk egy $(X, \mathcal{P}(X))$ diszkrét teret, ahol az X a megszámlálhatónál nagyobb számosságú. Ekkor tetszőleges $A \subset X$ „nyílt", ill. az A pontosan akkor kompakt, ha véges. Nyilván minden $f : X \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, ezért egyúttal $\mathcal{M}(X) = [0, +\infty]^X$. Továbbá egy $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén $f \in \mathcal{K}(X)$ akkor és csak akkor igaz, ha valamilyen véges $A \subset X$ halmazzal $f(x) = 0$ $(x \in X \setminus A)$. Ha tehát $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$, azaz $f = \sup_n f_n$ egy $f_n \in \mathcal{K}(X)_+$, $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozattal, akkor $f_n(x) = 0$ $(x \in X \setminus A_n)$, ahol az $A_n \subset X$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok végesek. Így az $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ legfeljebb megszámlálható halmazzal

$$f(x) = 0 \qquad (x \in X \setminus A).$$

Mindez nyilván „meg is fordítható". Ti., ha az $f : X \to [0, +\infty)$ ilyen függvény és az $A \subset X$ pl. véges, akkor eleve $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$. Különben legyen $A = \{a_n \in X : n \in \mathbf{N}\}$ és

$$A_n := \{a_0, ..., a_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az $f_n := f \cdot \chi_{A_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekre $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $f_n \in \mathcal{K}(X)^+$ $(n \in \mathbf{N})$ és $f = \sup_n f_n$ teljesül, azaz $f \in \mathcal{K}(X)_*^+$. Tehát egy $f : X \to [0, +\infty]$ függvényt illetően

az $f \in \mathcal{K}(X)^*_+$ tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha az f az előbbi tulajdonságú. Ezért bármelyik $Y \subset X$ nem megszámlálhatóan végtelen halmaz esetén azt mondhatjuk, hogy egyetlen $f \in \mathcal{K}(X)^+_*$ függvénnyel sem igaz a $\chi_Y \leq f$ egyenlőtlenség. Más szóval (ld. 4.3.1.4. Tétel bizonyítása)

$$\mu^*(Y) = \inf\{I^*(f) : f \in \mathcal{K}(X)^+_*,\ \chi_Y \leq f\} = \inf \emptyset = +\infty,$$

és (ld. 4.3.)

$$\hat{\mu}(Y) = \hat{I}(\chi_Y) = \inf\{\tilde{I}(g) : g \in \mathcal{M}(X),\ \chi_Y \leq g\} = \tilde{I}(\chi_Y) =$$

$$\sup\{I(g) : g \in \mathcal{K}(X)_+,\ g \leq \chi_Y\} = \sup\{I(\chi_A) : A \subset Y,\ |A| < +\infty\}$$

(ahol az $|A|$ szimbólum az A halmaz számosságát jelöli, az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ pedig pozitív lineáris funkcionál).

xxix) Egyszerűen belátható, hogy a 4.3.3.14. Lemma igaz marad akkor is, ha az abban szereplő f-ről $f \in \mathcal{K}(X)$ helyett azt tesszük fel, hogy $f \in \mathcal{C}_1(X)$ (ld. 4.1.), azaz az $f : X \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és minden $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $K \subset X$ kompakt halmazzal

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in X \setminus K).$$

xxx) Vegyük a komplex számok $\mathbf{C}$ additív csoportját a „szokásos" topológiával. Így nyilván topologikus csoportot kapunk. Ha

$$A := \{x + \imath/x \in \mathbf{C} : 0 < x \in \mathbf{R}\},\ B := \mathbf{R},$$

akkor az A is és a B is zárt, de (könnyen láthatóan)

$$A + B = \{x + \imath y \in \mathbf{C} : x, y \in \mathbf{R},\ y > 0\}$$

nem zárt. Ez azt jelenti, hogy a 4.3.3.13. Lemma zárt halmazokra általában nem igaz.

xxxi) Nem nehéz meggondolni, hogy a topologikus csoport definíciójában a $\wp$ csoportművelet és az $X \ni x \mapsto x^{-1} \in X$ leképezés folytonosságának a követelménye ekvivalens azzal, hogy az

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x^{-1}y \in X$$

függvény legyen folytonos.

xxxii) Legyen az $\emptyset \neq X$ halmaz véges, $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, és egy $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén jelöljük $|A|$-val az A számosságát. Tegyük fel, hogy adott az X-ben egy $\wp$ csoportművelet, ekkor az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ nyilván topologikus csoport, és a

$$\mu(A) := \frac{|A|}{|X|} \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

(normalizált) Haar-mérték. A megfelelő Haar-integrál pedig a következő:

$$\int f\,d\mu = \frac{1}{|X|}\cdot \sum_{z\in X} f(z) \qquad (f : X \to \mathbf{R}).$$

xxxiii) Adott $n = 1, 2, \ldots$ mellett tekintsük az $\mathbf{R}^n$ teret a már többször említett „szokásos" (pl. az euklideszi) topológiával és az additív csoportstruktúrával. Ekkor az $\mathbf{R}^n$ feletti Borel-Lebesgue-mérték egy eltolás invariáns Haar-mérték (ld. 2.7.).

xxxiv) Jelöljön most az X egy nem véges halmazt, legyen $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$. Ekkor a $\mathcal{K}(X)^+$ pontosan azokból az $f : X \to [0, +\infty)$ függvényekből áll, amik egy véges $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazon kívül nullával egyenlők. (Egyrészt ui. nyilván minden $f : X \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, másrészt egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha véges.) Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ valamilyen $\wp$ csoportművelettel (multiplikatív) topologikus csoport, legyen az illető $\wp$ művelet egységeleme az e. Ha

$$\delta(x) := \begin{cases} 1 & (x = e) \\ \\ 0 & (e \neq x \in X), \end{cases}$$

akkor tetszőleges $f \in \mathcal{K}(X)^+$ függvény valamilyen véges $Y \subset X$ halmazzal és alkalmas $\alpha_y \quad (y \in Y)$ együtthatókkal egyértelműen előállítható az

$$f = \sum_{y\in Y} \alpha_y \cdot ({}_{y^{-1}}\delta)$$

alakban (ahol $Y = \operatorname{supp} f$ és $\alpha_y = f(y) \quad (y \in Y)$). Ha tehát az $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ leképezés bal invariáns Haar-integrál, akkor

$$I(f) = \sum_{y\in Y} \alpha_y \cdot I({}_{y^{-1}}\delta) = \Big(\sum_{y\in Y} \alpha_y\Big)\cdot I(\delta).$$

Így pl. $I(\delta) = 1$ esetén a megfelelő Haar-mérték a következő:

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & (A \text{ véges}) \\ \\ +\infty & (A \text{ nem véges}) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{P}(X)).$$

Könnyen belátható, hogy ez a csoport unimoduláris. Ui. (a δ értelmezéséből következően) egyrészt

$${}_b\delta = \delta_b \qquad (b \in X).$$

Másrészt ebből adódóan $I({}_a f) = I(f) = I(f_a) \quad (a \in X)$, hiszen az $f \in \mathcal{K}(X)^+$ fenti előállítását figyelembe véve

$$f_a(x) = f(xa) = \sum_{y\in Y} \alpha_y \cdot \delta_{y^{-1}}(xa) = \sum_{y\in Y} \alpha_y \cdot \delta(xay^{-1}) =$$

$$\sum_{y\in Y}\alpha_y\cdot\delta_{ay^{-1}}(x)=\sum_{y\in Y}\alpha_y\cdot{}_{ay^{-1}}\delta(x)\qquad(x\in X),$$

és így $I(f_a)=\Big(\sum_{y\in Y}\alpha_y\Big)\cdot I(\delta)=I(f)$.

Megjegyezzük, hogy ha a most vizsgált csoport nem diszkrét, azaz $\mathcal{T}\neq\mathcal{P}(X)$, és a ν bal invariáns Haar-mérték a csoporton, akkor minden $x\in X$ esetén $\nu(\{x\})=0$. Ti.

$$\nu(\{x\})=\nu(x\{e\})=\nu(\{e\}).$$

Legyen $U\in\mathcal{T}$, $e\in U$ és $0<\nu(U)<+\infty$. Ha az U végtelen halmaz, akkor tetszőleges $x_n\in U$, $x_n\neq x_m$ $(n\neq m\in\mathbf{N})$ esetén

$$+\infty>\nu(U)\geq\nu(\{x_0,x_1,...\})=\nu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(x_k\{e\})\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\nu(x_k\{e\})=\sum_{n=0}^{\infty}\nu(\{e\})$$

miatt $\sum_{n=0}^{\infty}\nu(\{e\})<+\infty$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\nu(\{e\})=0$.

xxxv) Az

$$\mathcal{X}:=\{A\in\mathbf{R}^{2\times 2}:\ \det A\neq 0\}$$

halmaz a $\wp$ mátrixszorzásra nézve nyilván egy (nem kommutatív) csoport (*lineáris csoport*, speciálisan az

$$\mathcal{X}_0:=\{A\in\mathcal{X}:|\det A|=1\}$$

részcsoport (*Möbius-csoport*)). Ha ebben az $\mathcal{X}$-ben az

$$\mathcal{X}\ni B=\begin{bmatrix}x & v\\ y & z\end{bmatrix}\mapsto\Phi(B):=(x,y,v,z)\in\mathbf{R}^4$$

megfeleltetés révén az $\mathbf{R}^4$ által indukált „szokásos" $\mathcal{T}$ topológiát tekintjük, akkor könnyen belátható módon ismét egy $(\mathcal{X},\mathcal{T},\wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoportot kapunk. Egy $A\in\mathcal{X}$ mátrix mellett tekintsük a σ_A, $\delta_A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ leképezéseket, ahol

$$\sigma_A(B):=\wp(A,B),\ \delta_A(B):=\wp(B,A)\qquad(B\in\mathcal{X}).$$

Egy $A\in\mathcal{X}$ mátrix mellett tekintsük a σ_A, $\delta_A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ leképezéseket, ahol

$$\sigma_A(B):=\wp(A,B),\ \delta_A(B):=\wp(B,A)\qquad(B\in\mathcal{X}).$$

Ezek (az előbbi $\Phi:\mathcal{X}\to\mathbf{R}^4$ „közvetítésre" tekintettel) differenciálható $\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ függvények. Vezessük be az

$$S(A):=|\det\sigma_A'|,\quad D(A):=|\det\delta_A'|\qquad(A\in\mathcal{X})$$

jelöléseket, ekkor könnyen ellenőrizhetően

$$S(A) = D(A) = \det \sigma'_A = \det \delta'_A = (\det A)^2.$$

Valóban, ha

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{X},$$

akkor

$$\sigma_A(B) = \begin{bmatrix} ax + cy & av + cz \\ bx + dy & bv + dz \end{bmatrix} \qquad \left(B := \begin{bmatrix} x & v \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \right).$$

Ezért

$$\Psi(x, y, v, z) := \Phi(\sigma_A(B)) = (ax + cy, bx + dy, av + cz, bv + dz),$$

és így a $\Theta \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ nullamátrixszal

$$\sigma'_A(B) := \Psi'(x, y, v, z) = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \Theta \\ \Theta & A \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4\times 4}.$$

Innen már világos, hogy

$$\det \sigma'_A(B) = (\det A)^2.$$

A $\det \delta'_A(B) = (\det A)^2$ egyenlőséget analóg módon kapjuk.

Legyen $f \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ és (az f-et azonosítva az $f \circ \Phi^{-1} \in \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ függvénnyel)

$$I(f) := \int_{\mathbf{R}^4} f/S \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y, z, v)}{(xz - vy)^2} \, dx \, dy \, dz \, dv \right).$$

(Az itt szereplő integrál az f/S kompakt tartójú folytonos függvény 4-szeres Riemann-integrálja az $\mathbf{R}^4$-en.) Az elemi analízisből jól ismert integráltranszformáció segítségével a következőt mondhatjuk: bármelyik $f \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ függvény és $A \in \mathcal{X}$ halmaz esetén

$$I({}_{A^{-1}}f) = \int_{\mathbf{R}^4} {}_{A^{-1}}f/S = \int_{\mathbf{R}^4} \left(({}_{A^{-1}}f) \circ \sigma_A \right) \cdot \frac{S(A)}{S \circ \sigma_A} = \int_{\mathbf{R}^4} f/S = I(f),$$

tehát az I eleget tesz a Haar-tétel (4.3.3.15. Tétel) 4° állításának. Mivel ugyanezen tétel 1°, 2°, 3° kitételei triviálisan teljesülnek az I-re, ezért az I egy bal invariáns Haar-integrál. Hasonlóan látható be, hogy egyúttal jobb invariáns is.

xxxvi) Az előbbi megjegyzés utolsó mondata nem általános érvényű. Vegyük ugyanis a xxxv) megjegyzésben szereplő mátrixok közül csupán az

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R})$$

alakúakat (*affin csoport*), és legyen most az $\mathcal{X}$ ezeknek a halmaza. Az

$$\mathcal{X} \ni B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \theta(B) := (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

megfeleltetés révén tekintsük az $\mathcal{X}$-et, mint az $\mathbf{R}^2$ topologikus alterét (újfent, de ezúttal a „szokásos" $\mathbf{R}^2$-beli topológiára nézve). Az $\mathcal{X}$-ben a mátrixszorzást vezetve be, ismét egy lokálisan kompakt topologikus csoportot kapunk. Ha az előző megjegyzésbeli analóg jelöléseket használjuk, akkor az

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$$

mátrixszal

$$\sigma_A(B) = \begin{bmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \delta_A(B) = \begin{bmatrix} ax & bx+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(B := \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \right).$$

Így

$$\psi(x, y) := \theta(\sigma_A(B)) = (ax, ay + b), \ \ \phi(x, y) := \theta(\delta_A(B)) = (ax, bx + y),$$

következésképpen

$$\sigma'_A(B) := \psi'(x, y) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \ \ \delta'_A(B) := \phi'(x, y) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$S(A) = a^2, \ D(A) = |a| \qquad (a,\, b \in \mathbf{R},\, a \neq 0).$$

A xxxv)-höz hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ esetén (az f-et azonosítva az $f \circ \theta^{-1} \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvénnyel)

$$I_1(f) := \int_{\mathbf{R}^2} f/S \ \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{x^2}\, dx\, dy \right),$$

$$I_2(f) := \int_{\mathbf{R}^2} f/D \ \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{|x|}\, dx\, dy \right)$$

a $\mathcal{K}(\mathcal{X})$-en értelmezett bal, és jobb invariáns Haar-integrál. Ez a példa tehát azt is illusztrálja, hogy a két integrál nem feltétlenül esik egybe.

xxxvii) A xxxv), xxxvi) megjegyzésekben szereplő példák speciáis esetei egy általánosabb típusnak. Nevezetesen, tegyük fel, hogy a szóban forgó $(X, \mathcal{T}, \wp)$ topologikus csoport rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal:

1° az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén homeomorf (az $\mathbf{R}^n$ „szokásos" topológiájára nézve) az $\mathbf{R}^n$ egy nyílt részhalmaza által meghatározott topologikus alterével;

2° következésképpen a $\wp$ csoportművelet azonosítható egy

$$F = (F_1, ..., F_n) \in \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$$

leképezéssel, ahol feltesszük, hogy léteznek és folytonosak a

$$\partial_k F_j \qquad (j \in \{1, ..., n\},\ k \in \{1, ..., 2n\}$$

parciális deriváltfüggvények;

3° bármelyik $a \in X$ esetén (a 2° értelmében folytonosan differenciálható)

$$\sigma_a(x) := \wp(a, x),\ \delta_a(x) := \wp(x, a) \qquad (x \in X)$$

függvények derivált (Jacobi-)mátrixfüggvényei konstansfüggvények (tehát csak az a-tól függnek).

Legyen ezek után

$$S(a) := |\det \sigma'_a|,\ D(a) := |\det \delta'_a| \qquad (a \in X).$$

Mivel

$$\sigma_a \circ \sigma_b(x) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = \wp(a, \sigma_b(x)) = \wp(a, \wp(b, x)) =$$
$$\wp(ab, x) = \sigma_{ab}(x) \qquad (x \in X),$$

ezért $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$, és így tetszőleges $a, b \in X$ helyeken

$$S(ab) = |\det \sigma'_{ab}| = |\det ((\sigma'_a \circ \sigma_b) \cdot \sigma'_b)| = |\det (\sigma'_a \circ \sigma_b)| \cdot |\det \sigma'_b| = S(a) \cdot S(b),$$

továbbá ugyanígy

$$D(ab) = D(a) \cdot D(b).$$

Ha $e \in X$ a csoport egységeleme, akkor nyilván $S(e) = D(e) = 1$, ezért az S, D leképezések a csoport folytonos homomorfizmusai a $(0, +\infty)$ (a valós számok szorzására vonatkozóan multiplikatív) csoportra.

A xxxv) megjegyzésben látottakkal analóg módon kapjuk azt, hogy az

$$I(f) := \int f/S \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

leképezés bal invariáns-, a

$$J(f) := \int f/D \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

pedig jobb invariáns Haar-integrál.

Könnyű kiszámítani a most vizsgált csoport moduláris függvényét (ld. 4.3.3.19. Lemma). Ha ui. $f \in \mathcal{K}(X)$ és $a \in X$, akkor (a helyettesítéssel való integrálás szabályai szerint)

$$I(f_{a^{-1}}) = \int f \circ \delta_{a^{-1}}/S = \int (f \circ \delta_{a^{-1}}) \circ \delta_a \cdot D(a)/(S \circ \delta_a) =$$

$$\int f \cdot D(a)/(S \cdot S(a)) = \frac{D(a)}{S(a)} \cdot I(f) \qquad (a \in X).$$

Így $\Delta = D/S$.

Tekintsük pl. (a „szokásos" szorzásra és topológiára nézve) az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ multiplikatív Abel-csoportot. Ekkor

$$S(a) = D(a) = |a| \qquad (0 \neq a \in \mathbf{R}),$$

következésképpen az

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x|}\, dx \qquad (f \in \mathcal{K}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$$

bal-, és jobb invariáns Haar-integrál.

xxxviii) Vizsgáljuk a xxxii)-beli következő speciális példát. Valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett legyen

$$X := \mathbf{Z}_n := \{k \in \mathbf{N} : 0 \leq k < n\},$$

a $\mathcal{T}$ topológia továbbra is legyen a $\mathcal{P}(X)$ diszkrét topológiája, és (kommutatív) csoportműveletként vezessük be a $\mathbf{Z}_n$-ben a modulo n vett összeadást. (A $\mathbf{Z}_n$ az ún. *n-edrendű diszkrét ciklikus csoport.*) Ha

$$\mu_n(\{k\}) := 1/n \qquad (k \in \mathbf{Z}_n),$$

akkor a μ_n egyértelműen terjeszthető ki a $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_n)$-re (a kiterjesztést is μ_n-nel jelölve) úgy, hogy a μ_n mérték legyen. Ez nyilván egy normalizált Haar-mérték (ld. xxxii)), azaz $\mu_n(\mathbf{Z}_n) = 1$. Legyen most $m = (m_n)$ $(2 \leq m_n \in \mathbf{N},\, n \in \mathbf{N})$ egy adott sorozat, és tekintsük a $\mathbf{Z}_{m_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ diszkrét ciklikus csoportok ún. komplett direktszorzatát. Ez azt jelenti tehát, hogy ha

$$\mathbf{G}_m := \mathbf{Z}_{m_0} \times \mathbf{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbf{Z}_{m_n} \times \ldots$$

akkor a $\mathbf{G}_m$-beli $\mathcal{T}_m$ topológia a $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_{m_n})$ $(n \in \mathbf{N})$ topológiák által generált szorzattopológia (ld. 4.2. xxiii) megjegyzés), a $\mathbf{G}_m$-beli csoportművelet pedig a következő:

$$\wp_m(x, y) := (x_n + y_n \,(\mathrm{mod}\, m_n), n \in \mathbf{N}) \qquad (x = (x_n),\, y = (y_n) \in \mathbf{G}_m).$$

Nem nehéz belátni, hogy a fenti értelemben a $(\mathbf{G}_m, \mathcal{T}_m, \wp_m)$ egy kompakt topologikus Abel-csoport (az ún. *Vilenkin-csoport*), a μ_{m_n} $(n \in \mathbf{N})$ mértékek által meghatározott μ szorzatmérték (ld. 2.9.) pedig normalizált Haar-mérték ($\mu(G_m) = 1$). Könnyű továbbá meggondolni, hogy a $\mathcal{T}_m$ az

$$I_0(x) := \mathbf{G}_m,\ I_n(x) := \{y \in \mathbf{G}_m : y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

$(0 < n \in \mathbf{N},\ x = (x_n) \in \mathbf{G}_m)$ halmazok, mint környezet-rendszer (ld. 4.2. i) megjegyzés) által indukált topológia, továbbá $\mu(I_n(x)) = \prod_{k=0}^{n-1} m_k$. Ha a fenti példában $m_n := 2$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az így kapott sorozat által meghatározott $(\mathbf{G}_2, \mathcal{T}_2, \wp_2)$ topologikus csoportot *diadikus csoportnak* nevezzük.

xxxix) Vegyük az

$$f_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (1/\overline{\alpha} \neq z \in \mathbf{C})$$

leképezéseket, ahol $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$, $|\alpha| \neq 1$ (ún. *Blaschke-függvények*).

Egyszerű számolással igazolható, hogy az f_α függvény injektív, és

$$\mathcal{R}_{f_\alpha} = \mathbf{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\} = \mathcal{D}_{f_\alpha}.$$

Ha ui. $u, z \in \mathcal{D}_{f_\alpha}$, akkor

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(u) \iff (z-\alpha)(1-\overline{\alpha}u) = (1-\overline{\alpha}z)(u-\alpha) \iff$$

$$u - z = |\alpha|^2(u-z),$$

ami $|\alpha| \neq 1$ miatt azzal ekvivalens, hogy $z = u$.

Hasonlóan, legyen $-1/\overline{\alpha} \neq w \in \mathbf{C}$, akkor

$$\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} = w \iff z - \alpha = w - \overline{\alpha}wz \iff z = f_{-\alpha}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}.$$

Ugyanakkor $|\alpha| \neq 1$ miatt

$$|\alpha|^2 \neq 1 \implies |\alpha|^2 + w\overline{\alpha} \neq 1 + \overline{\alpha}w \implies \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w} \neq \frac{1}{\overline{\alpha}},$$

így $z \in \mathcal{D}_{f_\alpha}$ és $f_\alpha(z) = w$.

Beláttuk tehát, hogy az

$$f_\alpha : \mathbf{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\} \to \mathbf{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\}$$

leképezés bijekció, és $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$.

Könnyű meggondolni továbbá, hogy ha $0 < |\alpha| < 1$, akkor

$$z, v, w \in \mathbf{C},\ |z| < 1,\ |v| = 1,\ |w| > 1,\ w \neq 1/\overline{\alpha}$$

esetén rendre

$$|f_\alpha(z)| < 1,\ |f_\alpha(v)| = 1,\ |f_\alpha(w)| > 1.$$

Valóban, ha $u \in \mathcal{D}_{f_\alpha}$, akkor

$$\delta_u := |u - \alpha|^2 - |1 - \overline{\alpha}u|^2 = (\alpha - u)(\overline{\alpha} - \overline{u}) - (1 - \overline{\alpha}u)(1 - \overline{u}\alpha) =$$

$$|\alpha|^2 + |u|^2 - 1 - |\alpha|^2|u|^2 = (1 - |\alpha|^2)(|u|^2 - 1).$$

Mivel $|\alpha| < 1$, azaz $1 - |\alpha|^2 > 0$, ezért

$$\begin{cases} \delta_u > 0 \\ \delta_u = 0 \\ \delta_u < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |u| > 1 \\ |u| = 1 \\ |u| < 1. \end{cases}$$

Ez pontosan azt jelenti, amit állítottunk. A geometriaia nyelvén tehát egy Blaschke-függvény a

$$\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$$

(nyílt) *egységkörlemezt,* a

$$\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$$

egységkört, és a $\overline{\mathbf{D}}$ zárt egységkörlemez komplementerét („kilyukasztva" az $1/\overline{\alpha}$ pontban) rendre önmagára képezi le bijektív módon. Nyilvánvaló, hogy mindez igaz marad minden olyan f függvényre, ami valamilyen $q \in \mathbf{C}$, $|q| = 1$ számmal $f = qf_\alpha$ alakú.

Legyen $(\alpha, \varepsilon) \in \mathbf{B} := \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ mellett

$$\mathbf{f}_{(\alpha,\varepsilon)}(z) := \varepsilon \cdot f_\alpha(z) \qquad (z \in \mathbf{D}).$$

Ha

$$\mathcal{F} := \{\mathbf{f}_{(\alpha,\varepsilon)} : (\alpha, \varepsilon) \in \mathbf{B}\},$$

akkor $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} \in \mathcal{F}$. Ti. az $(\alpha_i, \varepsilon_i) \in \mathbf{B}$ $(i = 1, 2)$ indexekre az

$$(*) \qquad \alpha := \frac{\alpha_1\overline{\varepsilon}_2 + \alpha_2}{1 + \alpha_1\overline{\alpha_2\varepsilon_2}},\ \ \varepsilon := \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdot \frac{1 + \alpha_1\overline{\alpha_2\varepsilon_2}}{1 + \overline{\alpha}_1\alpha_2\varepsilon_2}$$

választással

$$\mathbf{f}_{(\alpha_1,\varepsilon_1)} \circ \mathbf{f}_{(\alpha_2,\varepsilon_2)} = \mathbf{f}_{(\alpha,\varepsilon)}.$$

Az $\mathcal{F}$ függvényhalmaz a $\circ$-re nézve csoportot alkot, továbbá a

$$\mathbf{B} \ni (\alpha, \varepsilon) \mapsto \mathbf{f}_{(\alpha,\varepsilon)} \in \mathcal{F}$$

megfeleltetés injektív. Ha tehát (ld. $(*)$) $\wp : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ a következő leképezés:

$$\wp((\alpha_1, \varepsilon_1), (\alpha_2, \varepsilon_2)) := (\alpha, \varepsilon),$$

akkor a $\mathbf{B}$ halmazon a $\wp$ függvény csoportművelet, ahol $(0, 1)$ az egységelem, az $(\alpha, \varepsilon) \in \mathbf{B}$ inverze pedig $(-\alpha\varepsilon, \overline{\varepsilon})$. A $\mathbf{B}$-n a „szokásos" $\mathcal{T}$ topológiát tekintve kapjuk a $(\mathbf{B}, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoportot (*Blaschke-csoport*). Legyen

$$s(x, y) := \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1),$$

és vegyük a 2-dimenziós Lebesgue-mértékre vonatkozóan az s súlyfüggvénnyel generált σ mértéket a $\mathbf{D}$-n. Belátható, hogy tetszőleges $g \in L^1(\sigma)$ függvény és $(\alpha, \varepsilon) \in \mathbf{B}$ esetén

$$\int g(\mathbf{f}_{(\alpha,\varepsilon)}(z))\, d\sigma(z) = \int g(z)\, d\sigma(z),$$

a

$$\mathcal{K}(\mathbf{B})^+ \ni F \mapsto \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int F(z, e^{it})\, d\sigma(z)\, dt$$

leképezés pedig egy (a fentiek szerinti) jobb invariáns Haar-integrált határoz meg. Az így adódó ν mérték (ld. 4.3.3.9. Tétel) a $(\mathbf{B}, \mathcal{T}, \wp)$ unimoduláris csoport Haar-mértéke, ahol tehát $F \in L^1(\nu)$ esetén (a $\mathbf{b} := (z, e^{it}) \in \mathbf{B}$ jelöléssel)

$$\int F(\mathbf{b})\, d\nu(\mathbf{b}) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int F(z, e^{it})\, d\sigma(z)\, dt.$$

XL) A 4.3.3.20. Lemmához kapcsolódva (az ottani jelölésekkel) legyen

$$\mathcal{I}(f) := I(f^*),\ \mathcal{J}(f) := I(f/\Delta) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+).$$

Ekkor a 4.3.3.18. Lemma előtt mondottak szerint az $\mathcal{I}$ jobb invariáns funkcionál. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}.$$

Ha ui. $f \in \mathcal{K}(X)^+$, akkor (ld. 4.3.3.20. Lemma)

$$\mathcal{I}(f) = I(f^*) = I((f^*)^*/\Delta) = I(f/\Delta) = \mathcal{J}(f).$$

Így ha a szóban forgó lokálisan kompakt topologikus csoport unimoduláris, amikor is $\Delta \equiv 1$, akkor $\mathcal{J} = I$, következésképpen

$$I(f^*) = I(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+)$$

(röviden szólva az I *inverz invariáns*). Nem nehéz belátni, hogy mindez fordítva is igaz: ha

$$\mathcal{I}(f) = I(f^*) = I(f) \qquad (f \in \mathcal{K}(X)^+),$$

akkor $\Delta \equiv 1$. Ti. (ld. 4.3.) az $\mathcal{I}$ jobb invariáns, ezért a most feltételezett $\mathcal{I} = I$ egyenlőség miatt a bal invariáns I funkcionál egyúttal jobb invariáns is. Tehát a Δ definíciójára tekintettel (ld. 4.3.3.18. Lemma)

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} = \frac{I(f)}{I(f)} = 1 \qquad (0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(X)^+,\ x \in X).$$

Ezzel az alábbi állítást láttuk be: *legyen az* $(X, \mathcal{T}, \wp)$ *lokálisan kompakt topologikus csoport, az* $I : \mathcal{K}(X)^+ \to \mathbf{R}$ *pedig bal invariáns pozitív lineáris funkcionál. Ekkor az illető csoport akkor és csak akkor unimoduláris, ha az* I *inverz invariáns.*

XLI) Tekintsük az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoportot, legyen a

$$\nu : \Theta \to [0, +\infty]$$

bal invariáns Haar-mérték a csoporton. Ha $A \in \Theta$, akkor

$$\chi_A^*(x) = \chi_A(x^{-1}) = \begin{cases} 1 & (x^{-1} \in A \iff x \in A^{-1}) \\ 0 & (x^{-1} \notin A \iff x \notin A^{-1}) \end{cases} \qquad (x \in X),$$

azaz $\chi_A^* = \chi_{A^{-1}}$. A χ_A függvény Θ-mérhető, ezért a 4.3.3.21. Tétel értelmében a χ_A^* függvény is az. Következésképpen $A^{-1} \in \Theta$, és (ld. 4.3.3.21. Tétel)

$$\nu(A^{-1}) = \int \chi_{A^{-1}}\, d\nu = \int \chi_A^*\, d\nu = \int \chi_A/\Delta\, d\nu.$$

Speciálisan, ha az illető csoport unimoduláris (ld. 4.3.), akkor $\Delta \equiv 1$, így

$$\nu(A^{-1}) = \int \chi_A\, d\nu = \nu(A) \qquad (A \in \Theta)$$

(a ν *tükrözés-invariáns*). Ez a helyzet pl. akkor, ha a csoport kompakt, vagy ha a $\wp$ kommutatív (ld. 4.3.).

XLII) Az előző megjegyzésbeli jelölésekkel legyen $1 \le p < +\infty$ és $f \in L^p(\nu)$. Ekkor

$$f_a = ((f_a)^*)^* = ({}_{a^{-1}}f^*)^* \qquad (a \in X),$$

és a 4.3.3.21. Tétel alapján (ld. 4.3.3.16. Lemma)

$$\|f_s - f_t\|_p^p = \int |f_s - f_t|^p\, d\nu = \int |({}_{s^{-1}}f^*)^* - ({}_{t^{-1}}f^*)^*|^p\, d\nu =$$

$$\int \left(|{}_{s^{-1}}f^* - {}_{t^{-1}}f^*|^p\right)^*\, d\nu = \int |{}_{s^{-1}}f^* - {}_{t^{-1}}f^*|^p/\Delta\, d\nu.$$

Tegyük fel, hogy a csoport unimoduláris (ld. 4.3.), ekkor $\Delta \equiv 1$, és így

$$\|f_s - f_t\|_p = \|_{s^{-1}} f^* - {}_{t^{-1}} f^*\|_p \qquad (s, t \in X).$$

Mivel (ld. 4.3.3.21. Tétel) $f^* \in L^p(\nu)$, ezért a 4.3.3.22. Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$ szám esetén az $e \in X$ egységelemnek egy alkalmas U környezetével

$$\|f_s - f_t\|_p = \|_{s^{-1}} f^* - {}_{t^{-1}} f^*\|_p < \varepsilon \qquad (s, t \in X,\ s^{-1}t \in U).$$

Más szóval, ha a szóban forgó $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoport unimoduláris, akkor az

$$X \ni x \mapsto f_x \in L^p(\nu)$$

leképezés balról egyenletesen folytonos. Megmutatható, hogy ebből a szempontból a csoport unimoduláris volta nem csupán elégséges, hanem szükséges is.

5. fejezet

A Fourier-analízis alapjai

Ebben a fejezetben a harmonikus analízis alapfogalmait tárgyaljuk, különös tekintettel a trigonometrikus Fourier-transzformációra, egyúttal kitekintést nyújtva az absztrakt harmonikus analízis irányába is. A téma iránt mélyebben érdeklődőknek az irodalomjegyzékben felsorolt megfelelő művek tanulmányozását ajánljuk.

5.1. Konvolúció

Bevezetésképpen az analízis egyik legfontosabb fogalmával, a konvolúcióval ismerkedünk meg. Legyen ehhez adott az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport, és jelöljük továbbra is a $\mathcal{B}(X)$ szimbólummal a csoport Borel-halmazainak a szigma-algebráját (ld. 4.1.4.1. Definíció). A $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ Borel-mértékek (ld. 4.3.2.2. Definíció) közül a korlátos Borel-mértékek játsszák a főszerepet a későbbiekben, ez utóbbiak halmazát $\mathbf{M}(X)$-szel fogjuk jelölni. Tehát

$$\mathbf{M}(X) := \{\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty) : \text{ a } \mu \text{ mérték}\}.$$

Ha $\mu \in \mathbf{M}(X)$, akkor legyen

$$\|\mu\| := \mu(X).$$

Tetszőleges $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{M}(X)$ esetén tekintsük a $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ szorzatmértéket (ld. 2.9.), és vegyük a μ mértéknek a $\wp$ által létesített $\wp[\mu]$ képét (ld. 2.7.), ahol is

$$\wp[\mu](B) := \mu(\wp^{-1}[B]) \qquad (B \in \mathcal{B}(X)).$$

5.1.1. Definíció. A $\mu_1 * \mu_2 := \wp[\mu] : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$ mértéket a μ_1, μ_2 mértékek *konvolúciójának* nevezzük.

Világos, hogy $\mu_1 * \mu_2 \in \mathbf{M}(X)$, hiszen

$$\mu_1 * \mu_2(X) = \mu(\wp^{-1}[X]) = \mu(X \times X) = \mu_1(X) \cdot \mu_2(X) < +\infty.$$

Az is nyilvánvaló továbbá, hogy a $\mu_1 \otimes \mu_2 = \mu_2 \otimes \mu_1$ egyenlőség miatt a $* : \mathbf{M}(X)^2 \to \mathbf{M}(X)$ művelet kommutatív, azaz

$$\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1 \qquad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{M}(X)).$$

Hasonlóan kapjuk azt is, hogy a $*$ asszociatív, valamint a mértékek öszeadására nézve disztributív, és $\alpha \in [0, +\infty)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{M}(X)$ mellett

$$\mu_1 * (\alpha \cdot \mu_2) = (\alpha \cdot \mu_1) * \mu_2 = \alpha \cdot (\mu_1 * \mu_2).$$

Legyen pl. az $a \in X$ egy rögzített elem az X-ben, és tekintsük az „a-ban koncentrált" μ_a Dirac-mértéket (ld. 3.12. vii) megjegyzés):

$$\mu_a(A) := \begin{cases} 1 & (a \in A) \\ 0 & (a \notin A) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Ekkor

$$\mu_a * \mu_b = \mu_{\wp(a,b)} \qquad (a, b \in X),$$

és tetszőleges $\mu \in \mathbf{M}(X)$ esetén

$$\mu_a * \mu(A) = \mu(a^{-1}A) \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Ha tehát (a korábbi jelöléseinknek megfelelően) $\wp_a : X \to X$ az a leképezés, amit a

$$\wp_a(x) := \wp(a, x) \qquad (x \in X)$$

egyenlőség definiál, akkor

$$\mu_a * \mu = \wp_a[\mu].$$

Innen nyilvánvaló, hogy (mint eddig is, e-vel jelölve a szóban forgó csoport egységelemét) $\wp_e(x) = x$ $(x \in X)$ miatt

$$\mu_e * \mu = \mu \qquad (\mu \in \mathbf{M}(X)).$$

Más szóval a μ_e Dirac-mérték egységelem az $\mathbf{M}(X)$ halmazban a $*$ „konvolúció-szorzásra" nézve.

Tekintsünk most a szóban forgó $(X, \mathcal{T}, \wp)$ csoporton egy μ Haar-mértéket (ld. 4.3.3.). Legyen az $f : X \to [0, +\infty]$ függvény a μ mérték szerint integrálható: $f \in L^+(\mu) \cap L(\mu)$ (ld. 3.3.2., 3.3.3.), és (ld. 3.11.)

$$\mu_f(A) := \int_A f \, d\mu \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Ekkor az f súlyfüggvény által meghatározott

$$\mu_f : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$$

mérték $\|\mu_f\| = \|f\|_1 < +\infty$ miatt valóban $\mathbf{M}(X)$-beli, és minden $\nu \in \mathbf{M}(X)$ korlátos Borel-mértékre (ld. 4.5.4. iii) megjegyzés)

$$\mu_f * \nu(A) = \int \mu_f(x^{-1}A)\, d\nu(x) \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Mivel

$$\mu_f(x^{-1}A) = \int f\cdot \chi_{x^{-1}A}\, d\mu \qquad (x \in X)$$

és

$$f\cdot \chi_{x^{-1}A} = f\cdot (\chi_A \circ \wp_x) = ((f \circ \wp_{x^{-1}})\cdot \chi_A) \circ \wp_x,$$

ezért (ld. 3.4. xv) megjegyzés)

$$\mu_f(x^{-1}A) = \int ((f \circ \wp_{x^{-1}})\cdot \chi_A) \circ \wp_x\, d\mu = \int (f \circ \wp_{x^{-1}})\cdot \chi_A\, d(\wp_x[\mu]).$$

A μ Haar-mérték bal invarianciája (ld. 4.3.3.) miatt minden μ-mérhető $B \subset X$ halmazra

$$\wp_x[\mu](B) = \mu(\wp_x^{-1}[B]) = \mu(x^{-1}B) = \mu(B) \qquad (x \in X),$$

azaz $\wp_x[\mu] = \mu$, így

$$\mu_f(x^{-1}A) = \int (f \circ \wp_{x^{-1}})\cdot \chi_A\, d\mu.$$

Innen – feltéve, hogy alkalmazható a Tonelli-tétel (ld. 3.15.4. Lemma) [1] – azt kapjuk, hogy

$$\mu_f * \nu(A) = \int \left(\int (f \circ \wp_{x^{-1}})\cdot \chi_A\, d\mu \right) d\nu(x) =$$

$$\int \left(\int f(\wp(x^{-1}, y))\, d\nu(x) \right)\cdot \chi_A(y)\, d\mu(y) = \int g\cdot \chi_A\, d\mu = \mu_g(A),$$

ahol

$$g(y) := f * \nu(y) := \int f(\wp(x^{-1}, y))\, d\nu(x) \qquad (y \in X)$$

(az f függvény és a ν mérték *konvolúciója*). Formálisan tehát a következőt írhatjuk:

$$\mu_f * \nu = \mu_{f*\nu}.$$

Mivel az $X^2 \ni (t, x) \mapsto f(\wp(x^{-1}, t))$ leképezés mérhető, ezért a g iménti definíciója korrekt, $g \geq 0$, és (az előbbiekben az $A := X$ választással, ld. 4.3.3.16. Lemma) a μ Haar-mérték szerinti integrál bal invarianciája alapján

$$\int g\, d\mu = \mu_f * \nu(X) = \int \left(\int (f \circ \wp_{x^{-1}})\, d\mu \right) d\nu(x) =$$

[1] Ez a helyzet pl. akkor, ha az $(X, \mathcal{T})$ tér a végtelenben megszámlálható (ld. 4.1.), azaz alkalmas $K_n \subset X$ $(n \in \mathbf{N})$ kompakt halmazokkal $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Ekkor ui. $\mu(K_n) < +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ (ld. 4.3.3.11. Lemma), ezért a μ mérték szigma-véges (ld. 2.5.3. Definíció).

$$\int \left(\int ({}_{x^{-1}} f \, d\mu \right) d\nu(x) = \int \left(\int f \, d\mu \right) d\nu(x) = \|\mu_f\| \cdot \|\nu\| < +\infty,$$

azaz $g \in L^+(\mu) \cap L(\mu)$.

Legyen most a fenti f mellett adott egy $h \in L^+(\mu) \cap L(\mu)$ függvény is, és vegyük a ν helyett a μ_h mértéket. Ekkor az előbbiekhez hasonló módon adódik az, hogy

$$\mu_f * \mu_h(A) = \int \chi_A \cdot f * h \, d\mu = \int_A f * h \, d\mu \qquad (A \in \mathcal{B}(X)),$$

ahol

$$f * h(x) := \int f(\wp(x, y^{-1})) \cdot h(y) \, d\mu(y) \qquad (x \in X).$$

Tehát most azt írhatjuk, hogy

$$\mu_f * \nu_h = \mu_{f*h}.$$

Megjegyezzük, hogy egyrészt az $f * h$ függvény mérhető és nemnegatív, másrészt

$$\|\mu_f * \mu_h\| = \|\mu_f\| \cdot \|\mu_h\| = \|\mu_{f*h}\| = \int f * h \, d\mu < +\infty$$

miatt $f * h \in L(\mu)$.

Tetszőleges $f, h \in L(\mu)$ függvények esetén az $f = f^+ - f^-$, $h = h^+ - h^-$ felbontásokból a fentiek figyelembevételével azt kapjuk, hogy az

$$X \ni x \mapsto f * h(x) := \int f(\wp(x, y^{-1})) \cdot h(y) \, d\mu(y)$$

leképezés μ-m.m. $x \in X$ mellett értelmezve van, és $f * h \in L(\mu)$.

5.1.2. Definíció. A fentiekben megadott

$$f * h(x) = \int f(\wp(x, y^{-1})) \cdot h(y) \, d\mu(y) \qquad (x \in X)$$

függvényt az f, $h \in L(\mu)$ függvények *konvolúciójának* nevezzük.

A μ Haar-mérték már idézett invarianciája és a Tonelli-tétel alapján (ismét feltéve, hogy ez utóbbi alkalmazható)

$$\|f * h\|_1 = \int \left| \int f(\wp(x, y^{-1})) \cdot h(y) \, d\mu(y) \right| d\mu(x) \leq$$

$$\int \left(\int |f(\wp(x, y^{-1}))| \cdot |h(y)| \, d\mu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$\int \left(\int |f(\wp(x, y^{-1}))| \, d\mu(x) \right) \cdot |h(y)| \, d\mu(y) =$$

$$\int \left(\int |f(x)| \, d\mu(x) \right) \cdot |h(y)| \, d\mu(y) = \|f\|_1 \cdot \|h\|_1.$$

Emeljük ki külön is a most kapott *konvolúció-egyenlőtlenséget*:

$$\|f * h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|h\|_1 \qquad (f,\, h \in L^1(\mu)).$$

(Az $f,\, h \geq 0$ esetben a fenti becslésben a korábban mondottak szerint egyenlőség áll.)

Mutassuk meg, hogy az előbbi egyenlőtlenség alábbi kiterjesztése is igaz:

$$\|f * h\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_1 \qquad (1 \leq p \leq +\infty,\, f \in L^p(\mu),\, h \in L^1(\mu)).$$

Ha ui. itt $p = +\infty$, akkor a 4.5.1.2. Definíció alapján

$$|f * h(x)| \leq \int |f(\wp(x, y^{-1}))| \cdot |h(y)| \, d\mu(y) \leq$$

$$\|f\|_\infty \cdot \int |h(y)| \, d\mu(y) = \|f\|_\infty \cdot \|h\|_1 \qquad (x \in X),$$

azaz

$$\|f * h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|h\|_1.$$

Az $1 \leq p < +\infty$ esetben a 3.5.16. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség) alapján (felhasználva a μ mérték szerinti integrál invarianciáját) a következőket mondhatjuk:

$$\|f * h\|_p \leq \int \left(\int |f(\wp(x, y^{-1}))|^p \cdot |h(y)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\mu(y) =$$

$$\int \left(\int |f(\wp(x, y^{-1}))|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \cdot |h(y)| \, d\mu(y) =$$

$$\int \left(\int |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \cdot |h(y)| \, d\mu(y) = \|f\|_p \cdot \|h\|_1.$$

A konvolúció asszociativitása és az összeadásra való disztributivitása is egyszerűen belátható:

$$(f * g) * h = f * (g * h),\ (f + g) * h = f * h + g * h \qquad (f, g, h \in L^1(\mu)).$$

Továbbá, a μ Haar-mérték tükrözésinvarianciáját (ld. 4.3.3.21. Tétel) felhasználva a konvolúció kommutativitása is adódik: μ-m.m. $x \in X$ helyen

$$f * h(x) = \int f(\wp(x, y^{-1})) \cdot h(y) \, d\mu(y) = \int f(\wp(x, y)) \cdot h(y^{-1}) \, d\mu(y) =$$

$$\int f(\wp(x,\wp(y,x^{-1}))\cdot h(\wp(y,x^{-1})^{-1})\,d\mu(y) = \int f(y)\cdot h(\wp(x,y^{-1}))\,d\mu(y) = h*f(x),$$

azaz

$$f*h = h*f \qquad (f,h\in L^1(\mu)).$$

Világos, hogy ha az $f,h\in L^1(\mu)$ függvényekből indulunk ki, akkor ugyanez a konvolúciójukról is feltehető, tehát, hogy $f*h\in L^1(\mu)$. Ezért az eddigieket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az $(L^1(\mu),\|.\|_1)$ normált tér a $*$ konvolúcióra nézve kommutatív Banach-algebra.

5.2. Megjegyzések

i) Tekintsük az $(X,\mathcal{T},\wp)$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoportot, és legyen adott a Borel-halmazok $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebráján a

$$\mu:\mathcal{B}(X)\to\mathbf{R}$$

előjeles mérték (ld. 2.11.). Azt mondjuk, hogy a μ *korlátos variációjú Borel-mérték,* ha

$$\|\mu\| := \sup\Big\{\sum_{A\in\mathcal{A}}|\mu(A)| : \mathcal{A}\in\mathcal{F}_X\Big\} < +\infty,$$

ahol $\mathcal{F}_X$-szel az összes olyan véges, páronként diszjunkt, $\mathcal{B}(X)$-beli halmazokból álló $\mathcal{A}$ halmazrendszerek halmazát jelöltük, amelyekre $X=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}$. (Ekkor az $\mathcal{A}$ egy (mérhető) *felosztása* az X halmaznak.) Jelöljük $\mathcal{V}(X)$-szel a most definiált korlátos variációjú előjeles Borel-mértékek halmazát. Emlékeztetünk a 2.11.5. Tételre, miszerint $\mu=\mu^+-\mu^-$, ahol (a jelen esetben) a μ^+, μ^- mértékek korlátos Borel-mértékek. Az utóbbiakkal analóg módon értelmezhetjük $\mu,\,\nu\in\mathcal{V}(X)$ esetén is a $\mu*\nu\in\mathcal{V}(X)$ konvolúciót. A $\mathcal{V}(X)$ halmaz az összeadásra nézve lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett, továbbá a fenti $\|.\|$ norma ezen a téren. Az is belátható, hogy $(\mathcal{V}(X),\|.\|)$ Banach-tér. Mivel a

$$\|\mu*\nu\|\le\|\mu\|\cdot\|\nu\| \qquad (\mu,\,\nu\in\mathcal{V}(X))$$

egyenlőtlenség is elég egyszerűen adódik, ezért elmondhatjuk, hogy a fenti műveletekkel és normával a $\mathcal{V}(X)$ egy egységelemes Banach-algebra.

ii) Az előző megjegyzésben említett $(X,\mathcal{T},\wp)$ lokálisan kompakt topologikus csoport esetén legyenek adottak a $\mu,\,\nu\in\mathbf{M}(X)$ korlátos Borel-mértékek, az $f:X\to[0,+\infty]$ függvény pedig legyen mérhető a Borel-halmazok $\mathcal{B}(X)$ szigma-algebrájára nézve (ld. 3.1.1. Definíció). Ekkor a 3.4. xv) megjegyzés és a Tonelli-tétel (ld. 3.15.4. Lemma) alapján (feltételezve ez utóbbi alkalmazhatóságát)

$$\int f\,d(\mu*\nu) = \int f\circ\wp\,d(\mu\otimes\nu) = \int\Big(\int f(\wp(x,y))\,d\mu(x)\Big)d\nu(y) =$$

$$\int \left(\int f(\wp(x,y))d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

iii) Speciálisan, ha a ii) megjegyzésben egy $A \in \mathcal{B}(X)$ halmaz mellett $f := \chi_A$, akkor

$$\mu * \nu(A) = \int \chi_A \, d(\mu * \nu) = \int \mu(y^{-1}A) \, d\nu(y) = \int \nu(x^{-1}A) \, d\mu(x).$$

Gyakran ez utóbbi egyenlőséggel értelmezik a $\mu * \nu$ konvolúciót.

iv) Az előbbiek analóg módon nyilván elmondhatók kettőnél több mérték esetén is. (Vonatkozik ez a megjegyzés a későbbiekre is.)

v) A kiindulási lokálisan kompakt topologikus tér alkalmas megválasztásával konvolúcióként megkapjuk például a végtelen sorok Cauchy-szorzatát meghatározó sorozatot. Legyen ui.

$$X := \mathbf{Z}, \ \mathcal{T} := \mathcal{P}(X), \ \mu(\{n\}) := 1 \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

(azaz μ nem más, mint a számosságmérték a $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ hatványhalmazon (ld. 2.4. iv) megjegyzés)). Az egész számok közötti szokásos $\wp$ összeadásra nézve az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ nyilván egy kommutatív, topologikus csoport, és a most definiált μ mérték Haar-mérték ezen a csoporton. Világos, hogy $L(\mu)$ pontosan azokból az $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ függvényekből áll, amelyekre $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| < +\infty$, továbbá $f, h \in L(\mu)$ esetén

$$f * h(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(n-k) \cdot h(k) \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Ha valamilyen $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozattal $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$ és

$$f_x(n) := \begin{cases} x_n & (n \in \mathbf{N}) \\ 0 & (\mathbf{Z} \ni n < 0), \end{cases}$$

akkor nyilván $f_x \in L(\mu)$. Tegyük fel, hogy az $a = (a_n)$, $b = (b_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatok valamennyien abszolút konvergens végtelen sort határoznak meg, ekkor egyszerűen ellenőrizhetően $f_a * f_b = f_c$, ahol

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A c sorozat tehát nem más, mint az a és a b fentebb említett „szokásos" konvolúciója.

Legyen

$$e(n) := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (\mathbf{Z} \ni n \neq 0), \end{cases}$$

ekkor $e \in L^1(\mu)$, és tetszőleges $f \in L^1(\mu)$ választással $f * e = f$. Tehát az e sorozat a most vizsgált $L^1(\mu)$ Banach-algebra egységeleme.

vi) Megmutatható, hogy amennyiben az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport esetén az $(X, \mathcal{T})$ tér nem diszkrét (azaz $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(X)$), akkor az $L^1(\mu)$ konvolúció-algebrának nincs egységeleme.

vii) Az 5.1. pontban tárgyalt konvolúció hátterében egy sokkal általánosabb konvolúció-fogalom húzódik meg. Ez utóbbi vázlatos ismertetéséhez legyen valamilyen $(X, \wp)$ Abel-csoport esetén adott az $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^X$ függvényosztály. Feltételezzük, hogy az $\mathcal{F}$ (a „szokásos" függvényműveletekre nézve) lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett, továbbá

$$\tau_x f \in \mathcal{F} \qquad (f \in \mathcal{F},\, x \in X),$$

ahol (ld. 4.3.) $\tau_x f(t) := f(\wp(x,t))$ $(t \in X)$. Ezért tetszőleges $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ lineáris funkcionál (röviden: $\Phi \in \mathcal{F}^*$) esetén minden $f \in \mathcal{F}$ mellett képezhetjük az

$$X \ni x \mapsto \Phi(\tau_x f) \in \mathbf{R}$$

függvényt. Jelöljük ez utóbbit az f_Φ szimbólummal. Az $\mathcal{F}$ függvénytértől azt is megköveteljük, hogy minden előbbi szereplővel $f_\Phi \in \mathcal{F}$ is igaz legyen. Következésképpen bármelyik $\Psi \in \mathcal{F}^*$ funkcionállal értelmezhetjük a

$$\Psi * \Phi(f) := \Psi(f_\Phi) \qquad (f \in \mathcal{F})$$

(nyilván lineáris) funkcionált.

Az így definiált $\Psi * \Phi \in \mathcal{F}^*$ funkcionál a $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}^*$ funkcionálok *konvolúciója.* Speciálisan, ha egy $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt Abel-csoportból indulunk ki és (ld. 4.1.) $\mathcal{F} := \mathcal{C}_1(X)$ (az X-en értelmezett, a végtelenben eltűnő folytonos függvények vektortere), akkor belátható, hogy az $\mathcal{F}$-re tett fenti feltételek teljesülnek. Továbbá (ld. 5.1.) minden $\mu \in \mathbf{M}(X)$ mérték esetén a

$$\Phi_\mu(f) := \int f\, d\mu \qquad (f \in \mathcal{C}_1(X))$$

funkcionál lineáris, és (ld. 5.1. Definíció, 4.3.3.26. Tétel)

$$\Phi_{\mu * \nu} = \Phi_\mu * \Phi_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{M}(X)).$$

5.3. Duális csoport

Az eddigi vizsgálatainkban mindig valós értékű (vagy $\overline{\mathbf{R}}$-ba képező) függvényekkel volt dolgunk. Nem okoz különösebb nehézséget azonban a mérhetőség, integrálhatóság, stb. fogalmakat komplex értékű függvényekre is értelmezni. Legyen ehhez ui. adott egy (X, Ω, μ) mértéktér, és az $f : X \to \mathbf{C}$ függvényt bontsuk fel a szokásos kanonikus alakban:

$$f = f_1 + \imath \cdot f_2,$$

ahol az f_1 az f függvény valós, az f_2 pedig a képzetes részét jelöli. Tehát

$$f_j : X \to \mathbf{R} \qquad (j = 1, 2),$$

és

$$f(x) = f_1(x) + \imath \cdot f_2(x) \qquad (x \in X).$$

(Az $\imath$ szimbólum a „megszokott" imaginárius egységet jelöli a $\mathbf{C}$-ben.) Azt mondjuk, hogy az f függvény *mérhető*, ha az f_1, f_2 függvények mérhetők. Az f *integrálhatóságát* analóg módon értelmezzük, legyen ez utóbbi esetben

$$\int f \, d\mu := \int f_1 \, d\mu + \imath \cdot \int f_2 \, d\mu$$

az f *integrálja* Ennek megfelelően értelmezzük a komplex értékű $X \to \mathbf{C}$ függvények körében az $L^p(\mu)$ $(1 \le p \le +\infty)$ függvényosztályokat, vagy pl. az $f * g$ $(f, g \in L^1(\mu))$ konvolúciót (ld. 5.1.).

Tekintsük a továbbiakban az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt Abel-csoportot, legyen

$$x \bullet y := \wp(x, y) \qquad (x, y \in X),$$

a μ pedig Haar-mérték a csoporton (ld. 4.3.3.). Az X-en értelmezett függvények körében kitüntetett szerepe van az ún. karaktereknek. Ezzel kapcsolatos az alábbi definíció.

5.3.1. Definíció. A $\varphi : X \to \mathbf{C}$ leképezést a szóban forgó csoport *karakterének* nevezzük, ha a φ

i) folytonos, azaz $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, és bármelyik $x \in X$ esetén $|\varphi(x)| = 1$;

ii) *multiplikatív,* más szóval tetszőleges $x, y \in X$ mellett

$$\varphi(x \bullet y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Az előbbi definíciónak eleget tevő φ függvény tehát az illető topologikus csoportnak a komplex egységkörbe (mint (a $\mathbf{C}$-beli szorzásra nézve) multiplikatív csoportba) való folytonos homomorfizmusa. Nyilvánvaló, hogy a $\varphi(x) := 1$ $(x \in X)$ függvény karakter.

Ha $\mathbf{\Gamma}$ jelöli a karakterek halmazát, akkor a

$$(\varphi \diamond \psi)(x) := \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (\varphi, \psi \in \mathbf{\Gamma}, x \in X)$$

előírással értelmezett $\diamond$ műveletre nézve a $\mathbf{\Gamma}$ – könnyen beláthatóan – szintén egy Abel-csoport. Ezt a csoportot az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ *duális csoportjának* nevezzük.

A fenti értelmezésekből rögtön következnek az alábbi összefüggések:

a) $\varphi(\theta) = 1$ $(\varphi \in \mathbf{\Gamma})$ (ahol $\theta \in X$ jelöli a $\wp$ csoportműveletre vonatkozó neutrális („nulla" vagy „egység") elemet: $x \bullet \theta = x$ $(x \in X)$);

b) $\varphi(x^{-1}) = \dfrac{1}{\varphi(x)} = \overline{\varphi(x)}$ $(\varphi \in \mathbf{\Gamma},\, x \in X)$ (itt $x^{-1} \in X$ az x elem inverze a $\wp$-re nézve, azaz $x \bullet x^{-1} = \theta$, a felülhúzás pedig a komplex konjugálást jelenti);

c) $\overline{\varphi} \in \mathbf{\Gamma}$ $(\varphi \in \Gamma)$.

Ui. $\varphi(x) = \varphi(x \bullet \theta) = \varphi(x)\cdot\varphi(\theta)$, $|\varphi(x)| = 1$ $(x \in X)$ miatt az a) máris adódik. Ezt felhasználva $1 = \varphi(\theta) = \varphi(x \bullet x^{-1}) = \varphi(x)\cdot\varphi(x^{-1})$ miatt a b) is nyilvánvaló. Ha pedig $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$, akkor a $\overline{\varphi}$ függvényre triviálisan igazak a 4.5.2.1. Definícióban a karakterektől megkövetelt tulajdonságok.

Gondoljuk meg, hogy kompakt $(X, \mathcal{T})$ esetén a $\mathbf{\Gamma}$ halmaz a „szokásos" értelemben ortogonális rendszer, azaz igaz a

5.3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér kompakt. Ekkor tetszőleges φ, $\psi \in \mathbf{\Gamma}$ függvényekre fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ \|\mu\| & (\varphi = \psi). \end{cases}$$

Bizonyítás. A μ mérték eltolásinvarianciája (ld. 4.3.3.) miatt tetszőleges $y \in X$ elemre

$$\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = \int \varphi(x \bullet y)\cdot\overline{\psi(x \bullet y)}\, d\mu(x),$$

azaz a karakterek multiplikativitását (ld. 4.5.2.1. Definíció) és a lemma megfogalmazás előtt a karakterekről mondott tulajdonságokat figyelembe véve

$$\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = \varphi(y)\cdot\overline{\psi(y)}\cdot\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = \frac{\varphi(y)}{\psi(y)}\cdot\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu.$$

Ha itt $\varphi \neq \psi$, akkor az y elem megválasztható úgy, hogy $\varphi(y) \neq \psi(y)$, azaz $\varphi(y)/\psi(y) \neq 1$, következésképpen szükségszerűen $\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = 0$. Ha pedig $\varphi = \psi$, akkor $|\varphi(x)| = |\psi(x)| = 1$ $(x \in X)$ alapján $\varphi\cdot\overline{\psi} \equiv 1$, és így

$$\int \varphi\cdot\overline{\psi}\, d\mu = \int 1\, d\mu = \mu(X) = \|\mu\|,$$

ami a szóban forgó lemma bizonyítását jelenti. ■

A továbbiakban néhány fontos speciális csoportot tárgyalunk, egyúttal a már klasszikusnak számító példákat beágyazva a fenti absztrakt fogalomkörbe.

5.3.3. Példa. Legyen $X := \mathbf{R}$, $\mathcal{T}$ az $\mathbf{R}$-beli euklideszi távolság által meghatározott „szokásos" topológia, a μ pedig a Lebesgue-mérték az $\mathbf{R}$-en (ld. 2.7.1.). Ha $\wp$ a valós számok közötti összeadás, azaz $x \bullet y := x+y \quad (x, y \in \mathbf{R})$, akkor $(X, \mathcal{T}, \wp)$ egy lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport, amelyen a μ Haar-mérték, továbbá $\theta = 0$, $x^{-1} = -x \quad (x \in \mathbf{R})$.

Mik lesznek ennek a csoportnak a karakterei? Ha $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$, akkor a φ folytonossága és a $\varphi(0) = 1$ egyenlőség miatt egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$\alpha := \int \varphi \cdot \chi_{[0,\delta]} \, d\mu \neq 0.$$

Mivel $\varphi(x+t) = \varphi(x) \cdot \varphi(t) \quad (x, t \in X)$, ezért

$$\alpha \cdot \varphi(x) = \int \varphi(x+t) \cdot \chi_{[0,\delta]}(t) \, d\mu(t) = \int_x^{x+\delta} \varphi(t) \, dt$$

(ahol dt a Riemann-integrálást jelenti). Ha tehát

$$\Phi(x) := \int_0^x \varphi(t) \, dt \qquad (x \in X),$$

akkor a Φ (egy folytonos függvény integrálfüggvénye lévén) differenciálható, $\Phi' = \varphi$, és $\alpha = \Phi(\delta)$. Továbbá az előbbiek szerint

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x+\delta) - \Phi(x)}{\alpha} \qquad (x \in X),$$

ezért a φ differenciálható, és

$$\varphi'(x) = \frac{\Phi'(x+\delta) - \Phi'(x)}{\alpha} = \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\alpha} = \varphi(x) \cdot \frac{\varphi(\delta) - 1}{\alpha} \qquad (x \in X).$$

Speciálisan $\varphi'(0) = (\varphi(\delta) - 1)/\alpha$, ezért

$$\varphi' = \varphi'(0) \cdot \varphi.$$

Ez nem más, mint egy homogén lineáris differenciálegyenlet a φ-re nézve, aminek minden megoldása (a $\gamma := \varphi'(0)$ jelöléssel és valamilyen $q \in \mathbf{C}$ együtthatóval)

$$\varphi(x) = q \cdot e^{\gamma x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Figyelembe véve a $\varphi(0) = 1$ kezdeti értéket is $q = 1$ adódik, tehát

$$\varphi(x) = e^{\gamma x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ha itt $\gamma = u + \imath y \quad (u, y \in \mathbf{R})$, akkor $|\varphi(x)| = 1 \quad (x \in \mathbf{R})$ miatt

$$1 = \left| e^{ux + \imath y x} \right| = e^{ux} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

következésképpen $u = 0$. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$\varphi(x) = e_y(x) := e^{\imath yx} \qquad (x \in X).$$

Fordítva a dolog nyilvánvaló, azaz bármely $y \in X$ esetén $e_y \in \mathbf{\Gamma}$. Azt kaptuk ezzel, hogy

$$\mathbf{\Gamma} = \{e_y \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) : y \in \mathbf{R}\}.$$

A $\mathbf{\Gamma} \ni e_y \mapsto y \in \mathbf{R}$ (nyilván) izomorfia révén így elmondhatjuk, hogy az $\mathbf{R}$ duális csoportja megegyezik önmagával.

A most tárgyalt „egydimenziós" eset mintájára annak a többdimenziós megfelelője már könnyen megkapható. Ehhez annyit kell csupán megjegyeznünk, hogy ha $0 < n \in \mathbf{N}$ és $X := \mathbf{R}^n$, akkor vezessük be a következő jelöléseket: jelentse $\langle , \rangle$ az $\mathbf{R}^n$-ben jól ismert skaláris szorzást, azaz az $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorokra legyen

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k.$$

Nem fog félreértést okozni, ha az $\mathbf{R}^n$-beli x elemek euklideszi normájára is az

$$\|x\|_2 := \sqrt{< x, x >}$$

szimbólumot használjuk. Az $\mathbf{R}^n$-ben a fenti $\|.\|_2$ norma által meghatározott topológiát, valamint az $\mathbf{R}^n$-beli vektorokra közötti szokásos összeadást tekintve újfent egy lokálisan kompakt Abel-csoportot kapunk. Legyen továbbá egy $a \in \mathbf{R}^n$ elem mellett $e_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ a következő függvény:

$$e_a(x) := e^{\imath \cdot \langle x, a\rangle} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $a \in \mathbf{R}^n$ mellett

$$e_a \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n),\ |e_a| = \mathbf{1},\ e_a(x + y) = e_a(x) \cdot e_a(y)\ \ (x, y \in \mathbf{R}^n),$$

röviden: az e_a karakter. Az előbbiekkel analóg módon kapjuk továbbá azt, hogy ebben az esetben is

$$\mathbf{\Gamma} = \{e_y \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) : y \in \mathbf{R}^n\}.$$

Világos, hogy minden $a, b \in \mathbf{R}^n$ vektorpárra $e_a(b) = e_b(a)$.

5.3.4. Példa. Második példaként tekintsük az $X := [0, 2\pi)$ „alaphalmazt" a következő topológiával: egy $A \subset [0, 2\pi)$ halmazt nevezzünk *nyíltnak,* ha bármely $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$ szám, amellyel az a elem

$$K_r(a) := \begin{cases} (a - r, a + r) & (a \neq 0) \\ [0, r) \cup (2\pi - r, 2\pi) & (a = 0) \end{cases}$$

környezetére $K_r(a) \subset A$ teljesül. (Szemléletesen a fenti topológiát a következőképpen kapjuk: a $[0, 2\pi)$ intervallum az $[0, 2\pi) \ni x \mapsto e^{\imath \cdot x}$ megfeleltés révén azonosítható a $\mathbf{C}$-beli, origó körüli egységkörrel, $K_r(a)$ pedig ezen a körön egy nyílt körívvel.) Legyen $\wp$ az X-beli moduló 2π vett összeadás, μ pedig az X-beli Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.). Egyszerűen igazolható, hogy így az $(X, \mathcal{T})$ egy kompakt topologikus csoport.

Ha $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$, akkor az 5.3.3. Példában látottakhoz hasonlóan azt kapjuk, hogy valamilyen $y \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(x) = t_y(x) := e^{\imath y x} \qquad (x \in X).$$

Most viszont (figyelembe véve a $\mathcal{T}$ topológiát) a

$$\varphi(0) = 1 = \lim_{x \to 2\pi - 0} \varphi(x) = e^{2\pi \imath y}$$

egyenlőségnek is teljesülnie kell, amiből $y \in \mathbf{Z}$ következik. A fordított irány itt is triviális, azaz bármelyik $y \in \mathbf{Z}$ esetén $t_y \in \mathbf{\Gamma}$, így

$$\mathbf{\Gamma} = \{t_y \in \mathcal{C}(X) : y \in \mathbf{Z}\}.$$

A $\mathbf{\Gamma}$ tehát nem más, mint a jól ismert (komplex) *trigonometrikus rendszer*. Most is elmondhatjuk, hogy a $\mathbf{\Gamma} \ni t_y \mapsto y \in \mathbf{Z}$ izomorfia alapján a $[0, 2\pi)$ duális csoportja megegyezik a $\mathbf{Z}$-vel.

A 5.3.2. Lemmából a $(2\pi)^{-1/2} \cdot t_y \quad (y \in \mathbf{Z})$ rendszer ismert ortonormáltságát kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t_y(x) \cdot \overline{t_v(x)}\, dx = \begin{cases} 0 & (y \neq v) \\ 1 & (y = v) \end{cases} \qquad (y, v \in \mathbf{Z}).$$

Az 5.3.4. Példa magasabb dimenzós változata $(X := [0, 2\pi)^n, \quad 0 < n \in \mathbf{N})$ hasonlóan tárgyalható, amikor is karaktercsoportként a többváltozós trigonometrikus rendszert kapjuk.

5.3.5. Példa. Legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ rögzített természetes szám,

$$X := \{0, 1, ..., n-1\},$$

az X-beli topológia legyen a $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ diszkrét topológia. A $\wp$ csoportműveletet az X halmazban definiáljuk a modulo n vett összeadásként. Egy $A \subset X$ halmaz számosságát $|A|$-val jelölve a

$$\mu(A) := |A|/n \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

mérték nyilván normalizált Haar-mérték az $(X, \mathcal{T})$ kompakt topologikus Abel-csoporton (ld. 4.4. xxii) megjegyzés).

Az 5.3.4. Példával analóg módon kapjuk, hogy bármelyik $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$ karakterhez van olyan $y \in \mathbf{R}$, amivel

$$\varphi(x) = e^{\imath x y} \qquad (x \in X).$$

Mivel a φ karakter, ezért az

$$1 = \varphi(0) = \varphi(1 \bullet 1 \bullet \ldots \bullet 1) = \varphi(1)^n = e^{\imath ny}$$

egyenlőségeknek is teljesülniük kell. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $k \in \mathbf{Z}$ számmal $y = 2k\pi/n$. Legyen

$$T_k(x) := e^{2k\pi x\imath/n} \qquad (x \in X).$$

Figyelembe véve a nyilvánvaló

$$k = j \pmod n \iff T_k = T_j$$

relációt, azt mondhatjuk tehát (az eddigi példák szellemében), hogy

$$\mathbf{\Gamma} = \{T_k : k = 0, 1, ..., n-1\},$$

továbbá, hogy az $(X, \mathcal{T})$ duális csoportja önmaga.

Az $(X, \mathcal{T})$ csoport kompaktsága (és a μ normáltsága) alapján az 5.3.2. Lemmából az

$$n^{-1/2} \cdot T_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

diszkrét trigonometrikus rendszer ortonormáltságát kapjuk:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} T_k(j) \cdot \overline{T_l(j)} = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ 1 & (l = l) \end{cases} \qquad (k, l \in \{0, 1, ..., n-1\}).$$

5.3.6. Példa. Tekintsük most az $X := \mathbf{Z}$ („alap")halmazt az egész számok közötti „szokásos" összeadással, mint csoportműveletet. Legyen továbbá $\mathcal{T} := \mathcal{P}(\mathbf{Z})$, a $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ szigma-algebrán értelmezett μ mérték pedig a számosságmérték (ld. 2.4. iii) megjegyzés), más szóval $\mu(\{n\}) := 1 \quad (n \in \mathbf{Z})$. Világos, hogy így egy lokálisan kompakt topologikus csoportot kaptunk, amin a μ Haar-mérték. Az is nyilvánvaló, hogy tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén a

$$\varphi_x(n) := e^{\imath xn} \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

függvény karakter, továbbá $\varphi_x = \varphi_y$, hacsak $x - y/(2\pi) \in \mathbf{Z}$, és

$$\varphi_x \neq \varphi_y \qquad (x, y \in [0, 2\pi),\ x \neq y).$$

Ha a $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ függvény karakter, akkor egyértelműen létezik olyan $x \in [0, 2\pi)$ szám, amellyel

$$\varphi(1) = e^{\imath x}.$$

Nem nehéz belátni, hogy ekkor $\varphi = \varphi_x$, azaz $\varphi(n) = \varphi_x(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$. Ez ui. $n = 0, 1$ mellett triviálisan igaz. Ha viszont $1 \leq n \in \mathbf{N}$ olyan , hogy $\varphi(n) = \varphi_x(n)$, akkor

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) \cdot \varphi(1) = \varphi_x(n) \cdot \varphi_x(1) = \varphi_x(n+1)$$

is fennáll. Következésképpen (a teljes indukcióra való hivatkozással) minden $n \in \mathbf{N}$ helyen $\varphi(n) = \varphi_x(n)$. Mivel

$$\varphi(-n) = \overline{\varphi(n)} = \overline{\varphi_x(n)} = \varphi_x(-n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért valóban igaz, hogy $\varphi(n) = \varphi_x(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Összefoglalva a fentieket azt mondhatjuk, hogy a $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ függvény akkor és csak akkor karakter, ha valamilyen (egyértelműen létező) $x \in [0, 2\pi)$ számmal $\varphi = \varphi_x$. Más szóval a $\Gamma \ni \varphi_x \mapsto x \in [0, 2\pi)$ izomorfia révén a $\mathbf{Z}$ duális csoportja megegyezik a $[0, 2\pi)$ intervallummal (az utóbbiban a moduló 2π vett összeadást, mint csoportműveletet tekintve).

5.2.7. Példa. Utolsó példaként a már ismert $(\mathbf{G}_2, \mathcal{T}_2, \wp_2)$ diadikus csoportot tárgyaljuk (ld. 4.4. xxxviii) megjegyzés). Mik lesznek a csoport karakterei? Az világos, hogy bármely $k \in \mathbf{N}$ esetén a

$$\rho_k(x) := (-1)^{x_k} \qquad (x = (x_n) \in \mathbf{G}_2)$$

függvény karakter, továbbá – véges sok karakter szorzata ugyancsak karakter lévén – bármely véges $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmazzal

$$\prod_{n \in \mathcal{N}} \rho_n$$

is karakter. Ezeket a véges szorzatokat pl. a következőképpen rendezhetjük sorozatba: ha $n \in \mathbf{N}$ és $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \cdot 2^k$ az n szám diadikus kifejtése (azaz $n_k \in \{0, 1\}$ $(k \in \mathbf{N})$), akkor legyen

$$\varphi_n := \prod_{k=0}^{\infty} \rho_k^{n_k}.$$

(Mivel véges sok k indextől eltekintve $n_k = 0$, ezért valójában csak legfeljebb véges sok 1-től különöző $\rho_k^{n_k}$ tényezőt szoroztunk össze, így nem lépnek fel „konvergencia problémák" a szorzáskor.) Világos, hogy

$$\varphi_{2^k} = \rho_k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha az $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ egy véges halmaz, akkor az

$$n := \sum_{k \in \mathcal{N}} 2^k$$

indexszel nyilván igaz a

$$\prod_{k \in \mathcal{N}} \rho_k = \varphi_n$$

egyenlőség.

A fent definiált ρ_k $(k \in \mathbf{N})$ függvények véges szorzatainak a halmaza (más szóval a ρ_k $(k \in \mathbf{N})$ függvényrendszer ún. *szorzatrendszere*) tehát megegyezik a

$$\{\varphi_n \in \mathcal{C}(\mathbf{G_2}) : n \in \mathbf{N}\}$$

halmazzal. Megmutatjuk, hogy ez utóbbi nem más, mint a $\mathbf{\Gamma}$, azaz a diadikus csoport minden karaktere φ_n $(n \in \mathbf{N})$ alakú.

Valóban, a most minden $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$ karakterre érvényes

$$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x^{-1}) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathbf{G}_2)$$

egyenlőség miatt a φ valós értékű, és így $\mathcal{R}_\varphi \subset \{-1, 1\}$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \cdot 2^k$ egy tetszőleges természetes szám diadikus kifejtése, akkor az

$$e_k := (\delta_{kj} : j \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G}_2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

jelöléssel

$$n_k = \frac{1 - \varphi_n(e_k)}{2} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

(A δ_{kj} $(k, j \in \mathbf{N})$ szimbólum a jól ismert Kronecker-féle delta.)

Legyen most már a $\varphi \in \mathbf{\Gamma}$ tetszőleges karakter, és az előbbi észrevételre utalva tekintsük az

$$n_k := \frac{1 - \varphi(e_k)}{2} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

természetes számokat. Belátjuk, hogy ezek közül legfeljebb véges sok különbözik a nullától. Ugyanis $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{G}_2)$, ezért (a $\mathbf{G}_2 \ni \theta := (0)$-beli folytonosságot kihasználva) van olyan $m \in \mathbf{N}$ index, hogy

$$|\varphi(\theta) - \varphi(x)| = |1 - \varphi(x)| < 1/2,$$

így $\varphi(x) = 1$, hacsak az $x = (x_k) \in \mathbf{G}_2$ elemre $x_j = 0$ $(j = 0, ..., m)$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ez minden $\mathbf{N} \ni k > m$ mellett az e_k elemre igaz, következésképpen $\varphi(e_k) = 1$. Az ilyen k indexekre tehát valóban teljesül az, hogy $n_k = 0$.

A fenti φ karakterhez tekintsük az

$$n := \sum_{k=0}^{\infty} n_k \cdot 2^k := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \varphi(e_k)}{2} \cdot 2^k$$

természetes számot, és mutassuk meg a $\varphi = \varphi_n$ egyenlőséget. Legyen ehhez egy tetszőleges $x = (x_k) \in \mathbf{G}_2$ elem és a φ-hez az előbbiekben megadott m esetén

$$x^m := (x_0, ..., x_m, 0, 0, ...) \in \mathbf{G}_2.$$

Ekkor

$$n = \sum_{k=0}^{m} \frac{1 - \varphi(e_k)}{2} \cdot 2^k,$$

és

$$\varphi(x) = \varphi(x^m) = \widetilde{\prod}_{j=0}^{m} \varphi(e_j) = \widetilde{\prod}_{j=0}^{m} (1 - 2\cdot n_j) =$$

$$\prod_{j=0}^{m} (-1)^{n_j \cdot x_j} = \prod_{j=0}^{m} \rho_j^{n_j}(x^m) = \varphi_n(x^m) = \varphi_n(x).$$

(A $\widetilde{\prod}_{j=0}^{m}$ szimbólum olyan $j = 0, ..., m$ indexekre való szorzást jelöl, amelyekre $x_j = 1$.)

A $(\mathbf{G}_2, \mathcal{T}_2)$ csoport kompakt lévén a $\mathbf{\Gamma}$ rendszer ortonormált (ld. 4.5.2.2. Lemma): ha μ a szóban forgó csoport (normalizált) Haar-mértéke (ld. 4.4. xxxviii) megjegyzés), akkor

$$\int \varphi_n \cdot \varphi_m \, d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Vezessük be az $\mathbf{N}$-ben a következő műveletet: ha

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \cdot 2^k, \; m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot 2^k \in \mathbf{N},$$

akkor legyen

$$n \oplus m := \sum_{k=0}^{\infty} |n_k - m_k| \cdot 2^k.$$

Eléggé nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{N}$ ezzel a művelettel egy Abel-csoport, és

$$\varphi_{n \oplus m} = \varphi_n \cdot \varphi_m \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Ez azt is jelenti, hogy a $\mathbf{\Gamma}$ karaktercsoport izomorf az $\mathbf{N}$-nel.

A diadikus csoport tárgyalásakor a $\mathbf{G}_2$ helyett kiindulhatunk a $[0, 1)$ intervallumból is, ezzel a szóban forgó csoportnak egy másik, vele izomorf reprezentációját adva. Csupán vázolva a most mondottak hátterét, legyen ui. egy $x \in [0, 1)$ szám diadikus alakban való kifejtése a következő:

$$(*) \qquad x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k-1} \qquad (x_k \in \{0, 1\}, \, k \in \mathbf{N}).$$

Ez a felírás egy adott x esetén egyértelmű, ha nem engedünk meg olyan előállítást, amelyben egy indextől kezdve minden x_k együttható 1-gyel egyenlő. (Az ilyen kifejtések a $[0, 1)$ ún. *diadikusan racionális* elemeire lehetségesek, azaz akkor, amikor valamilyen $n \in \mathbf{N}$ és $j = 0, 1, ..., 2^n - 1$ mellett $x = j \cdot 2^{-n}$. Az ilyen x-ekre kétféle $(*)$ alak létezik, az egyikben egy indextől kezdve minden x_k együttható 1, a másikban 0. Ez utóbbit fogadjuk el a szóban forgó $x = j \cdot 2^{-n}$ szám $(*)$ előállításának.) Tekintsük ezek után a

$$p(x) := p\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k-1} \right) := (x_k, k \in \mathbf{N}) \in \mathbf{G}_2$$

leképezést, valamint legyen

$$r_n := \rho_n \circ p,\ w_n := \varphi_n \circ p \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így értelmezett (r_n) függvényrendszert *Rademacher-rendszernek,* a (w_n) rendszert pedig *Walsh-Paley-rendszernek* nevezzük. Továbbá ebben az interpretációban a csoport (normalizált) Haar-mértéke nem más, mint a $[0,1)$-beli Lebesgue-mérték (ld. 2.7.), amire nézve a Walsh-Paley-rendszer ortonormált:

$$\int_0^1 w_n(x)\cdot w_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy a fenti Rademacher-függvényekhez az alábbi „konstrukcióval" is eljuthatunk. Legyen ti. $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a következő, 1-szerint periodikus függvény:

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1). \end{cases}$$

Ezek után az r_n $(n \in \mathbf{N})$ függvényeket így kapjuk meg:

$$r_n(x) := r(2^n x) \qquad (x \in [0,1)).$$

Ha tehát $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k$ $(n_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$ és $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k}$ $(x_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$ az $x \in [0,1)$ szám fenti diadikus kifejtése, akkor

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (-1)^{n_k x_k} = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k}.$$

Legyen most $m = (m_n)$ $(2 \leq m_n \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N})$ egy adott sorozat, és tekintsük a diadikus csoport (ld. 4.4. xxxviii) megjegyzés) általánosításaként a $(\mathbf{G}_m, \mathcal{T}_m, \wp_m)$ Vilenkin-csoportot a μ normalizált Haar-mértékkel. A részletek mellőzésével csupán megjegyezzük, hogy a fentiekkel analóg módon jutunk a következőkhöz. Legyen ui. most

$$\rho_k(x) := e^{2\pi\imath x_k/m_k} \qquad (k \in \mathbf{N},\ x = (x_n) \in G_{\mathbf{m}}).$$

Ha

$$M_0 := 1,\ M_n := \prod_{j=0}^{n-1} m_j \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

akkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ szám egyértelműen írható fel az alábbi alakban:

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j,$$

ahol $n_j \in \{0, ..., m_j - 1\}$ $(j \in \mathbf{N})$. Ekkor a szóban forgó Vilenkin-csoport $\mathbf{\Gamma}$ duális csoportját pontosan az alábbi függvények alkotják:

$$\varphi_n := \prod_{k=0}^{\infty} \rho_k^{n_k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\mathbf{\Gamma} = \{\varphi_n : n \in \mathbf{N}\}$ *Vilenkin-rendszer* ortonormált rendszer:

$$\int \varphi_n \cdot \overline{\varphi_k}\, d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ 1 & (n = k) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ha a fenti $m = (m_n)$ sorozatra valamilyen $2 \leq p \in \mathbf{N}$ mellett $m_n = p$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az így kapott Vilenkin-rendeszert *Chrestenson-rendszernek* is szokás nevezni. Az illető Vilenkin-csoportnak is megvan a $[0, 1)$-reprezentációja, ezért pl. azt mondhatjuk, hogy a Walsh-Paley-rendszer egy speciális Chrestenson-rendszer: $m_n = 2$ $(n \in \mathbf{N})$.

5.4. Trigonometrikus Fourier-transzformáció

A továbbiakban tekintsük valamely $n = 1, 2, ...$ mellett a fenti 5.3.3. Példában említett $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt topologikus Abel-csoportot, amikor is (az ott bevezetett jelölésekkel) $X := \mathbf{R}^n$, a $\mathcal{T}$ topológia a „szokásos" $\langle , \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ skaláris szorzás által indukált $\|.\|_2$ vektornorma szerinti topológia, a $\wp : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kommutatív csoportművelet pedig az $\mathbf{R}^n$-beli vektorok közötti megszokott összeadás.

5.4.1. Borel-mértékek transzformáltja

Emlékeztetünk arra, hogy a most említett $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér a végtelenben megszámlálható (ld. 4.1.3.), valamint az $\mathbf{R}^n$-feletti $\hat{\mu}_n$ Lebesgue-mérték (ld. 2.7.1.) a most vizsgált csoport Haar-mértéke (ld. 4.3.3.). Az 5.1. pontban bevezetett korlátos Borel-mértékek $\mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ halmaza most az $\mathbf{R}^n$ Borel-halmazain (ld. 2.7.1.1. Definíció) értelmezett $\mu : \Omega_n \to [0, +\infty)$ (korlátos) mértékek összessége.

Ez utóbbiakkal kapcsolatos a

5.4.1.1. Definíció. Legyen $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ tetszőleges korlátos Borel-mérték. Ekkor a

$$\widehat{\mu}(x) := \int e_x\, d\mu \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

hozzárendeléssel definiált $\widehat{\mu} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ leképezést a μ mérték *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.

Legyen pl. a μ a korábban már többször említett, valamilyen $a \in \mathbf{R}^n$ pontban koncentrált Dirac-mérték (ld. 3.12. vii) megjegyzés):

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (a \notin A) \\ 1 & (a \in A) \end{cases} \qquad (A \in \Omega_n).$$

Ekkor minden $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$\widehat{\mu}(x) = \int e_x \, d\mu = e_x(a) = e_a(x),$$

tehát $\widehat{\mu} = e_a$.

Nyilván tetszőleges $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ és $x \in \mathbf{R}^n$ mellett igaz, hogy

$$|\widehat{\mu}(x)| \leq \|\mu\| \; (= \widehat{\mu}(0)).$$

Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{M}(X) \ni \mu \mapsto \widehat{\mu}$ leképezés additív és pozitív homogén, továbbá bármelyik $\mu \in \mathbf{M}(X)$ mértékre a $\widehat{\mu}$ függvény egyenletesen folytonos és „pozitív definit". Az is igaz, hogy az előbbi $\mathbf{M}(X) \ni \mu \mapsto \widehat{\mu}$ leképezés egyfajta multiplikativitási tulajdonsággal is rendelkezik, valamint az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ típusú lineáris operátorokkal bizonyos értelemben felcserélhető. Ez utóbbit illetően emlékeztetünk arra, hogy ha a $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineáris operátor, akkor a $T^* : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *adjungáltja* is lineáris, ahol az utóbbit a következő egyenlőség határozza meg:

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

5.4.1.2. Lemma. *Tetszőleges* $\mu, \nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ *mértékek esetén*

a) $\widehat{\mu + \nu} = \widehat{\mu} + \widehat{\nu}$ *és* $\widehat{\alpha \cdot \mu} = \alpha \cdot \widehat{\mu}$ $(0 \leq \alpha \in \mathbf{R})$;

b) *a* $\widehat{\mu} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *függvény egyenletesen folytonos*;

c) *tetszőleges* $1 \leq m \in \mathbf{N}$ *index és* $a_1, ..., a_m \in \mathbf{R}^n$ *vektorok mellett az*

$$A := \Big(\widehat{\mu}(a_j - a_k)\Big)_{j,k=1}^m \in \mathbf{C}^{m \times m}$$

mátrix pozitív szemidefinit;

d) *a* $\mathbf{M}(X) \ni \mu \mapsto \widehat{\mu}$ *leképezés a* $*$ *konvolúcióra nézve multiplikativ, azaz*

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu};$$

e) *bármilyen* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *lineáris operátorra*

$$\widehat{T[\mu]} = \widehat{\mu} \circ T^*.$$

Bizonyítás. Az 5.4.1.1. Definíció alapján az a) állítás nyilvánvaló. Legyen továbbá

$$K_N := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y\|_2 \leq N\} \qquad (N \in \mathbf{N}),$$

ekkor a (K_N) halmaz-sorozat monoton nőve tart az $\mathbf{R}^n$-hez. Így

$$\mathbf{R}^n \setminus K_{N+1} \subset \mathbf{R}^n \setminus K_N \qquad (N \in \mathbf{N}),$$

és $\bigcap_{N=0}^{\infty}(\mathbf{R}^n \setminus K_N) = \emptyset$. Mivel a μ korlátos mérték, ezért alkalmazható a 2.3.1.4. Tétel, miszerint

$$\lim_{N\to\infty} \mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N) = 0.$$

Elmondhatjuk tehát, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ index, amivel $\mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N) < \varepsilon$. Ha $a, b \in \mathbf{R}^n$ és $y \in K_N$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$|\langle a-b, y\rangle| \leq \|a-b\|_2 \cdot \|y\|_2 \leq N \cdot \|a-b\|_2.$$

Mivel (az előbbi jelöléseket megtartva)

$$|e_a(y) - e_b(y)| = |1 - e^{\imath\cdot\langle a-b,y\rangle}| = 2\cdot \Big|\sin \frac{\langle a-b, y\rangle}{2}\Big| \leq |\langle a-b, y\rangle| \leq N\cdot \|a-b\|_2,$$

ezért $\delta > 0$ és $\|a-b\|_2 < \delta$ esetén

$$|\widehat{\mu}(a) - \widehat{\mu}(b)| \leq \int |e_a - e_b|\, d\mu = \int_{K_N} |e_a - e_b|\, d\mu + \int_{\mathbf{R}^n\setminus K_N} |e_a - e_b|\, d\mu \leq$$

$$N\cdot\delta\cdot\mu(K_N) + 2\cdot\mu(\mathbf{R}^n \setminus K_N) \leq N\cdot\delta\cdot\mu(K_N) + 2\cdot\varepsilon.$$

Ha tehát a $\delta > 0$ számra $N\cdot\delta\cdot\mu(K_N) < \varepsilon$ teljesül, akkor a fentiek szerint az $a, b \in \mathbf{R}^n$, $\|a-b\|_2 < \delta$ vektorokra

$$|\widehat{\mu}(a) - \widehat{\mu}(b)| < 3\varepsilon,$$

ami a b) állítás.

A c)-hez azt kell megmutatnunk, hogy minden $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbf{C}^m$ vektorra

$$(*) \qquad \sum_{j,k=1}^{m} \widehat{\mu}(a_j - a_k)\cdot z_j \cdot \overline{z_k} \geq 0.$$

(A $\overline{(.)}$ felülhúzás most a komplex konjugálást jelöli.) Vegyük észre ehhez, hogy a $(*)$ bal oldala így is írható:

$$\int \Big(\sum_{j,k=1}^{m} z_j\cdot \overline{z_k}\cdot e_{z_j - z_k}\Big)\, d\mu = \int \Big(\sum_{j=1}^{m} z_j \cdot e_{z_j} \cdot \overline{\sum_{k=1}^{m} z_k \cdot e_{z_k}}\Big)\, d\mu = \int \Big|\sum_{j=1}^{m} z_j \cdot e_{z_j}\Big|^2\, d\mu.$$

Ez nyilván a c) állítás igazolását jelenti.

A $*$ konvolúció értelmezése alapján (ld. 5.1.) tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ pontban

$$\widehat{\mu * \nu}(x) = \int e_x \, d(\mu * \nu) = \int \left(\int e_x(y+z) \, d\mu(y) \right) d\nu(z) =$$

$$\int \left(\int e_x(y) \, d\mu(y) \right) \cdot e_x(z) \, d\nu(z) = \left(\int e_x \, d\mu \right) \cdot \left(\int e_x \, d\nu \right) = \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\nu}(x),$$

amit a d) állítás szerint igazolni kellett.

Az e) bizonyításához először is jegyezzük meg, hogy a T – folytonos lévén – egyúttal (Borel-)mérhető is (ld. 3.4. xv) megjegyzés), így a μ mérték T által létesített $T[\mu]$ képe (ld. 2.7.) is $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$-beli. Ezért bármilyen $x \in \mathbf{R}^n$ pontot is véve, a következőt mondhatjuk:

$$\widehat{T[\mu]}(x) = \int e_x \, d\,(T[\mu]) = \int e_x \circ T \, d\mu = \int e_{T^* x} \, d\mu = \widehat{\mu}(T^* x).$$

Az előbbi egyenlőségekben felhasználtuk egyrészt a $T[\mu]$ képmérték szerinti integrálásra vonatkozó formulát (ld. 3.4. xv) megjegyzés), valamint az

$$e_x(Ty) = e^{\imath \cdot \langle x, Ty \rangle} = e^{\imath \cdot \langle T^* x, y \rangle} = e_{T^* x}(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

azonosságot. ■

Tehát $\widehat{\mu} \in L^\infty(\hat{\mu}_n)$ és

$$\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\| \qquad (\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)).$$

Megmutatható, hogy bármely $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ pozitív definit, folytonos függvényhez van olyan $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ mérték, hogy $\varphi = \widehat{\mu}$ (*Bochner-tétel*).

5.4.2. L^1-beli függvények Fourier-transzformáltja

Ha most (és a továbbiakban is) a λ szimbólum az $\mathbf{R}^n$-beli Lebesgue-mértéket jelöli (ld. 2.7.1.), és az $f \in L^+(\lambda) \cap L^1(\lambda)$ függvénnyel

$$\nu(A) := \lambda_f(A) \qquad (A \in \Omega_n),$$

akkor (ld. 3.11.) $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$, valamint a 3.6.2. Tétel miatt

$$(**) \qquad \widehat{\nu}(x) = \int e_x \, d\mu_f = \int e_x \cdot f \, d\mu \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Mivel bármelyik $x \in \mathbf{R}^n$ esetén az $e_x \cdot f$ mérhető függvény (ld. 3.1.) és $|e_x \cdot f| \leq f$, ezért $e_x \cdot f \in L^1(\lambda)$. Ebből a szempontból nyilván lényegtelen, hogy az f egy nemnegatív függvény, más szóval tetszőleges $f \in L^1(\lambda)$ és $x \in \mathbf{R}^n$ mellett $e_x \cdot f \in L^1(\lambda)$.

A most mondottakat figyelembe véve a $(**)$ formula apropóján vezessük be a következő definíciót:

5.4.2.3. Definíció. Egy $f \in L^1(\lambda)$ függvény esetén az

$$\hat{f}(x) := \int f e_x \, d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

hozzárendelési utasítással értelmezett $\hat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ leképezést az f függvény *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.

Ha tehát az előbbiekben $f \geq 0$ is igaz, akkor a definíciónk előtti bevezető szerint

$$\widehat{\mu_f} = \hat{f}.$$

Részben az 5.4.1.2. Lemma bizonyítására gondolva analóg módon könnyen adódik a

5.4.2.4. Lemma.

a) *bármelyik* $f \in L^1(\lambda)$ *esetén az* $\hat{f}$ *függvény egyenletesen folytonos*;

b) *tetszőleges* $f,\, h \in L^1(\lambda)$ *függvényeket véve*

$$\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h};$$

c) *ha* $f \in L^1(\lambda)$ *és* $F(x) := \overline{f(-x)}$ $(x \in \mathbf{R}^n)$, *akkor* $\hat{F} = \overline{\hat{f}}$;

d) $f, g \in L^1(\lambda) \implies \int \hat{f} g \, d\lambda = \int \hat{g} f \, d\lambda$ (*szorzási szabály*);

e) *az* $L^1(\lambda) \ni f \mapsto T(f) := \hat{f} \in L^\infty(\lambda)$ *operátor lineáris és korlátos, nevezetesen*

$$T(f + cg) = \hat{f} + c \cdot \hat{g} \qquad (f,\, g \in L^1(\lambda),\, c \in \mathbf{R})$$

és

$$\|Tf\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \qquad (f \in L^1(\lambda)),$$

sőt,

$$\|T\| := \min\{q \geq 0 : \|\hat{f}\|_\infty \leq q \cdot \|f\|_1 \quad (f \in L^1(\lambda))\} = 1.$$

A d)-t indoklandó elég a Fubini-tételre (ld. 3.15.5. Tétel) hivatkozni:

$$\int \hat{f} g \, d\lambda = \int \left(\int f(t) e^{\imath \langle t, x \rangle} dt \right) \cdot g(x) \, dx = \int f(t) \cdot \left(\int g(x) e^{\imath \langle t, x \rangle} dx \right) dt = \int f \hat{g} \, d\lambda.$$

Az eddigi jelöléseket megtartva a Fourier-analízis egyik klasszikus alaptételét tárgyaljuk a továbbiakban. Nevezetesen, igaz az

5.4.2.5. Tétel (Riemann-Lebesgue-lemma). *Tetszőleges* $f \in L^1(\lambda)$ *esetén*

$$\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Bizonyítás. A technikai egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $n = 1$. (Az $n > 1$ esetre könnyen általánosítható az alábbi gondolatmenetet.) Legyen először is $f = \chi_I$ valamilyen $I := [a, b)$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ intervallummal, ekkor

$$\hat{f}(x) = \int \chi_I \cdot e_x \, d\mu = \int_a^b e^{\imath xt} \, dt,$$

ahol az utóbbi integrál egy Riemann-integrál. Tehát $x \neq 0$ esetén

$$|\hat{f}(x)| = |-\imath \cdot (e^{\imath bx} - e^{\imath ax})/x| \leq 2/|x|.$$

Innen a $\lim_{|x| \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$ egyenlőség rögtön adódik.

Ezzel a Fourier-transzformáció linearitása miatt egyúttal az előbbi χ_I $(I \in \mathbf{I}^1)$ függvények véges lineáris kombinációinak az $\mathcal{L}$ osztályára is igazoltuk az állításunkat. Ha viszont $f \in L^1(\lambda)$, akkor az $\mathcal{L}$-beli lépcsősfüggvényeknek egy alkalmas f_n $(n \in \mathbf{N})$ sorozatával $\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0$ (ld. 3.6. xix) megjegyzés), azaz minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ index, amivel $\|f - f_N\|_1 < \varepsilon$. A már bebizonyított

$$\lim_{|x| \to +\infty} \widehat{f_N}(x) = 0 \qquad (N \in \mathbf{N})$$

relációt felhasználva kapunk egy olyan $r > 0$ számot is, hogy $|\widehat{f_N}(x)| < \varepsilon$ $(x \in \mathbf{R},\ |x| > r)$. Minden ilyen x-re (ld. 4.5.3.4. Lemma)

$$|Tf(x)| = |\hat{f}(x)| \leq |\widehat{f_N}(x)| + |T(f - f_N)(x)| \leq |\widehat{f_N}(x)| + \|f - f_N\|_1 < 2 \cdot \varepsilon.$$

■

Könnyű példával illusztrálni azt, hogy egy $f \in L^1(\lambda)$ függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltja nem feltétlenül integrálható. Erről ui. könnyen meggyőződhetünk, ha kiszámítjuk pl. $(n = 1$ esetén) az $f := \chi_{[0,1]}$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\hat{f}(x) = \int_0^1 e^{\imath xt} \, dt = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{e^{\imath x} - 1}{\imath x} & (x \neq 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát (ld. 3.6. xxviii) megjegyzés)

$$\|\hat{f}\|_1 = \int \frac{|e^{\imath x} - 1|}{|x|} \, dx = \int \frac{|\sin(x/2)|}{|x/2|} \, dx = +\infty.$$

Ugyanakkor a Fourier-transzformált integrálhatósága több szempontból is lényeges. Számos kritérium ismert egy $f \in L^1(\lambda)$ függvényt illetően arra nézve, hogy $\hat{f} \in L^1(\lambda)$ is igaz legyen. Sőt, az utóbbi teljesülése esetén maga az f függvény is „rekonstruálható" a Fourier-transzformáltjából. A továbbiakban ezzel az szituációval, az ún. *inverzió* kérdésével foglalkozunk.

Az ún. inverziós alaptétel igazolásához szükségünk az alábbi, számos egyéb szempontból is fontos szerepet játszó állításra.

5.4.2.6. Lemma. *Legyen* $1 \le n \in \mathbf{N}$ *és*

$$h(x) := e^{-\|x\|_2^2/2} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor $\hat{h} = (2\pi)^{n/2} \cdot h$.

Bizonyítás. Világos, hogy $f \in L^1(\lambda)$. Ha $x \in \mathbf{R}^n$, akkor

$$\hat{h}(x) = \int e^{-\sum_{k=1}^n y_k^2/2} \cdot e^{\imath \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k}\, dy_1 \cdots dy_n =$$

$$\int \prod_{k=1}^n e^{-y_k^2/2} \cdot e^{\imath x_k y_k}\, dy_1 \cdots dy_n = \prod_{k=1}^n \int e^{-y_k^2/2} \cdot e^{\imath x_k y_k}\, dy_k =$$

$$\prod_{k=1}^n \int e^{-(y_k - \imath x_k)^2/2 - x_k^2/2}\, dy_k = \prod_{k=1}^n e^{-x_k^2/2} \cdot \int e^{-(y_k - \imath x_k)^2/2}\, dy_k.$$

Az utóbbi szorzatban szereplő integrálok kiszámításához legyen az $a > 0$ és $\mathbf{R} \ni b \neq 0$ (pl. $b > 0$) számok esetén a T az a téglalap a komplex síkon, aminek a csúcspontjai:

$$\pm a,\ \pm a - \imath b,$$

és legyen a φ_a függvény (komplex sima út) a T kerülete (az óramutató járásával megegyező irányban). Ekkor a komplex függvénytanból jól ismert Cauchy-féle alaptétel szerint

$$\int_{\varphi_a} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

A T téglalap függőleges $(\varphi_a^{1,2})$ oldalainak a $z = \pm a + \imath t \quad (-b \le t \le 0)$ pontjaiban

$$\left| e^{-z^2/2} \right| = e^{-a^2/2} \cdot e^{t^2/2} \le e^{b^2/2} \cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty),$$

így

$$\left| \int_{\varphi_a^{1,2}} e^{-z^2/2} dz \right| \le |b| \cdot e^{b^2/2} \cdot e^{-a^2/2} \to 0 \qquad (a \to +\infty).$$

A T vízszintes oldalain az integrálok:

$$-\int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2}dt, \text{ valamint } \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt.$$

Következésképpen

$$0 = \lim_{a\to+\infty}\int_{\varphi_a} e^{-z^2/2}dz = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt - \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2}dt,$$

amiből

$$\int e^{-(t-\imath b)^2/2}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-(t-\imath b)^2/2}\,dt =$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}\,dt = \int e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2}\cdot\int e^{-t^2}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

következik. (Ha $b<0$, akkor analóg számolással jutunk ugyanerre az eredményre.) Tehát bármelyik $k=1,...,n$ mellett

$$\int e^{-(y_k-\imath x_k)^2/2}\,dy_k = \sqrt{2\pi},$$

ezért $\hat{h}(x) = (2\pi)^{n/2}\cdot\prod_{k=1}^{n} e^{-x_k^2/2} = (2\pi)^{n/2}\cdot h(x)$, amit be kellet bizonyítani. ■

(Megjegyezzük, hogy – lévén $a,b\in\mathbf{R}$ esetén

$$\int e^{-(y-\imath(a+\imath b))^2/2}\,dy = \int e^{-(y+b-\imath a)^2/2}\,dy = \int e^{-(y-\imath a)^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi},$$

– ezért a fentiekben $x\in\mathbf{R}^n$ helyett $x\in\mathbf{C}^n$ is írható.)

5.4.2.7. Tétel (inverzió). *Tegyük fel, hogy az $f\in L^1(\lambda)$ függvényre $\hat{f}\in L^1(\lambda)$. Ekkor igaz az alábbi inverziós formula*:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int \hat{f}e_{-x}\,d\mu \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}^n).$$

(Mivel $\hat{f}\in L^1$ miatt az

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto (2\pi)^{-n}\cdot\int \hat{f}e_{-x}\,d\mu$$

leképezés folytonos, ezért – az f függvényt esetleg egy nulla-(Lebesgue-)mértékű halmazon megváltoztatva – az előbbi inverziós egyenlőség tetszőleges $x\in\mathbf{R}^n$ esetén igaz lesz.)

Bizonyítás. Tekintsük (ld. 5.4.2.6. Lemma) az

$$F_N(t) := \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}\cdot h(t/N) \qquad (t\in\mathbf{R}^n, 0<N\in\mathbf{N})$$

függvénysorozatot, ahol az $x \in \mathbf{R}^n$ (tetszőlegesen) rögzített. Ekkor minden $\mathbf{R}^n \ni t$-re

$$\lim_{N\to\infty} F_N(t) = \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle},$$

továbbá $|F_N| \le |\hat{f}| \in L^1(\lambda)$ $(0 < N \in \mathbf{N})$ miatt alkalmazható a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.6. Tétel), miszerint

$$\int \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}dt = \lim_{N\to\infty}\int \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}\cdot h(t/N)\,dt.$$

Lássuk be, hogy

$$\int \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}\cdot h(t/N)\,dt = N^n\int f(x+t)h(Nt)\,dt \qquad (0 < N \in \mathbf{N}).$$

Valóban (ld. 5.5. xii) megjegyzés), $\hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle} = \widehat{\tau_x f}(t)$, valamint a $H_N(t) := h(t/N)$ $(t \in \mathbf{R}^n)$ jelöléssel

$$\widehat{H_N}(y) = \int h(t/N)e^{\imath\langle y,t\rangle}dt = N^n\int h(z)e^{\imath\langle y,Nz\rangle}dz =$$

$$N^n\int h(z)e^{\imath\langle Ny,z\rangle}dz = N^n\cdot\hat{h}(Ny) = N^n(2\pi)^{n/2}\cdot h(Ny) \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen

$$\int \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}h(t/N)\,dt = \int \widehat{\tau_x f}(t)\cdot H_N(t)\,dt =$$

$$\int \tau_x f(t)\cdot\widehat{H_N}(t)\,dt = (2\pi)^{n/2}N^n\cdot\int f(x+t)\cdot h(Nt)\,dt.$$

Mivel $N^n\int h(Nt)\,dt = \int h(t)\,dt = \hat{h}(0) = (2\pi)^{n/2}$, ezért

$$\Delta_N(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int \hat{f}(t)e^{-\imath\langle x,t\rangle}\cdot h(t/N)\,dt - f(x) =$$

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int (f(x+t)-f(x))\,h(Nt)\,dt.$$

A Fubini-tételt (ld. 3.15.5. Tétel) alkalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy

$$\|\Delta_N\|_1 \le \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int\left(\int |f(x+t)-f(x|\cdot h(Nt)\,dt\right)dx =$$

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int h(Nt)\cdot\|\tau_t f - f\|_1\,dt = \frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\left(\int_{G_r}\dots + \int_{\mathbf{R}^n\setminus G_r}\dots\right)$$

(tetszőleges $r > 0$ mellett, ahol $G_r := \{t \in \mathbf{R}^n : \|t\|_2 \le r\}$). Világos, hogy

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int_{G_r} h(Nt)\cdot\|\tau_t f - f\|_1\,dt \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|h\|_1\cdot\sup_{\|t\|_2\le r}\|\mathcal{T}_t f - f\|_1 =$$

$$\sup_{\|t\|_2 \le r} \|\tau_t f - f\|_1 \to 0 \qquad (r \to 0).$$

Továbbá

$$\frac{N^n}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} h(Nt) \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 \, dt \le \frac{2\|f\|_1 \cdot N^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} h(Nt) \, dt =$$

$$\frac{2\|f\|_1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_{Nr}} h(t) \, dt \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

A fentiekből már nyilván következik, hogy $\lim_{N\to\infty} \|\Delta_N\|_1 = 0$, így egyúttal egy alkalmas (N_k) indexsorozattal m.m. $x \in \mathbf{R}^n$ esetén $\lim_{k\to\infty} \Delta_{N_k}(x) = 0$ is igaz. Ismét a 3.5.6. (Lebesgue-)tételt alkalmazva ezért azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} h(t/N_k) \, dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} \lim_{k\to\infty} h(t/N_k) \, dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt.$$

■

A Fourier-transzformált integrálhatóságának egyéb következményei is vannak. Így pl. igaz az

5.4.2.8. Lemma. *Ha* $f, \hat{f} \in L^1(\lambda)$, *akkor egyúttal* $f, \hat{f} \in L^2(\lambda)$.

Bizonyítás. A feltételek miatt ui. az f-re alkalmazható az inverziós formula (ld. 5.4.2.7. Tétel):

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \hat{f}(t) e^{-\imath\langle t,x\rangle} dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \widehat{F}(-x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $F := \hat{f}$. Mivel az $\widehat{F}$ transzformált folytonos és a Riemann-Lebesgue-lemma (ld. 5.4.2.5. Tétel) alkalmazásával $\lim_{\|x\|_2\to\infty} \widehat{F}(x) = 0$, ezért van olyan $r > 0$, hogy a

$$G_r := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \le r\}$$

jelöléssel $|\widehat{F}(x)| < 1$ $(x \in \mathbf{R}^n \setminus G_r)$. Következésképpen (a Lebesgue-mérték tükrözésinvarianciáját (ld. 2.7.) is felhasználva)

$$\int |f|^2 \, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{G_r} |\widehat{F}(x)|^2 dx + \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\widehat{F}(x)|^2 dx \le$$

$$\frac{|G_r|}{(2\pi)^{2n}} \cdot \max_{x \in G_r} |\widehat{F}(x)|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |\widehat{F}(x)| dx \le$$

$$\frac{|G_r|}{(2\pi)^{2n}}\cdot \max_{x\in G_r}|\widehat{F}(x)|^2+\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int|f(x)|\,dx<+\infty,$$

ahol $|G_r|$ jelöli a G_r „gömb" (Lebesgue-)mértékét.

Tehát $f\in L^2(\lambda)$. A most mondottakat az f helyett az $\hat{f}$ Fourier-transzformáltra megismételve az $\widehat{F}(x)=(2\pi)^n\cdot f(-x)$ (m.m. $x\in\mathbf{R}^n$) egyenlőség alapján analóg módon kapjuk a „hiányzó" $\hat{f}\in L^2(\lambda)$ tartalmazást. ■

Jelöljük az $\widehat{L}^1$ szimbólummal az összes $L^1(\lambda)$-beli függvény Fourier-transzformáltjának a halmazát. Az eddigi meggondolásainkból (ld. 5.4.2.4. Lemma) rögtön adódik az, hogy az $\widehat{L}^1$ részalgebrája a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$ térnek (a szokásos függvényműveletekre nézve), valamint zárt a komplex konjugálásra vonatkozóan. Nem nehéz megmutatni továbbá, hogy az $\widehat{L}^1$ egy „elválasztó" függvényhalmaz is, azaz bármelyik két különböző $x,y\in\mathbf{R}^n$ vektorhoz létezik olyan $g\in L^1(\lambda)$, amire $\hat{g}(x)\neq\hat{g}(y)$. Legyen ui. $z:=x-y$, ekkor egy alkalmas $q\in\mathbf{R}$ mellett $e_z(qz)\neq 1$, így az e_z függvény folytonossága miatt van olyan $r>0$ szám is, hogy

$$\frac{e_x(t)}{e_y(t)}=e_z(t)\neq 1\qquad (t\in\mathbf{R}^n,\ \|t-qz\|_2\le r).$$

Ha tehát

$$K:=\{t\in\mathbf{R}^n:\|t-qz\|_2\le r\},$$

akkor $e_x(t)\neq e_y(t)$ $(t\in K)$, ezért a K kompaktságát és az e_x, e_y függvények folytonosságát is kihasználva

$$m:=\min\{|e_x(t)-e_y(t)|^2:t\in K\}>0.$$

Tekintsük most már a $g:=\chi_K\cdot(e_{-x}-e_{-y})$ függvényt. Ez nyilván $L^1(\lambda)$-beli, és

$$\hat{g}(x)-\hat{g}(y)=\int\chi_K\cdot(e_{-x}-e_{-y})\cdot(e_x-e_y)\,d\lambda=\int\chi_K\cdot\overline{(e_x-e_y)}\cdot(e_x-e_y)\,d\lambda=$$

$$\int\chi_K\cdot|e_x-e_y|^2\,d\lambda\ge m\cdot\lambda(K)>0.$$

Az előbbiekkel analóg gondolatmenettel kapjuk azt is, hogy tetszőleges $x\in\mathbf{R}^n$ esetén az

$$f:=\chi_{\{t\in\mathbf{R}^n:\|t\|_2\le 1\}}\cdot e_{-x}\in L^1(\lambda)$$

függvényre $\hat{f}(x)>0$ teljesül.

Minden „készen áll" ahhoz, hogy a $\widehat{L}^1$ részalgebrára alkalmazhassuk a Stone-Weierstrass-tételt. [2]

[2] Emlékeztetünk a 4.3. pont 1) lábjegyzetében már idézett Stone-Weierstrass-tétel „komplex" változatára (ld. még 5.5. xiv) megjegyzés). Nevezetesen, ha az $(\mathcal{X},\mathcal{R})$ egy kompakt T_2-tér, az $\mathcal{A}$ pedig egy részalgebrája az $\mathcal{X}$-en értelmezett, $\mathbf{C}$-be képező folytonos függvények $\mathcal{C}(X)$ halmazának, akkor az alábbi feltételek együttes teljesülése elegendő ahhoz, hogy az $\mathcal{A}$ a $\|.\|_\infty$ normában mindenütt sűrű legyen a $\mathcal{C}(\mathcal{X})$-ben:

a) tetszőleges $x,y\in\mathcal{X}$, $x\neq y$ esetén van olyan $f\in\mathcal{A}$, hogy $f(x)\neq f(y)$;

b) minden $x\in\mathcal{X}$ ponthoz létezik olyan $f\in\mathcal{A}$ függvény, amire $f(x)\neq 0$;

c) az $\mathcal{A}$ algebra zárt a komplex konjugálásra nézve: bármelyik $f\in\mathcal{A}$ függvényre $\overline{f}\in\mathcal{A}$.

5.4.2.9. Tétel. *A transzformáltak $\widehat{L}^1$ halmaza a $\|.\|_\infty$ norma értelmében mindenütt sűrű a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$-ben.*

A következő tételben a Fourier-transzformáció két alapvető tulajdonságát tárgyaljuk.

5.4.2.10. Tétel. *Az $\mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$-beli Borel-mértékekre vagy az $L^1(\lambda)$-beli függvényekre értelmezett Fourier-transzformáció injektív, azaz*

a) $\mu_1,\, \mu_2 \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n),\ \mu_1 \neq \mu_2 \implies \widehat{\mu}_1 \neq \widehat{\mu}_2$;

b) $f,\, g \in L^1(\lambda),\ f \neq g \implies \hat{f} \neq \hat{g}$.

Bizonyítás. Az a) állítás igazolása érdekében azt mutatjuk meg, hogy ha $\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2$, akkor $\mu_1 = \mu_2$. A Fubini-tételt (ld. 3.15.5. Tétel) alkalmazva ui. bármelyik $f \in L^1(\lambda)$ esetén

$$\int \hat{f}\, d\mu_1 = \int \left(\int e_x(y) \cdot f(y)\, d\lambda(y) \right) d\mu_1(x) =$$

$$\int \left(\int e_y(x)\, d\mu_1(x) \right) \cdot f(y)\, d\lambda(y) = \int f \cdot \widehat{\mu}_1\, d\lambda,$$

valamint hasonló gondolatmenettel

$$\int \hat{f}\, d\mu_2 = \int f \cdot \widehat{\mu}_2\, d\lambda$$

adódik. Figyelembe véve a $\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2$ feltételt, azt kaptuk tehát, hogy

$$\int \hat{f}\, d\mu_1 = \int \hat{f}\, d\mu_2 \qquad (f \in \widehat{L}^1).$$

Az 5.4.2.9. Tételre és a $\|\mu_1\|,\, \|\mu_2\| < +\infty$ egyenlőtlenségekre hivatkozva az utóbbi egyenlőség nem csupán az $\widehat{L}^1$, hanem a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$ függvényosztály elemeire is igaz. Ha ui. $f \in \mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$, akkor az előbb idézett tétel alapján egy alkalmas $f_n \in \widehat{L}^1 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0,$$

így

$$\left| \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2 \right| \leq \left| \int f\, d\mu_1 - \int f_n\, d\mu_1 \right| + \left| \int f\, d\mu_2 - \int f_n\, d\mu_2 \right| \leq$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty \cdot (\|\mu_1\| + \|\mu_2\|) \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Legyen az $I \in \mathbf{I}^n$ (ld. 2.3.2.) egy $\mathbf{R}^n$-beli korlátos, félig nyílt intervallum, $\tilde{I} \in \mathbf{I}^n$ pedig olyan, hogy $I \subset \tilde{I}$ és

$$\inf\{\|x - y\|_2 : x \in I,\, y \in \mathbf{R}^n \setminus \tilde{I}\} > 0.$$

Az

$$F(x) := \frac{\inf\{\|x-y\|_2 : y \in \mathbf{R}^n \setminus \tilde{I}\}}{\inf\{\|x-y\|_2 : y \in I\} + \inf\{\|x-y\|_2 : y \in \mathbf{R}^n \setminus \tilde{I}\}} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvény nyilván eleme a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$-nek, $F(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \tilde{I})$ és $F(y) = 1 \quad (y \in I)$, továbbá $F(z) \in [0,1] \quad (z \in \mathbf{R}^n)$. Alkalmazhatjuk tehát az F-re az előbbiek szerint adódó $\int F\,d\mu_1 = \int F\,d\mu_2$ egyenlőséget, amiből

$$\int F\,d\mu_i = \int \chi_I \cdot F\,d\mu_i + \int \chi_{\tilde{I}\setminus I} \cdot F\,d\mu_i = \mu_i(I) + \int \chi_{\tilde{I}\setminus I} \cdot F\,d\mu_i \qquad (i = 1,2)$$

alapján

$$\left| \int F\,d\mu_i - \mu_i(I) \right| = \left| \int \chi_{\tilde{I}\setminus I} \cdot F\,d\mu_i \right| \le \mu_i(\tilde{I} \setminus I) \qquad (i = 1,2)$$

következik. Ha $\varepsilon > 0$ egy adott szám, akkor a fenti $\tilde{I}$ intervallumot nyilván meg tudjuk úgy is választani, hogy $\mu_i(\tilde{I} \setminus I) < \varepsilon \quad (i = 1,2)$. Ezért

$$|\mu_1(I) - \mu_2(I)| \le \left| \mu_1(I) - \int F\,d\mu_1 \right| + \left| \mu_2(I) - \int F\,d\mu_1 \right| \le \mu_1(\tilde{I} \setminus I) + \mu_2(\tilde{I} \setminus I) < 2\varepsilon,$$

más szóval $\mu_1(I) = \mu_2(I)$.

Az eddig mondottakból tehát azt kaptuk, hogy a μ_1, μ_2 mértékek az $\mathcal{I}^n$ gyűrűn (ld. 2.3.2.) megegyeznek. Az említett mértékek végessége és a 2.5.4. Tétel miatt ezért valóban igaz, hogy $\mu_1 = \mu_2$.

A b) állítás már egyszerűen „elintézhető". Ha ui. $f, g \in L^1(\lambda)$ és $\hat{f} = \hat{g}$, akkor valós értékű f és g esetén a 3.11.2. Tétel és az $\widehat{f^+} + \widehat{g^-} = \widehat{f^-} + \widehat{g^+}$ egyenlőség miatt nyilván igaz, hogy

$$\widehat{\lambda}_{f^+ + g^-} = \widehat{\lambda}_{f^- + g^+}.$$

A már bebizonyított a) állítást alkalmazva innen a $\lambda_{f^+ + g^-} = \lambda_{f^- + g^+}$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan viszont a 3.11.8. Tétel szerint

$$f^+ + g^- = f^- + g^+ \ \ \lambda\text{-m.m.} \implies f = g \ \ \lambda\text{-m.m.}$$

következik.

Tetszőleges (tehát nem feltétlenül valós értékű) f, g függvényekre pedig vegyük észre, hogy az $\hat{f} = \hat{g}$ relációból

$$\widehat{\operatorname{Re} f} = \widehat{\operatorname{Re} g}, \ \widehat{\operatorname{Im} f} = \widehat{\operatorname{Im} g}$$

adódik. (Ez (pl. a valós részekre fogalmazva) egyszerűen a

$$\widehat{\operatorname{Re} f} = (\widehat{f} + \widehat{\overline{f}})/2, \ \widehat{\overline{f}}(x) = \overline{\widehat{f}(-x)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

összefüggésekből adódik.) Innen a b) állítás már nyilvánvaló. ■

5.4.3. L^p-beli függvények Fourier-transzformáltja

Mivel $p > 1$ esetén az $L^p(\lambda)$-beli függvények nem feltétlenül integrálhatók (azaz egy $f \in L^p(\lambda)$ függvényre $f \notin L^1(\lambda)$, következésképpen $fe_x \notin L^1(\lambda)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ bőven előfordulhat), ezért az ilyen $L^p(\lambda)$ függvényosztályok elemeire a Fourier-transzformált az 5.4.2.3. Definíció alapján nem értelmezhető. A következőkben ezt a kérdéskört vizsgáljuk vázlatosan (a technikai egyszerűség érdekében a bizonyításokat többnyire csupán az $n = 1$ esetben részletezve), mintegy eligazításul szolgálva a részletek iránt mélyebben érdeklődők számára.

A $p = 2$ eset

Legyen tehát először $p = 2$, és mutassuk meg, hogy az $L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$ metszethalmaz egy (a $\|.\|_2$ norma értelmében) sűrű altér az $L^2(\lambda)$-ban. Mivel a szóban forgó metszet altér volta triviális, ezert csak a „sűrűségre" koncentrálunk a továbbiakban. Nevezetesen, igaz az

5.4.3.1. Lemma. *Tetszőleges $f \in L^2(\lambda)$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$, hogy $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Az

$$I_k := [-k, k) \in \mathbf{I}^1 \qquad (0 < k \in \mathbf{N})$$

jelöléssel tekintsük ui. az

$$f_k := f \cdot \chi_{I_k} \qquad (0 < k \in \mathbf{N})$$

függvényeket, és lássuk be, hogy ezek $L^1(\lambda)$-beliek. Ti. a (Lebesgue-)mérhetőségük nyilvánvalóan igaz, a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) miatt pedig

$$\int |f_k|\, d\lambda \le \left(\int |f|^2\, d\lambda \right)^{1/2} \cdot \left(\int \chi_{I_k}\, d\lambda \right)^{1/2} \le \sqrt{2k} \cdot \|f\|_2 < +\infty \qquad (0 < k \in \mathbf{N}).$$

Mivel az $(|f_k|^2)$ függvénysorozat monoton nőve konvergál (pontonként) az $|f|^2$ függvényhez, ezért a Beppo Levi-tételt (ld. 3.3.2.3. Tétel) felhasználva az $\int |f_k|^2\, d\lambda$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat is monoton nőve konvergál az $\int |f|^2\, d\lambda$ integrálhoz, tehát az

$$\int |f|^2\, d\lambda = \int |f_k|^2\, d\lambda + \int |f|^2 \cdot \chi_{\mathbf{R} \setminus I_k}\, d\lambda \qquad (k \in \mathbf{N})$$

egyenlőségre tekintettel

$$\lim_{k \to \infty} \int |f|^2 \cdot \chi_{\mathbf{R} \setminus I_k}\, d\lambda = 0.$$

Innen máris adódik az

$$\|f_k - f\|_2^2 = \int |f|^2 \cdot |1 - \chi_{I_k}|^2\, d\lambda = \int |f|^2 \cdot \chi_{\mathbf{R} \setminus I_k}\, d\lambda \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

reláció, így alkalmas $k \in \mathbf{N}$ indexszel a $g := f_k$ függvényre $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. ■

5.4.3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy az* $f, g \in L^1(\lambda)$ *függvényekre* $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\lambda)$. *Ekkor*

a) $\int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}}\, d\lambda = (2\pi)^n \cdot \int f \cdot \overline{g}\, d\lambda$;

b) $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2$.

Bizonyítás. Az 5.4.2.8. Lemma alapján tudjuk, hogy $f, \hat{f}, g, \hat{g} \in L^2(\lambda)$ is teljesül. Nyilvánvaló továbbá, hogy a b) állítás következik az a)-ből ($g := f$). Az a) bizonyításához vegyük észre, hogy a Fubini-tételt (ld. 3.15.5. Tétel) és az inverziós formulát (ld. 5.4.2.7. Tétel) alkalmazva

$$\int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}}\, d\lambda = \int \hat{f}(x) \cdot \left(\int \overline{g(t)} e^{-\imath\langle x,t\rangle} dt \right) dx =$$

$$\int \left(\int \hat{f}(x) e^{-\imath\langle x,t\rangle} dx \right) \cdot \overline{g(t)}\, dt = (2\pi)^n \cdot \int f \cdot \overline{g}\, d\lambda.$$

(Megjegyezzük, hogy $\left| \hat{f}(x) \cdot \overline{g(t)} e^{-\imath\langle x,t\rangle} \right| = |\hat{f}(x)| \cdot |g(t)| \quad (x, t \in \mathbf{R})$ és $\hat{f}, g \in L^1(\lambda)$ miatt az

$$\mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto \hat{f}(x) \cdot \overline{g(t)} e^{-\imath\langle x,t\rangle}$$

leképezés integrálható („kétváltozós") függvény, ezért valóban alkalmazható volt a *Fubini-tétel.*) ■

5.4.3.3. Lemma. *Tekintsük a kompakt tartójú, kétszer folytonosan differenciálható* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *függvényt. Ekkor* $\hat{f} \in L^1(\lambda)$.

Bizonyítás. Legyen az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum olyan, hogy

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus (a, b)).$$

Világos, hogy f', $f'' \in L^1(\lambda)$. Továbbá tetszőleges $0 \neq x \in \mathbf{R}$ helyen

$$\hat{f}(x) = \int f(t) e^{\imath tx}\, dt = \int_a^b f(t) e^{\imath tx} dt = \frac{f(b)e^{\imath bx} - f(a)e^{\imath ax}}{\imath x} - \frac{1}{\imath x} \cdot \int_a^b f'(t) e^{\imath tx} dt =$$

$$-\frac{1}{\imath x} \cdot \int_a^b f'(t) e^{\imath tx} dt = \frac{f'(b)e^{\imath bx} - f'(a)e^{\imath ax}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \int_a^b f''(t) e^{\imath tx} dt =$$

$$-\frac{1}{x^2} \cdot \int_a^b f''(t) e^{\imath tx} dt = -\frac{1}{x^2} \cdot \widehat{f''}(x).$$

Mivel $f'' \in L^1(\lambda)$, így

$$\|\widehat{f''}\|_\infty \leq \|f''\|_1,$$

tehát

$$|\hat{f}(x)| \le \begin{cases} \|f\|_1 & (|x| \le 1) \\ \dfrac{1}{x^2}\cdot \|f''\|_1 & (|x| > 1) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így alkalmas $C > 0$ konstanssal $|\hat{f}(x)| \le \dfrac{C}{1+x^2}$ $(x \in \mathbf{R})$. Innen már nyilvánvaló, hogy $\hat{f} \in L^1(\lambda)$. ■

Az 5.4.3.2. Lemma szerint tehát minden, az 5.4.3.3. Lemmabeli f függvényre

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot \|f\|_2.$$

5.4.3.4. Lemma. *Minden* $f \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$ *függvényre* $\hat{f} \in L^2(\lambda)$ *és*

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot \|f\|_2.$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy a lemmában szereplő f függvényhez és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan kompakt tartójú, kétszer folytonosan differenciálható g függvény, hogy

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon \text{ és } \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Legyen ui. $\delta > 0$, az $I \subset \mathbf{R}$ pedig olyan kompakt intervallum (ld. 5.4.3.1. Tétel bizonyítása), hogy

$$\int_{\mathbf{R}\setminus I} |f|\, d\lambda < \delta, \ \sqrt{\int_{\mathbf{R}\setminus I} |f|^2\, d\lambda} < \delta.$$

Ekkor (ld. 3.6. xix), xx) megjegyzések) létezik olyan

$$h = \sum_k c_k\cdot \chi_{[a_k,b_k]}$$

lépcsősfüggvény, amellyel

$$\operatorname{supp} h \subset I \text{ és } \|f\cdot \chi_I - h\|_2 < \delta/2.$$

Világos, hogy bármelyik itt szereplő (véges sok) k-hoz és minden $q > 0$ számhoz megadható olyan g_k kétszer folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\operatorname{supp} g_k \subset I \text{ és } \|g_k - \chi_{[a_k,b_k]}\|_2 < q.$$

Ha $g := \sum_k c_k g_k$, akkor a g is kétszer folytonosan differenciálható, $\operatorname{supp} g \subset I$, továbbá

$$\|h - g\|_2 \le \sum_k |c_k|\cdot \|g_k - \chi_{[a_k,b_k]}\|_2 \le q\cdot \sum_k |c_k| < \delta/2,$$

hacsak a $q > 0$ „elég kicsi". Következésképpen

$$\|f\cdot\chi_I - g\|_2 \le \|f\cdot\chi_I - h\|_2 + \|h - g\|_2 < \delta.$$

Tehát

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{R}\setminus I} |f|^2\,d\lambda + \|f\cdot\chi_I - g\|_2^2} < \sqrt{2}\cdot\delta.$$

Továbbá a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) alkalmazásával

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbf{R}\setminus I} |f|\,d\lambda + \int_I |f - g|\,d\lambda < \delta + \sqrt{\int_I |f - g|^2\,d\lambda}\cdot\sqrt{|I|} \le$$

$$\delta + \|f - g\|_2\cdot\sqrt{|I|} \le (1 + \sqrt{2|I|})\cdot\delta.$$

Válasszuk most már a szóban forgó δ-t úgy, hogy $\max\{\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2|I|}\}\cdot\delta < \varepsilon$ teljesüljön.

Az előbb belátottak szerint tehát az $f \in L^1(\lambda)\cap L^2(\lambda)$ függvényhez megadható olyan, kétszer folytonosan differenciálható, kompakt tartójú f_k $(k \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat, amelyre

$$\lim_{k\to\infty}\|f - f_k\|_1 = 0 \text{ és } \lim_{k\to\infty}\|f - f_k\|_2 = 0.$$

Az 5.4.3.3. Lemma után tett megjegyzés és az 5.4.2.8. Lemma alapján

$$\hat{f}_k \in L^2(\lambda) \text{ és } \|\hat{f}_k\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot\|f_k\|_2 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Így

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot\|f_k - f_j\|_2 \to 0 \qquad (j, k \to \infty),$$

amiből (lévén az $(L^2, \|.\|_2)$ Banach-tér (ld. 3.5.7. Tétel)) az $(\hat{f}_k)$ sorozat $\|.\|_2$ normában való konvergenciája következik. Van tehát olyan $F \in L^2(\lambda)$ függvény, amellyel

$$(*) \qquad \|\hat{f}_k - F\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Könnyű meggondolni, hogy ez az F függvény csak az f-től függ. Más szóval, ha a $g_k \in L^1(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat is olyan, hogy $\hat{g}_k \in L^1(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ és

$$\|f - g_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

akkor a $G \in L^2(\lambda)$, $\|G - \hat{g}_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$ függvényre $F(x) = G(x)$ (m.m. $x \in \mathbf{R}^n$). Ti.

$$\|F - G\|_2 \le \|F - \hat{f}_k\|_2 + \|\hat{g}_k - \hat{f}_k\|_2 + \|G - \hat{g}_k\|_2 =$$

$$\|F - \hat{f}_k\|_2 + \sqrt{2\pi}\cdot\|g_k - f_k\|_2 + \|G - \hat{g}_k\|_2 \le$$

$$\|F-\hat{f}_k\|_2+\sqrt{2\pi}\cdot(\|f_k-f\|_2+\|f-g_k\|_2)+\|G-\hat{g}_k\|_2\to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Innen $\|F-G\|_2=0$, ezért $F(x)=G(x)$ (m.m. $x\in\mathbf{R}^n$) valóban következik.

Legyen most már az $x\in\mathbf{R}$ tetszőleges, ekkor

$$|\hat{f}(x)-\hat{f}_k(x)|=\left|\int(f(t)-f_k(t))\,e^{\imath xt}dt\right|\le\|f-f_k\|_1\to 0 \qquad (k\to\infty),$$

tehát $\hat{f}_k(x)\to\hat{f}(x)$ $(k\to\infty)$, mégpedig az x-ben egyenletesen. Ha $r>0$, akkor a Minkowski-egyenlőtlenség (ld. 3.5.3. Tétel)

$$\sqrt{\int_{-r}^{r}|F(x)-\hat{f}(x)|^2dx}\le\sqrt{\int_{-r}^{r}|F(x)-\hat{f}_k(x)|^2dx}+\sqrt{\int_{-r}^{r}|\hat{f}(x)-\hat{f}_k(x)|^2dx}\le$$

$$\|F-\hat{f}_k\|_2+\sqrt{2r}\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}}|\hat{f}(x)-\hat{f}_k(x)|\to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\int_{-r}^{r}|F(x)-\hat{f}(x)|^2dx=0,$$

ezért $F(x)=\hat{f}(x)$ (m.m. $x\in(-r,r)$). Mivel itt az $r>0$ tetszőleges volt, így $F(x)=\hat{f}(x)$ (m.m. $x\in\mathbf{R}$) már következik. Valóban igaz tehát, hogy $\hat{f}\in L^2(\lambda)$, továbbá (ld. $(*)$)

$$\|\hat{f}\|_2=\|F\|_2=\lim_{k\to\infty}\|\hat{f}_k\|_2=\sqrt{2\pi}\cdot\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_2=\sqrt{2\pi}\cdot\|f\|_2.$$

■

Az 5.4.3.4. Lemma bizonyításában látottakat (részben) megismételve azt mondhatjuk, hogy bármelyik $f\in L^2(\lambda)$ függvényhez létezik olyan, kétszer folytonosan differenciálható, kompakt tartójú f_k $(k\in\mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat, amelyre

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_2=0.$$

Az említett lemma bizonyításából továbbá az is kiderült, hogy az előbbi f-hez egyértelműen van olyan $F_f\in L^2(\lambda)$ függvény, amellyel

$$\|\hat{f}_k-F_f\|_2\to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Sőt, ha itt $f\in L^1(\lambda)$ is igaz, akkor az $F_f(x)=\hat{f}(x)$ (m.m. $x\in\mathbf{R}$) egyenlőség is fennáll. Ezért indokoltnak látszik tetszőleges $f\in L^2(\lambda)$ függvény Fourier-transzformáltját az alábbiak szerint definiálni:

$$\hat{f}:=F_f.$$

Az $L^2(\lambda)$ tér elemeire így értelmezett Fourier-transzformáció alaptulajdonságait fejezi ki az

5.4.3.5. Tétel. *Tetszőleges* $f, g \in L^2(\lambda)$ *esetén*

a) $\lfloor \hat{f}, \hat{g} \rfloor := \int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}}\, d\lambda = (2\pi)^n \cdot \lfloor f, g \rfloor$ (Parseval-egyenlőség);

b) $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2$ (Plancherel-formula);

c) $\int \hat{f} g\, d\lambda = \int f \hat{g}\, d\lambda$ (szorzási szabály).

Bizonyítás. Ha ui. (ld. 5.4.3.1-3. Lemmák) $f_k, g_k \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ olyan sorozatok, amelyekre $\hat{f}_k, \hat{g}_k \in L^1(\lambda)$, $\|f - f_k\|_2 \to 0$, $\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$, valamint $\|g - g_k\|_2 \to 0$, $\|\hat{g} - \hat{g}_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből (ld. 3.6. iv) megjegyzés)

$$\left|\lfloor \hat{f}, \hat{g} \rfloor - \lfloor \hat{f}_k, \hat{g}_k \rfloor\right| \le \left|\lfloor \hat{f} - \hat{f}_k, \hat{g} \rfloor\right| + \left|\lfloor \hat{f}_k, \hat{g} - \hat{g}_k \rfloor\right| \le$$

$$\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \cdot \|\hat{g}\|_2 + \|\hat{f}_k\|_2 \cdot \|\hat{g} - \hat{g}_k\|_2 \le$$

$$\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \cdot \|\hat{g}\|_2 + \sup_{j \in \mathbf{N}} \|\hat{f}_j\|_2 \cdot \|\hat{g} - \hat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ezért

$$\lfloor \hat{f}, \hat{g} \rfloor = \lim_{k \to \infty} \lfloor \hat{f}_k, \hat{g}_k \rfloor.$$

(Megjegyezzük, hogy az $(\hat{f}_k)$ sorozat $\|.\|_2$ normában való konvergenciája miatt $\sup_{j \in \mathbf{N}} \|\hat{f}_j\|_2 < +\infty$.) Viszont már láttuk (ld. 5.4.3.2. Lemma), hogy

$$\lfloor \hat{f}_k, \hat{g}_k \rfloor = (2\pi)^n \cdot \lfloor f_k, g_k \rfloor \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ahol (az előbbiek analógiájára) $\lfloor f_k, g_k \rfloor \to \lfloor f, g \rfloor$ $(k \to \infty.)$ Így $\lfloor \hat{f}, \hat{g} \rfloor = (2\pi)^n \cdot \lfloor f, g \rfloor$, ami az a) állítás.

A b)-beli Plancherel-formula nyilván speciális esete az a) Parseval-egyenlőségnek (ti. a $g := f$ választással).

A c) szorzási szabály igazolása az a) egyenlőséghez hasonló módon történhet. Legyen ehhez az f_k, g_k $(k \in \mathbf{N})$ az a) bizonyításában szereplő két sorozat, akkor

$$\left|\int \hat{f} g\, d\lambda - \int \hat{f}_k g_k\, d\lambda\right| \le \left|\int (\hat{f} - \hat{f}_k) g\, d\lambda\right| + \left|\int (\hat{f}_k (g - \hat{g}_k)\, d\lambda\right| \le$$

$$\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|\hat{f}_k\|_2 \cdot \|g - \hat{g}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Következésképpen

$$\int \hat{f} g\, d\lambda = \lim_{k \to \infty} \int \hat{f}_k g_k\, d\lambda,$$

ahol (ld. 5.4.2.4. Lemma) minden $k \in \mathbf{N}$ esetén (lévén $f_k, g_k \in L^1(\lambda)$)

$$\int \hat{f}_k g_k \, d\lambda = \int \hat{g}_k f_k \, d\lambda \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Mivel (az előbbiekkel analóg módon)

$$\int f \hat{g} \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int \hat{g}_k f_k \, d\lambda,$$

ezért a c) már következik az eddigiekből. ■

Gondoljuk meg, hogy ha $f \in L^2(\lambda)$ és $f_k \in L^2(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre $\|f - f_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$, akkor $\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$. Ti. az előbbi Plancherel-formula szerint

$$\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f - f_k\|_2 \qquad (k \to \infty).$$

Legyen $f \in L^2(\lambda)$, és tekintsük az 5.4.3.5. Tétel bizonyításában szereplő, az $\hat{f}$ Fourier-transzformáltat a fentiek szerint meghatározó $f_k \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozatot, amire tehát $\hat{f}_k \in L^1(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ és

$$\|f - f_k\|_2, \, \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ha most az $\hat{f} \in L^2(\lambda)$ függvényből „indulunk ki", akkor ezek szerint (ld. 5.4.3.4. Lemma) az $\hat{f}_k \in L^2(\lambda)$ $(k \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} \|F_{\hat{f}} - F_{\hat{f}_k}\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Az 5.4.2.7. Tétel alapján viszont azt mondhatjuk, hogy

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \hat{f}_k e_{-x} \, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot F_{\hat{f}_k}(-x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n),$$

más szóval

$$F_{\hat{f}_k}(x) = (2\pi)^n \cdot f_k(-x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}^n, \, k \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát egy $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény esetén

$$g^*(x) := g(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor (m.m. értelemben) $F_{\hat{f}_k} = (2\pi)^n \cdot f_k^*$ $(k \in \mathbf{N})$. Mivel $\|f - f_k\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$, ezért világos (ld. 3.6. xxx) megjegyzés), hogy

$$\|f^* - f_k^*\|_2 = \|f - f_k\|_2 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

is igaz. Következésképpen

$$\|(2\pi)^n\cdot f^* - (2\pi)^n\cdot f_k^*\|_2 = \|(2\pi)^n\cdot f^* - F_{\hat{f}_k}\|_2 \to 0 \ \ (k\to\infty),$$

és így $F_{\hat{f}} = (2\pi)^n\cdot f^*$, azaz

$$F_{\hat{f}}(x) = \widehat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n\cdot f(-x) \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}^n).$$

Ugyanez másképp írva

$$(**) \qquad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot F_{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \widehat{\hat{f}}(-x) \qquad (\text{m.m. } x\in\mathbf{R}^n).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az

$$L^2(\lambda)\ni f\mapsto \hat{f}\in L^2(\lambda)$$

leképezés szürjekció. A Plancherel-formulából (ld. 5.4.3.5. Tétel) adódó

$$\|\hat{f}-\hat{g}\|_2 = \|F_{f-g}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\cdot\|f-g\|_2 \qquad (f,g\in L^2(\lambda))$$

egyenlőségre tekintettel egyúttal injektív is, röviden: a szóban forgó operátor (Fourier-transzformáció) bijekció, aminek az inverzét a $(**)$ formula adja meg.

Ha

$$\mathcal{F}(f) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\hat{f} \qquad (f\in L^2(\lambda)),$$

akkor az így definiált $\mathcal{F}: L^2(\lambda)\to L^2(\lambda)$ leképezés is nyilván bijekció. A Parseval-egyenlőség és a Plancherel-formula (ld. 5.4.3.5. Tétel) alapján azt mondhatjuk, hogy az előbbi $\mathcal{F}$ korlátos lineáris operátorra

$$\lfloor\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rfloor = \lfloor f,g\rfloor \qquad (f\in L^2(\lambda)).$$

A funkcionálanalízis nyelvén megfogalmazva az $\mathcal{F}$ operátor unitér az $(L^2(\lambda),\lfloor,\rfloor)$ Hilbert-téren.

Az $1<p<2$ eset

Legyen tehát $p\in(1,2)$, és próbáljuk meg egy $f\in L^p(\lambda)$ függvény Fourier-transzformáltját értelmezni. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk a 3.6. xiii) megjegyzésre, miszerint tetszőleges $1\le p\le r\le q<+\infty$ „kitevők" esetén

$$L^r(\lambda)\subset L^p(\lambda)+L^q(\lambda) \ \ (:=\{f+g: f\in L^p(\lambda),\, g\in L^q(\lambda)\}).$$

Ha ebben a relációban $q := 2$, $p := 1$, akkor bármelyik $r \in [1, 2]$ mellett

$$L^r(\lambda) \subset L^1(\lambda) + L^2(\lambda).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $f \in L^r(\lambda)$ függvény előállítható $f = g + h$ alakban alkalmas $g \in L^1(\lambda)$, $h \in L^2(\lambda)$ függvényekkel. Legyen ekkor

$$F_f := \hat{f} := \hat{g} + \hat{h}.$$

Ez az értelmezés korrekt, mert $f = G + H$ $(G \in L^1(\lambda),\ H \in L^2(\lambda))$ esetén

$$g - G = h - H \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda),$$

amiből

$$F_{g-G} = \hat{g} - \hat{G} = F_{h-H} = \hat{h} - \hat{H} \implies \hat{g} + \hat{h} = \hat{G} + \hat{H}.$$

Ezzel az $1 < r < 2$ esetben is értelmeztük az $L^r(\lambda)$-beli függvények Fourier-transzformáltját.

Jegyezzük még meg, hogy az 5.4.2.4. Lemma b) állításának a megfelelője igaz marad az $L^p(\lambda)$ $(1 \le p \le 2)$ függvényosztály elemeire is az alábbi értelemben: ha $f \in L^1(\lambda)$, $h \in L^p(\lambda)$, akkor $f * h \in L^p(\lambda)$ és $F_{f*h} = \hat{f} \cdot \hat{h}$.

A 2-nél nagyobb „kitevő" esete ennél lényegesen bonyolultabb, a „szokásos" függvényfogalom keretén belül nem is valósítható meg a Fourier-transzformáció fogalmának a kiterjesztése (ld. 5.5. xxvi) megjegyzés).

5.4.4. A Fourier-transzformált deriváltja

A továbbiakban (rögzített $0 < n \in \mathbf{N}$) mellett) az $\mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$-beli mértékek Fourier-transzformáltját fogjuk vizsgálni differenciálhatósági szempontból. Ezzel kapcsolatban állapodjunk meg bizonyos (a többváltozós differenciálszámításban már megszokott) jelölésekben. Nevezetesen, egy $j = (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$ „multiindex" és egy $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ vektor mellett legyen

$$|j| := \sum_{k=1}^{n} j_k,\ x^j := \prod_{k=1}^{n} x_k^{j_k},\ \partial^j := \partial_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n},$$

ahol $\partial_k f$ $(k = 1, ..., n)$ az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ (differenciálható) függvény k-adik változója szerinti parciális deriváltját jelenti. Legyen továbbá egy $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ mértékre

$$M_j(\nu) := \int x^j \, d\nu(x) \qquad (j \in \mathbf{N}^n)$$

a ν mérték j-edik *momentuma*, feltéve, hogy az $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto x^j$ (hatvány)függvény $L^1(\nu)$-beli. Ez a helyzet pl. akkor, ha $j = (0, ..., 0) \in \mathbf{N}^n$, amikor is $M_j(\nu) = \|\nu\|$. Jelentse végül $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbf{N}^n$ esetén $j \le s$ azt, hogy minden $k = 1, ..., n$ indexre $j_k \le s_k$.

A fenti jelölésekkel most már egyszerűen megfogalmazhatjuk a bevezetőben említett differenciálhatóságra vonatkozó állítást.

5.4.4.1. Tétel. *Legyen* $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$, $j \in \mathbf{N}^n$, *és tegyük fel, hogy minden* $s \in \mathbf{N}^n$, *az* $s \leq j$ *feltételnek eleget tevő multiindex mellett létezik a* ν *mérték* s*-edik* $M_s(\nu)$ *momentuma. Ekkor*

a) *tetszőleges* $s \in \mathbf{N}^n$, $s \leq j$ *esetén létezik a* $\partial^s \hat{\nu}$ *parciális derivált*;

b) *bármelyik* a)*-beli* s *multiindexre*

$$\partial^s \hat{\nu}(x) = \imath^{|s|} \cdot \int e_x(y) \cdot y^s \, d\nu(y) \qquad (x \in \mathbf{R}^n);$$

c) *az eddigi jelölések mellett a* $\partial^s \hat{\nu}$ *függvény egyenletesen folytonos és korlátos.*

Bizonyítás. A teljes indukció módszerére való hivatkozással nyilván elegendő a tételt $|s| = 1$ esetén belátni. Sőt, nyugodtan feltehetjük azt is, hogy $n = 1$. Ekkor tehát az a)-hoz azt kell megmutatni, hogy a $\hat{\nu}$ függvény differenciálható. A $\hat{\nu}$ definíciójára gondolva világos, hogy ez egyfajta „paraméteres integrál" differenciálhatóságát kívánja meg, amit egy külön lemmaként fogalmazunk meg.

5.4.4.2. Lemma. *Legyen* $U \subset \mathbf{C}$ *nyílt halmaz,* $f : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *pedig olyan függvény, amelyre az alábbiak teljesülnek*:

1° *bármelyik* $t \in U$ *mellett az* $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto f(t,x)$ *függvény* $L^1(\nu)$*-beli*;

2° *van olyan* $t_* \in U$ *pont, hogy tetszőleges* $x \in \mathbf{R}^n$ *esetén a* $U \ni t \mapsto f(t,x)$ *függvény differenciálható a* t_**-ban*;

3° *egy alkalmas* $0 \leq h \in L^1(\nu)$ *függvénnyel*

$$\left| \frac{f(t,x) - f(t_*,x)}{t - t_*} \right| \leq h(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ t_* \neq t \in U).$$

Ekkor a következőket mondhatjuk: *ha*

$$\varphi(t) := \int f(t,x) \, d\nu(x) \qquad (t \in U),$$

és a 2°*-beli deriváltat* $f'(t_*,x)$*-szel jelöljük, akkor a* φ *differenciálható a* t_**-ban, az*

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto f'(t_*,x)$$

függvény $L^1(\nu)$*-ben van, és igaz a*

$$\varphi'(t_*) = \int f'(t_*,x) \, d\nu(x)$$

egyenlőség.

(Más szóval: a tett feltételek mellett szabad az „integráljel mögött" deriválni.)

A lemma bizonyítása igen egyszerűen elvégezhető. Ha ui. egy $t_* \neq t_k \in U \quad (k \in \mathbf{N})$ számsorozatra $\lim_{k\to\infty} t_k = t_*$ és

$$g_k(x) := \frac{f(t_k, x) - f(t_*, x)}{t_k - t_*} \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ k \in \mathbf{N}),$$

akkor a 3° feltétel miatt valamennyi így definiált g_k függvény eleme az $L^1(\nu)$ függvényosztálynak, továbbá

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f'(t_*, x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel) miatt tehát az $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto f'(t_*, x)$ függvény valóban az $L^1(\nu)$-ben van, és

$$\int f'(t_*, x)\, d\nu(x) = \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\nu = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_*)}{t_k - t_*}.$$

Ebből már a lemma többi állítása is következik.

Az 5.4.4.2. Lemma alapján az 5.4.4.1. Tétel a) és b) része nyilvánvaló, a c) állítás pedig az 5.4.1.2. Lemmából egyszerűen adódik. ■

A most belátott tétel b) állítása alapján (az ottani paraméterekkel) speciálisan a

$$\partial^s \widehat{\nu}(0) = i^{|s|} \cdot M_s(\nu)$$

egyenlőség áll fenn.

Az $n = 1$ esetben egy $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R})$ mérték k-adik $M_k(\nu)$ momentumának a létezéséből (valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett) már minden $s = 0, ..., k$ indexre következik az $M_s(\nu)$ létezése is, hiszen $|x|^s \leq 1 + |x|^k \ (x \in \mathbf{R})$.

Legyen $0 \leq f \in L^1(\lambda)$, $\nu := \mu_f$. Ekkor az $M_s(\nu) \ (s \in \mathbf{N}^n)$ momentum létezése azt jelenti, hogy az

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto x^s \cdot f(x)$$

függvény $L^1(\lambda)$-beli. Innen tetszőleges $f \in L^1(\lambda)$ esetén a következőt kapjuk: tegyük fel, hogy valamilyen $j \in \mathbf{N}^n$ mellett minden $s \in \mathbf{N}^n$, $s \leq j$ multiindexre az

$$f_s(x) := x^s \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvény $L^1(\lambda)$-beli. Ekkor az ilyen s-ekre

$$\partial^s \hat{f} = i^{|s|} \cdot \hat{f}_s.$$

Ebből tetszőleges $f \in L^1(\lambda)$ esetén az $f = f^+ - f^-$ felbontásra gondolva a kapjuk ugyanezt.

Könnyű kiszámolni deriváltfüggvények Fourier-transzformáltját. Legyen ehhez adott az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható, a végtelenben nullához tartó függvény (pl. kompakt tartójú), ekkor bármelyik $x \in \mathbf{R}$ mellett parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\widehat{f'}(x) = \int f' e_x \, d\lambda = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f'(t) e^{\imath x t} \, dt =$$

$$\lim_{a \to +\infty} \Big(f(a) e^{\imath x a} - f(-a) \cdot e^{-\imath x a} - \imath x \cdot \int_{-a}^{a} f(t) e^{\imath x t} \, dt \Big) = -\imath x \cdot \hat{f}(x).$$

Innen teljes indukcióval már rögtön adódik a következő állítás: ha (ld. 4.1.) a $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ szimbólum jelöli az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát, és az $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ függvény végtelen sokszor differenciálható, akkor

$$\widehat{\partial^j f}(x) = (-\imath)^{|j|} \cdot x^j \hat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ j \in \mathbf{N}^n).$$

5.4.5. A Schwartz-féle függvényosztály

Az eddigi jelöléseket megtartva vezessük be a következő (L. Schwartz-ról elnevezett) függvényosztályt: adott $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén legyen

$$\mathcal{S} := \{ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} : f \in D^\infty,\ \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^k \cdot \partial^j f(x)| < +\infty \qquad (k, j \in \mathbf{N}^n) \}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n) \cap D^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^\infty(\lambda)$. Azt sem nehéz belátni, hogy $\mathcal{S} \subset L^1(\lambda)$, ui. egyrészt minden $\mathcal{S}$-beli f függvény folytonos lévén (Lebesgue-)mérhető is, másrészt az $\mathcal{S}$ definíciója szerint egy alkalmas $C > 0$ konstanssal

$$|f(x)| \le \frac{C}{(1 + \|x\|_2)^{2n}} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

teljesül. Továbbá könnyen meggondolhatóan az

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto \frac{1}{(1 + \|x\|_2)^{2n}}$$

függvény integrálható. Tehát az $|f|$-nek van $L^1(\lambda)$-beli majoránsa.

Sőt, ha $1 \le p < +\infty$, akkor $\mathcal{S} \subset L^p(\lambda)$ is igaz. Legyen ui. $\varphi \in \mathcal{S}$ és

$$\alpha := \|\varphi\|_\infty,\ \beta := \sup\{ \|x\|_2^{2n} \cdot |\varphi(x)| : x \in \mathbf{R}^n \}.$$

Ekkor

$$\|\varphi\|_p^p = \int_G |\varphi(x)|^p \, dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus G} |\varphi(x)|^p \, dx \le \alpha^p \cdot \lambda(G) + \beta^p \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G} \|x\|_2^{-2np} \, dx < +\infty.$$

(ahol $G := \{ x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \le 1 \}$.)

Világos, hogy az $\mathcal{S}$ egy lineáris altere a D^∞-nek, és

$$f \in \mathcal{S} \iff f \in D^\infty,\ \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\partial^k f_j(x)| < +\infty \qquad (k, j \in \mathbf{N}^n).$$

(Emlékeztetünk az f_j függvény definíciójára (ld. 5.4.4.): $f_j(x) := x^j \cdot f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$.) Innen rögtön következik az is, hogy $f \in \mathcal{S}$ esetén $\partial^j f \in \mathcal{S}$ $(j \in \mathbf{N}^n)$, és bármely n-változós valós P polinomra $Pf \in \mathcal{S}$. Végül említsünk meg még egy meglehetősen nyilvánvaló tényt, miszerint az $\mathcal{S}$ függvényosztály zárt a szokásos függvényszorzásra nézve, azaz tetszőleges $f, g \in \mathcal{S}$ függvényekre $fg \in \mathcal{S}$.

A most mondottak alapján tehát minden $f \in \mathcal{S}$ mellett alkalmazhatók az 5.4.4. pont eredményei. Ezt figyelembe véve a következőt állíthatjuk: bármelyik $f \in \mathcal{S}$, $k, j \in \mathbf{N}^n$ választással tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$x^k \cdot \partial^j \hat{f}(x) = \imath^{|j|} \cdot x^k \cdot \hat{f}_j(x) = \imath^{|j|+|k|} \cdot \widehat{\partial^k f}_j(x).$$

Innen többek között az is adódik, hogy minden $f \in \mathcal{S}$ függvényre $\hat{f} \in D^\infty$, ui. a $\widehat{\partial^k f}_j$ $(k, j \in \mathbf{N}^n)$ függvények valamennyien folytonosak.

Az $\mathcal{S}$ függvényosztályban vezessük be a következő jelölést: $f \in \mathcal{S}$ és $k, j \in \mathbf{N}^n$ esetén legyen

$$\|f\|_{k,j} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^k \cdot \partial^j f(x)|.$$

A fentiek szerint minden itt szereplő paraméterre $\|f\|_{k,j} < +\infty$, továbbá a $\|.\|_{k,j}$ félnorma az $\mathcal{S}$-en. Ezek a

$$\tilde{\rho}_{k,j}(u, v) := \|u - v\|_{k,j} \qquad (u, v \in \mathcal{S})$$

félmetrikákat generálják. Rendezzük az utóbbiakat egy $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \ldots$ sorozatba, és legyen

$$\rho_l := \frac{\tilde{\rho}_l}{1 + \tilde{\rho}_l} \ \ (l \in \mathbf{N}),\ \ \rho := \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} \rho_l.$$

Ekkor a ρ metrika az $\mathcal{S}$-en, és könnyen beláthatóan az $(\mathcal{S}, \rho)$ egy teljes szeparábilis metrikus tér. Világos, hogy $u_l, u \in \mathcal{S}$ $(l \in \mathbf{N})$ esetén $\rho(u_l, u) \to 0$ $(l \to \infty)$ azzal ekvivalens, hogy minden $k, j \in \mathbf{N}^n$ mellett $\|u_l - u\|_{k,j} \to 0$ $(l \to \infty)$. Továbbá a

$$\mathcal{S}^2 \ni (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + c\psi \qquad (c \in \mathbf{C})$$

leképezés folytonos (az $\mathcal{S}^2$-en a ρ-ból a „szokásos" módon származtatott szorzat-metrika értelmében). Ezért az $\mathcal{S}$ topologikus vektortér.

Mivel az előbbi f-re, k-ra és j-re egy alkalmas $C_{k,j} > 0$ konstanssal minden $x \in \mathbf{R}^n$ pontban

$$|x^k \cdot \partial^j \hat{f}(x)| = \left| \int e_x \cdot \partial^k f_j \, d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \int |\partial^k f_j|\, d\lambda \leq C_{k,j}\cdot \int \frac{1}{(1+\|z\|_2)^{2n}}\, dz < +\infty,$$

ezért $\|\hat{f}\|_{k,j} < +\infty$. Ez azt jelenti, hogy $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

A következő állítást bizonyítottuk tehát be: ha

$$\widehat{\mathcal{S}} := \{\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) : f \in \mathcal{S}\},$$

akkor $\widehat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$. Megmutatjuk, hogy a most mondott tartalmazás helyett egyenlőség is írható. Ennek az igazolásához szükségünk lesz egy meglehetősen egyszerű állításra, amit ennek ellenére külön lemmaként fogalmazunk meg.

5.4.5.1. Lemma. *Legyen $f \in \mathcal{S}$, $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ pedig egy kompakt halmaz. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ esetén*

$$\lim_{r\to 0} f(rx) = f(0),$$

és ez a konvergencia az X halmazon egyenletes.

Emlékeztetünk az 5.4.2.6. Lemmára, miszerint a

$$h(x) := e^{-\|x\|_2^2/2} \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}^n)$$

függvényre $\hat{h} = (2\pi)^{n/2}\cdot h$. Nyilván $h \in \mathcal{S}$. Legyen valamilyen $r > 0$ mellett

$$h_r(x) := h(rx) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor az 5.4.5.1. Lemma szerint tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ esetén $\lim_{r\to 0} h_r(x) = h(0) = 1$, így

$$\lim_{r\to 0} h_r(x)\cdot \hat{f}(x)\cdot e_y(x) = \hat{f}(x)\cdot e_y(x) \qquad (y \in \mathbf{R}^n,\ f \in \mathcal{S}).$$

Ugyanakkor $|h_r(x)\cdot \hat{f}(x)\cdot e_y(x)| \leq |\hat{f}(x)|$ minden $f \in \mathcal{S}$ (és $r > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$) mellett igaz, ezért $\hat{f} \in \mathcal{S} \subset L^1(\lambda)$ miatt alkalmazható a Lebesgue-féle konvergencia-tétel (ld. 3.5.5. Tétel): tetszőleges $y \in \mathbf{R}^n$ esetén a $g_r := h_r\cdot \hat{f}$ jelöléssel

$$\hat{g}_r(y) = \int h_r \hat{f} e_y\, d\lambda \to \int \hat{f} e_y\, d\lambda = \widehat{\hat{f}}(y) \qquad (r \to 0).$$

Továbbá $\hat{g}_r(y) = \int \hat{h}_r(y+t)\cdot f(t)\, dt$ $(y \in \mathbf{R}^n)$ és (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\hat{h}_r(z) = \int h(rt)\cdot e_z(t)\, dt = r^{-n}\cdot \int h(t)\cdot e_z(t/r)\, dt =$$

$$r^{-n}\cdot \int h e_{z/r}\, d\lambda = r^{-n}\cdot \hat{h}(z/r) \qquad (z \in \mathbf{R}^n).$$

Innen tehát azt kapjuk, hogy

$$\widehat{\hat{f}}(y) = \lim_{r\to 0} \hat{g}_r(y) = \lim_{r\to 0} \int \hat{h}_r(y+t)\cdot f(t)\,dt = \lim_{r\to 0} \int \hat{h}_r(z)\cdot f(z-y)\,dz =$$

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\cdot \int \hat{h}(z/r)\cdot f(z-y)\,dz = \lim_{r\to 0} \int \hat{h}(t)\cdot f(rt-y)\,dt,$$

ami az 5.4.2.6. Lemma alapján nem más, mint

$$(2\pi)^{n/2}\cdot \lim_{r\to 0} \int h(t)\cdot f(rt-y)\,dt \qquad (y\in \mathbf{R}^n).$$

Vegyük észre, hogy bármelyik $t, y \in \mathbf{R}^n$ mellett

$$\lim_{r\to 0}(h(t)\cdot f(rt-y)) = h(t)\cdot f(-y),$$

valamint

$$|h(t)\cdot f(rt-y)| \le |h(t)|\cdot \|f\|_\infty$$

miatt megintcsak alkalmazható a Lebesgue-tétel (ld. 3.5.5. Tétel), tehát

$$\widehat{\hat{f}}(y) = (2\pi)^{n/2}\cdot \int h(t)\cdot f(-y)\,dt = (2\pi)^{n/2}\cdot f(-y)\cdot \int h\,d\lambda = (2\pi)^n\cdot f(-y).$$

Összefoglalva az előzőeket a következőt mondhatjuk: ha a $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ függvény esetén $g^*(x) := g(-x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{S}$ függvényre

$$\widehat{\hat{f}} = (2\pi)^n\cdot f^*.$$

Az nyilvánvaló, hogy $f^* \in \mathcal{S}$, így az $F := \widehat{f^*}$ jelöléssel

$$\hat{F} = (2\pi)^n\cdot (f^*)^* = (2\pi)^n\cdot f.$$

A $g := (2\pi)^{-n}\cdot F$ választással egy olyan $\mathcal{S}$-beli függvényt kaptunk, hogy $\hat{g} = f$.

Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

5.4.5.2. Tétel. *A fenti jelöléseket megtartva:* $\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Mivel a Fourier-transzformáció injektív (ld. 5.4.10. Tétel), ezért az

$$\mathcal{S} \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}$$

leképezés bijekció. Az előbbiek szerint könnyen megadható ennek a bijekciónak az inverze is, ui. bármelyik $f \in \mathcal{S}$ függvény esetén az inverziós formula alapján (ld. 5.4.2.7. Tétel)

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\cdot \int \hat{f} e_{-x}\,d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

5.5. Megjegyzések

i) Ha az 5.4.1.2. Lemma e) állítását a

$$Tx := -x \qquad (x \in \mathbf{R}^n, 1 \leq n \in \mathbf{N})$$

(„tükrözés"-) operátorra alkalmazzuk, akkor a triviális $T^* = T$ egyenlőség miatt a könnyen ellenőrizhető

$$\widehat{T[\mu]} = \widehat{\mu} \circ T = \overline{\widehat{\mu}} \qquad (\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n))$$

formulát kapjuk. Ha tehát $\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{R}^n)$ jelöli az $\mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$-beli mértékek Fourier-transzformáltjainak a halmazát, akkor az $\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{R}^n)$ zárt a komplex konjugálásra nézve.

ii) Egyszerűen ellenőrizhető a Fourier-transzformáció „viselkedése" az eltolással szemben. Legyen ui. $a \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$, és tekintsük a

$$\tau_a(x) := a + x \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

transzformációt (eltolást). Ekkor egy $x \in \mathbf{R}^n$ pontban (a képmérték szerinti integrálás alapján (ld. 3.4. xv) megjegyzés)) nyilvánvaló algebrai átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$\widehat{\tau_a[\mu]}(x) = \int e_x \, d(\tau_a[\mu]) = \int e_x \circ \tau_a \, d\mu = \int e_x(y+a) \, d\mu(y) =$$

$$e_x(a) \cdot \int e_x \, d\mu = e_a(x) \cdot \widehat{\mu}(x).$$

Ez azt jelenti, hogy $\widehat{\tau_a[\mu]} = e_a \cdot \widehat{\mu}$.

Emlékeztetünk arra (ld. 5.4.), hogy e_a nem más, mint az a-ban koncentrált μ_a Dirac-mérték Fourier-transzformáltja, ezért

$$\widehat{\tau_a[\mu]} = \widehat{\mu_a} \cdot \widehat{\mu}$$

is írható.

iii) Mutassuk meg, hogy a $\widehat{\ }: \mathbf{M}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{C}^{\mathbf{R}^n}$ Fourier-transzformáció bizonyos további multiplikativitási tulajdonsággal is rendelkezik. Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett az s is egy pozitív természetes szám, és legyenek adottak a $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$, $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^s)$ korlátos Borel-mértékek. Ekkor

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x,y) = \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\nu}(y) \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s).$$

(Az előbbi egyenlőség bal oldalán az $\mathbf{R}^n$, valamint az $\mathbf{R}^s$ feletti Borel-mértékekből képzett szorzatmérték (ld. 2.9.) Fourier-transzformáltja áll. Ez utóbbi tehát az

$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$ téren van értelmezve. Röviden azt mondjuk, hogy a szorzatmérték Fourier-transzformáltja a (tényező-) mértékek Fourier-transzformáltjainak a szorzata.)

Valóban, a szorzatmérték értelmezése és a Fubini-tétel (ld. 3.15.5. Tétel) alapján

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x,y) = \int e_{(x,y)}\, d(\mu \otimes \nu) = \int e^{\imath\langle (x,y),(u,t)\rangle}\, d(\mu \otimes \nu)(u,t) =$$

$$\int e^{\imath(\langle x,u\rangle + \langle y,t\rangle)}\, d(\mu \otimes \nu)(u,t) = \int \left(\int e^{\imath\langle x,u\rangle} \cdot e^{\imath\langle y,t\rangle}\, d\mu(u) \right) d\nu(t)$$

$$\int e_y \cdot \left(\int e_x\, d\mu \right) d\nu = \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\nu}(y).$$

iv) Az 5.4.2.4. Lemma és az 5.4.2.5. Tétel szerint tehát minden $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ Lebesgue-integrálható függvény esetén $\hat{f} \in \mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$. (Ez utóbbi tér definícióját (ld. 4.1.) is értelemszerűen kiterjesztve komplex értékű függvényekre.)

v) Az 5.4.2.5. Tétel megfelelője nem igaz az $\mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$-beli $(1 \le n \in \mathbf{N})$ mértékekre. Ha ui. $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ az $(\mathbf{R}^n) \ni 0$-ban koncentrált Dirac-mérték (ld. 3.12. vii) megjegyzés), akkor (ld. 5.3.) $\widehat{\nu} = e_0 \equiv 1$, ami nyilván nincs benne a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$ függvényosztályban.

vi) Igen tanulságos az 5.4.2.5. Tétel alábbi bizonyítása is. Ismét csak $n = 1$ mellett részletezve a gondolatmenetet legyen $0 \ne x \in \mathbf{R}$. Ekkor a λ Lebesgue-integrál eltolásinvarianciáját kihasználva (ld. 3.6. xxx) megjegyzés) tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$\hat{f}(x) = \int e_x \cdot f\, d\lambda = -\int e_x(t - \pi/x) \cdot f(t)\, d\lambda(t) = -\int e_x(t) \cdot f(t + \pi/x)\, d\lambda(t),$$

amiből

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} \cdot \int e_x(t) \cdot \Big(f(t) - f(t + \pi/x) \Big)\, d\lambda(t)$$

adódik. Következésképpen

$$|\hat{f}(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \int |f(t + \pi/x) - f(t)|\, d\mu(t) =: \frac{1}{2} \cdot F_f(x).$$

Elegendő tehát azt megmutatni, hogy $\lim_{|x| \to +\infty} F_f(x) = 0$.

Ha $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R})$, akkor valamilyen korlátos $I \subset \mathbf{R}$ intervallummal $\operatorname{supp} f \subset I$. Az f egyenletes folytonossága miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|f(t) - f(t + \pi/x)| < \varepsilon \qquad (t, x \in \mathbf{R},\ |x| > \delta).$$

Ilyen x-ekre tehát $|F_f(x)| \le \varepsilon \cdot \mu(I)$. Ezzel a $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ függvényosztály elemeire beláttuk az állításunkat. Mivel a $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ halmaz mindenütt sűrű az $L^1(\lambda)$ térben (az $\|.\|_1$ normára nézve (ld. a 3.6. xix) megjegyzés)), ezért minden $f \in L^1(\lambda)$ függvényhez és

$\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in \mathcal{K}(\mathbf{R})$, amire $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Innen már a „szokásos" technikával kapjuk az állításunkat az f-re is a

$$|F_f(x)| \leq \int |f(t + \pi/x) - g(t + \pi/x)|\, d\lambda(t) + |F_g(x)| + \|f - g\|_1 < 2\cdot \varepsilon + |F_g(x)|$$

becslés alapján.

vii) Az előbbi megjegyzéshez kapcsolódva valamely $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in L^1(\lambda)$ függvény esetén az

$$\omega_f(\delta) := \sup\left\{ \int |f(t) - f(t + x)|\, dt : x \in \mathbf{R},\ |x| \leq \delta \right\} \qquad (\mathbf{R} \ni \delta > 0)$$

módon értelmezett

$$\omega_f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

leképezést az f függvény *integrál-modulusának* nevezzük. Világos, hogy az ω monoton fogyó függvény, továbbá könnyűszerrel beláthatóan

$$\omega_f(\gamma\cdot \delta) \leq (\gamma + 1)\cdot \omega_f(\delta) \quad (\gamma,\ \delta > 0).$$

A vi) megjegyzésben mondott bizonyításra gondolva rögtön következik az is, hogy egyrészt

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2}\cdot \omega_f(\pi/|x|) \qquad (0 \neq x \in \mathbf{R}),$$

másrészt

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

viii) Legyen $n = 1$ és tegyük fel, hogy az $f \in L^1(\lambda)$ függvény páros, azaz $f(-t) = f(t)$ (m.m. $t \in \mathbf{R}$). Ekkor

$$\hat{f}(x) = \int f(t)e^{\imath tx}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{\imath tx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{\imath tx}dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{-\imath tx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{\imath tx}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\left(e^{\imath tx} + e^{-\imath tx}\right)\, dt =$$

$$2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(tx)\, dt = \int f(t)\cos(tx)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ugyanígy kapjuk az

$$\hat{f}(x) = 2\imath \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(tx)\, dt = \imath \int f(t)\sin(tx)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

formulát páratlan f esetén, azaz, amikor $f(-t) = -f(t)$ (m.m. $t \in \mathbf{R}$).

Innen világos tehát, hogy ha az $f \in L^1(\lambda)$ függvény páros (páratlan), akkor az $\hat{f}$ Fourier-transzformált is páros (páratlan) függvény.

ix) Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{C}_1(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ függvényosztály bővebb az $\hat{f}$ Fourier-transzformáltak $(f \in L^1(\lambda))$ halmazánál. Csak $n = 1$-re részletezve a most mondandókat tegyük fel, hogy az $f \in L^1(\lambda)$ függvény páratlan. Ekkor (ld. viii) megjegyzés) az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált is páratlan függvény és

$$\hat{f}(x) = \imath \cdot \int f(t) \cdot \sin(xt)\, d\lambda(t) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A Fubini-tételt (3.15.5. Tétel) felhasználva innen azt kapjuk, hogy tetszőleges $a > 1$ számra

$$\left| \int \frac{1}{x} \cdot \hat{f}(x) \cdot \chi_{[1,a]}(x)\, d\lambda(x) \right| =$$

$$\left| \int \frac{1}{x} \cdot \chi_{[1,a]}(x) \cdot \left(\int f(t) \cdot \sin(xt)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \right| \le$$

$$\int |f(t)| \cdot \left| \int \frac{1}{x} \cdot \sin(xt) \cdot \chi_{[1,a]}(x)\, d\lambda(x) \right| d\lambda(t) \le A \cdot \|f\|_1,$$

ahol – amint az jól ismert az elemi analízisből –

$$A := \sup \left\{ \left| \int \frac{1}{x} \cdot \sin(xt) \cdot \chi_{[1,a]}(x)\, d\lambda(x) \right| : 1 < a \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R} \right\} < +\infty.$$

Elegendő tehát olyan $g \in \mathcal{C}_1(\mathbf{R})$ függvényt keresnünk, amire

$$A := \sup \left\{ \left| \int_1^a \frac{g(x)}{x}\, dx \right| : 1 < a \in \mathbf{R} \right\} = +\infty$$

igaz. Könnyen adódik, hogy ha pl. a $g \in \mathcal{C}_1(\mathbf{R})$ függvényre

$$g(x) = \frac{1}{\ln x} \qquad (2 \le x \in \mathbf{R}),$$

akkor teljesül a g-re megkívánt előbbi feltétel.

x) Az 5.4.2.5. Tétel (Riemann-Lebesgue-lemma) bizonyításából ($n = 1$ esetén) a következő átfogalmazást nyerjük: legyen $-\infty \le a < b \le +\infty$, az $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ pedig (az (a, b) intervallumon) Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor

$$\lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) \cdot \cos(tx)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) \cdot \sin(tx)\, dt = 0,$$

mégpedig az $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ intervallumokra nézve egyenletesen. Más szóval: minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x_0 > 0$, hogy $x \in \mathbf{R}$, $|x| > x_0$ mellett

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t) \cdot \cos(tx)\, dt \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_\alpha^\beta f(t) \cdot \sin(tx)\, dt \right| < \varepsilon$$

igaz tetszőleges $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ intervallumra. Legyen ehhez

$$f_{\alpha,\beta}(x):=\begin{cases} f(x) & (\alpha<x<\beta)\\ 0 & (x\in\mathbf{R}\setminus(\alpha,\beta))\end{cases}\qquad (x\in\mathbf{R}),$$

ekkor a (nyilván $L^1(\lambda)$-beli) függvényre

$$\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)=\int_\alpha^\beta f(t)e^{\imath xt}dt=\int_\alpha^\beta f(t)\cdot\cos(tx)\,dt+\imath\int_\alpha^\beta f(t)\cdot\sin(tx)\,dt\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Elég tehát azt belátni, hogy bármelyik $\varepsilon>0$ esetén egy alkalmas $x_0>0$ „küszöbbel"

$$\left|\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)\right|<\varepsilon\qquad (x\in\mathbf{R},\ |x|>x_0,\ (\alpha,\beta)\subset(a,b)).$$

Világos, hogy $f_{\alpha,\beta}=f_{a,b}\cdot\chi_{(\alpha,\beta)}$. Legyen a χ lépcsősfüggvény olyan, hogy a fenti $\varepsilon>0$ számmal

$$\|f_{a,b}-\chi\|_1<\varepsilon.$$

Ekkor egyrészt a $\psi:=\chi\cdot\chi_{(\alpha,\beta)}$ lépcsősfüggvénnyel tetszőleges $x\in\mathbf{R}$ helyen

$$|\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)-\widehat{\psi}(x)|\le\|f_{\alpha,\beta}-\psi\|_1=\|(f_{a,b}-\chi)\cdot\chi_{(\alpha,\beta)}\|_1\le\|f_{a,b}-\chi\|_1<\varepsilon.$$

Másrészt, ha alkalmas $I_j\subset\mathbf{R}$ (korlátos) intervallumokkal és $c_j\in\mathbf{R}$ $(j\in\mathcal{N})$ együtthatókkal (valamilyen véges $\mathcal{N}\subset\mathbf{N}$ indexhalmaz mellett)

$$\chi=\sum_{j\in\mathcal{N}}c_j\cdot\chi_{I_j},$$

akkor

$$\psi=\sum_{j\in\mathcal{N}}c_j\cdot\chi_{I_j\cap(\alpha,\beta)},$$

és az 5.4.2.5. Tétel bizonyításában látottak szerint az $U_j:=I_j\cap(\alpha,\beta)$ $(j\in\mathcal{N})$ jelöléssel

$$|\widehat{\psi}(x)|\le\sum_{j\in\mathcal{N}}|c_j|\cdot\widehat{\chi_{U_j}}(x)|\le\frac{2}{|x|}\cdot\sum_{j\in\mathcal{N}}|c_j|=:\frac{q}{|x|}\qquad (0\ne x\in\mathbf{R}).$$

Vegyük észre, hogy az itt szereplő q szám csak az f függvénytől és az ε számtól függ. Így az 5.4.2.5. Tétel bizonyítását részben „megismételve"

$$|\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)|\le|\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)-\widehat{\psi}(x)|+|\widehat{\psi}(x)|<\varepsilon+\frac{q}{|x|}\qquad (0\ne x\in\mathbf{R}).$$

Tehát valamilyen (csak az f-től és az ε-től függő) $x_0>0$ választással

$$|\widehat{f_{\alpha,\beta}}(x)|<2\varepsilon\qquad (x\in\mathbf{R},\ |x|>x_0).$$

xi) Legyen $\xi \in \mathbf{R}^n$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ és jelöljük most τ_ξ-vel, továbbá $\mathcal{M}_\xi$-vel a ξ által meghatározott *transzlációs,* valamint *modulációs* operátorokat:

$$\tau_\xi f(t) := f(t+\xi), \quad \mathcal{M}_\xi f(t) := e^{\imath\cdot\langle\xi,t\rangle}\cdot f(t) \qquad (f \in L^1(\lambda),\, t \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy $\tau_\xi f,\, \mathcal{M}_\xi f \in L^1(\lambda)$. Nem nehéz belátni, hogy a most értelmezett operátorok és a Fourier-transzformáció kapcsolata a következő (ld. ii) megjegyzés):

$$\widehat{\tau_\xi f} = \mathcal{M}_{-\xi}\hat{f}, \quad \widehat{\mathcal{M}_\eta f} = \tau_\eta \hat{f} \qquad (\xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n,\, f \in L^1(\lambda)).$$

Valóban, a fenti paraméterekkel tetszőleges $x \in \mathbf{R}^n$ helyen (alkalmazva a 3.6. xxx) megjegyzést)

$$\widehat{\tau_\xi f}(x) = \int f(t+\xi)\cdot e^{\imath\cdot\langle x,t\rangle}\,dt = \int f(t)\cdot e^{\imath\cdot\langle x,t-\xi\rangle}\,dt =$$

$$e^{\imath\cdot\langle x,-\xi\rangle}\cdot\int e^{\imath\cdot\langle x,t\rangle}\,dt = e^{\imath\cdot\langle x,-\xi\rangle}\cdot\hat{f}(x) = \mathcal{M}_{-\xi}\hat{f}(x).$$

Hasonlóan,

$$\widehat{\mathcal{M}_\eta f}(x) = \int e^{\imath\cdot\langle\eta,t\rangle}\cdot f(t)\cdot e^{\imath\cdot\langle x,t\rangle}\,dt = \int f(t)\cdot e^{\imath\cdot\langle x+\eta,t\rangle}\,dt = \hat{f}(x+\eta) = \tau_\eta\hat{f}(x).$$

xii) Legyen $1 \le n \in \mathbf{N}$, $f \in L^1(\lambda)$, $0 \ne c \in \mathbf{R}$ és (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\delta_c f(x) := f(cx) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor $\delta_c f \in L^1$. Ha $c > 0$, akkor (ld. (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\widehat{\delta_c f}(x) = \int f(ct)\cdot e^{\imath\langle t,x\rangle}dt = \frac{1}{c^n}\cdot\int f(t)e^{\imath\langle t,x/c\rangle}dt = \frac{1}{c^n}\cdot\hat{f}(x/c) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha itt $c = -1$, akkor

$$\widehat{\delta_{-1} f}(x) = \int f(-t)\cdot e^{\imath\langle t,x\rangle}dt = \int f(t)\cdot e^{\imath\langle t,-x\rangle}dt = \hat{f}(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Speciálisan, ha $n = 1$ és az f páros (páratlan), akkor $\delta_{-1}f = f$ $(\delta_{-1}f = -f)$, tehát

$$\hat{f}(-x) = \widehat{\delta_{-1}f}(x) = \hat{f}(x) \text{ és } (\hat{f}(-x) = \widehat{\delta_{-1}f}(x) = -\hat{f}(x)) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így az $\hat{f}$ Fourier-transzformált páros (páratlan) (ld. viii)).

Végül, ha $c < 0$, akkor $\delta_c f = \delta_{-1}(\delta_{-c}f)$. Ezért

$$\widehat{\delta_c f}(x) = \widehat{\delta_{-c}f}(-x) = \frac{1}{(-c)^n}\cdot\hat{f}(-x/(-c)) = \frac{1}{(-c)^n}\cdot\hat{f}(x/c) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Megjegyezzük, hogy a több helyen fontos szerepet játszó

$$f_c := c^{-n} \cdot \delta_{1/c} f \qquad (c > 0)$$

(nyilván L^1-beli) függvényre

$$\widehat{f}_c(x) = \frac{1}{c^n} \cdot \int f(t/c) \cdot e^{\imath\langle x,t\rangle} dt = \int f(t) \cdot e^{\imath\langle cx,t\rangle} dt = \hat{f}(cx) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

más szóval $\widehat{f}_c = \delta_c \hat{f}$.

xiii) Számos fontos esetben – így pl. (ld. 5.4.) a $\widehat{L}^1$-ra vonatkozó állításban – a felhasználásra kerülő Stone-Weierstrass-tételbeli $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ topologikus tér nem kompakt, csak lokálisan kompakt. Mutassuk meg, hogy az 5.4. pont 2) lábjegyzetében idézett tétel „átmenthető" erre az esetre is. Legyen ui. $(\mathcal{X}', \mathcal{R}')$ az $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ tér 1-pont kompaktifikációja (ld. 4.1.), ω az $\mathcal{X}'$ halmaz végtelen távoli pontja. Ha $f \in \mathcal{C}_1(\mathcal{X})$, akkor (ld. 4.1.3.3. Tétel) az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{X}) \\ 0 & (x = \omega) \end{cases}$$

függvény eleme a $\mathcal{C}(\mathcal{X}')$-nek. Legyen

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{\tilde{f} + \alpha : f \in \widehat{L}^1,\ \alpha \in \mathbf{C}\}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy az $\tilde{\mathcal{A}}$ olyan részalgebrája a $\mathcal{C}(\mathcal{X}')$-nek, amire teljesülnek a fent mondott 2) lábjegyzetbeli Stone-Weierstrass-tétel feltételei. Mivel $(\mathcal{X}', \mathcal{R}')$ kompakt T_2-tér, így $\tilde{\mathcal{A}}$ mindenütt sűrű (a $\|.\|_\infty$ norma értelmében) a $\mathcal{C}(\mathcal{X}')$-ben. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{C}_1(\mathcal{X})$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $g \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, hogy

$$\|\tilde{f} - \tilde{g} - \alpha\|_\infty < \varepsilon.$$

Ekkor persze az

$$|\tilde{f}(\omega) - \tilde{g}(\omega) - \alpha| = |\alpha| < \varepsilon$$

egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia, következésképpen

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - g(x) - \alpha| + |\alpha| = |\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) - \alpha| + |\alpha| <$$

$$\varepsilon + |\alpha| < 2 \cdot \varepsilon \qquad (x \in X).$$

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy az $\mathcal{A}$ a $\|.\|_\infty$ normára nézve mindenütt sűrű a $\mathcal{C}_1(\mathcal{X})$-ben.

xiv) A $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ mérték vagy az $f \in L^1(\lambda)$ függvény Fourier-transzformáltja tehát egyértelműen meghatározza a szóban forgó mértéket vagy függvényt (ld. 5.4.2.9. Tétel). Így számos, a véges Borel-mértékekre vagy (Lebesgue-)integrálható függvényekre vonatkozó probléma gyakran „átvihető" a Fourier-transzformáltjaikra, amikor is az utóbbiak bizonyos esetekben lényegesen könnyebben „kezelhetők", mint a kiindulási mérték vagy függvény. Például a bonyolult konvolúció helyett egyszerű függvényszorzást kell végezni (ld. 5.4.2.4. Lemma).

xv) Egy $\nu \in \mathbf{M}(\mathbf{R}^n)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ mérték Fourier-transzformáltja nem feltétlenül valós értékű függvény . Ugyanez a helyzet egy $f \in L^1(\lambda)$ függvény esetén is, még akkor is, ha maga az f valós értékű. Nem nehéz megmutatni azonban, hogy

1° $\mathcal{R}_{\hat{\nu}} \subset \mathbf{R} \iff T[\nu] = \nu$, ahol $T(x) := -x$ $(x \in \mathbf{R}^n)$. (Geometriai szóhasználattal élve tehát az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a ν mérték tükrözésinvariáns.)

2° $\mathcal{R}_{\hat{f}} \subset \mathbf{R} \iff f(x) = \overline{f(-x)}$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^n$).

Valóban, ha $\varphi := T[\nu]$, akkor

$$\hat{\varphi}(x) = \int e_x \, d\varphi = \int e_x \circ T \, d\nu = \int e_{-x} \, d\nu =$$

$$\overline{\int e_x \, d\nu} = \overline{\hat{\nu}(x)} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha tehát $\mathcal{R}_{\hat{\nu}} \subset \mathbf{R}$, akkor $\hat{\varphi} = \hat{\nu}$, és alkalmazható az 5.4.2.9. Tétel, miszerint $\nu = \varphi = T[\nu]$.

Ezzel az 1° állítást beláttuk. A 2° igazolásához használjuk fel a Borel-Lebesgue-mérték tükrözésinvarianciáját (ld. 2.7.1.):

$$\overline{\hat{f}(x)} = \int \overline{f} e_{-x} \, d\lambda = \int \overline{f(-t)} e_{-x}(-t) \, dt =$$

$$\int \overline{f(-t)} e_x(t) \, dt = \hat{g}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $g := f \circ T$. Innen a 2° állítás már nyilvánvaló.

xvi) Az 5.4.2.7. Tétel bizonyítása mögött az alábbi általános érvényű meggondolás húzódik meg. Tegyük fel, hogy $g \in L^1(\lambda)$, $\int g \, d\lambda = 1$, és legyen

$$T_\gamma f := f * g_\gamma \qquad (f \in L^1(\lambda)),$$

ahol $\gamma > 0$ és

$$g_\gamma(t) := \gamma^n \cdot g(\gamma t) \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\, t \in \mathbf{R}^n).$$

(A g_γ függvény egy ún. *Fejér-típusú mag.*) Ekkor bármely $f \in L^1(\lambda)$ függvényre

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \|T_\gamma f - f\|_1 = 0.$$

Ti. tetszőleges $f \in L^1(\lambda)$, $x \in \mathbf{R}^n$ és $\gamma > 0$ mellett

$$T_\gamma f(x) - f(x) = \gamma^n \cdot \int f(x-t) g(\gamma t)\, dt - f(x) = \gamma^n \cdot \int (f(x-t) - f(x))\, g(\gamma t)\, dt,$$

hiszen (ld. 3.6. xxx) megjegyés) $\gamma^n \cdot \int g(\gamma t)\, dt = \int g(t)\, dt = 1$. Ezért (ld. vii) megjegyzés)

$$\|T_\gamma f - f\|_1 \le \gamma^n \cdot \int \left(\int |f(x-t) - f(x)| \cdot |g(\gamma t)|\, dt \right) dx =$$

$$\gamma^n \cdot \int |g(\gamma t)| \left(\int |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) dt \le$$

$$\gamma^n \cdot \int_{G_r} |g(\gamma t)| \cdot \omega_f(r)\, dt + 2\gamma^n \cdot \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_r} |g(\gamma t)|\, dt \le$$

$$\omega_f(r) \cdot \|g\|_1 + 2\|f\|_1 \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus G_{\gamma r}} |g(t)|\, dt,$$

ahol $G_r := \{t \in \mathbf{R}^n : \|t\|_2 \le r\}$ $(r > 0)$. Mivel

$$\omega_f(r) \to 0 \ \ (r \to 0) \ \text{ és } \ \textstyle\int_{\mathbf{R}^n \setminus G_{\gamma r}} |g(t)|\, dt \to 0 \ \ (\gamma \to +\infty),$$

ezért innen $\lim_{\gamma \to +\infty} \|T_\gamma f - f\|_1 = 0$ már nyilván következik.

xvii) A Plancherel-formula (ld. 5.4.3.5. Tétel) alkalmazásával mutassuk meg, hogy

$$\int \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi.$$

Számítsuk ki ehhez az $f := \chi_{[-1,1]}$ függvény Fourier-transzformáltját: ha $x \ne 0$, akkor

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{1} e^{\imath x t} dt = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{\imath x} = \frac{2 \sin x}{x}.$$

Ezért a Plancherel-formula szerint

$$2\pi \cdot \|f\|_2^2 = 4\pi = \|\hat{f}\|_2^2 = 4 \cdot \int \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

xviii) Egy $L^1(\lambda)$-beli f függvény Fourier-transzformáltját gyakran az

$$\check{f}(x) := \int f e_{-2\pi x}\, d\lambda \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\ f \in L^1(\lambda),\ x \in \mathbf{R}^n)$$

előírással értelmezik. Ekkor

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-2\pi x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

és az inverziós formula (ld. 5.4.2.7. Tétel) a következő alakot ölti:

$$f(x) = \int \check{f} e_{2\pi x}\, d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

xix) Egy másik gyakori változat a Fourier-transzformáció értelmezésére az alábbi:

$$\breve{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \cdot \int f \cdot e_{-x}\, d\lambda \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\ f \in L^1(\lambda),\ x \in \mathbf{R}^n).$$

Nyilván

$$\breve{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \hat{f}(-x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

továbbá az inverziós formula (ld. 5.3.2.7. Tétel) alakja:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int \breve{f} e_x\, d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ha viszont

$$\dot{f} := (2\pi)^{-n/2} \cdot \breve{f} \qquad (f \in L^1(\lambda)),$$

akkor az inverziós formula a következő alakot ölti:

$$f(x) = \int \dot{f} e_x\, d\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Világos, hogy (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\dot{f}(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int f(t) e^{-\imath\langle x,t\rangle}\, dt = \int f(2\pi z) e^{-2\pi\imath\langle x,z\rangle}\, dz = \check{F}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $F(z) := f(2\pi z)$ $(z \in \mathbf{R}^n)$.

xx) Megmutatható, hogy ha az $f \in L^1(\lambda)$ függvényre $\hat{f} \geq 0$ és az f folytonos a 0 pontban, akkor $\hat{f} \in L^1(\lambda)$. Tehát (ld. 5.4.2.7. Tétel) az ilyen függvényekre igaz az inverziós formula.

xxi) Mutassuk meg (ld. 5.4.5.), hogy tetszőleges $f, h \in \mathcal{S}$ választással (ld. 5.1.2. Definíció)

$$\widehat{fh} = (2\pi)^{-n} \cdot \hat{f} * \hat{h}$$

Ehhez először is azt jegyezzük meg, hogy az 5.4.2.4 Lemma alapján minden $\mathcal{S}$-beli F, H mellett $\widehat{F * G} = \hat{F} \cdot \hat{H} \in \mathcal{S}$, így – figyelembe véve (ld. 5.4.5.), hogy a Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}$ halmazon bijekció – $F * H \in \mathcal{S}$. Ezért $\hat{f} * \hat{h} \in \mathcal{S}$, és T-vel

jelölve a Fourier-transzformáció $\mathcal{S}$-re való leszűkítésének az inverzét, a bizonyítandó egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$(2\pi)^n \cdot fh = T(\hat{f} * \hat{h}).$$

Ez viszont nyilvánvaló, hiszen minden $F, H \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$\widehat{F}(-x) = (2\pi)^n \cdot T(F)(x),$$

tehát

$$T(F * H)(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \widehat{F * H}(-x) =$$
$$(2\pi)^{-n} \cdot \widehat{F}(-x) \cdot \widehat{H}(-x) = (2\pi)^n \cdot T(F)(x) \cdot T(H)(x).$$

xxii) Jelöljük az $\mathbf{R}$-en értelmezett, az $\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$ súlyfüggvényhez tartozó ismert Hermite-polinomokat H_n-nel $(n \in \mathbf{N})$, és legyen

$$h_n(x) := \alpha_n \cdot e^{-x^2/2} \cdot H_n(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}),$$

ahol az $\alpha_n > 0$ számok úgy vannak definiálva, hogy $\|h_n\|_2 = 1$ $(n \in \mathbf{N})$ teljesüljön. Nem nehéz megmutatni, hogy a (h_n) függvényrendszer – az ún. *Hermite-függvények* rendszere – egy teljes, ortonormált rendszer az $(L^2(\lambda), \|.\|_2)$ Hilbert-térben (tehát ugyanebben a térben Schauder-bázis [3]. A definícióból az is rögtön adódik, hogy (ld. 5.4.5.) az Hermite-függvények valamennyien beletartoznak az $\mathcal{S}$ Schwartz-féle függvényosztályba, következésképpen kiszámíthatjuk a $\hat{h}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ Fourier-transzformáltakat, továbbá az Hermite-függvényekre igaz az inverziós formula (ld. 5.4.2.7. Tétel). Felhasználva az Hermite-polinomok előállítására vonatkozó

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

Rodrigues-formulát azt kapjuk, hogy

$$h_n(x) = \alpha_n \cdot (-1)^n \cdot e^{x^2/2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}).$$

Innen az adódik, hogy

$$\hat{h}_n = \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot h_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

[3] Az $(X, \|.\|)$ normált térben az $e_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ rendszer Schauder-bázis, ha minden $x \in X$ elem egyértelműen állítható elő $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ alakban alkalmas $c_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal. Ha az itt szereplő $\|.\|$ norma egy $\langle , \rangle$ skaláris szorzás révén származik, azaz $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $(x \in X)$, akkor egy X-beli (z_n) rendszer teljes, ha az $\langle x, z_n \rangle = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ egyenlőségek kizárólag a triviális $x = 0$ esetben teljesülnek. Amennyiben az $(X, \langle , \rangle)$ tér az előbbi értelemben teljes normált tér (Hilbert-tér), a teljes (z_n) rendszer pedig ortonormált is, azaz $\|z_n\| = 1$ és $\langle z_n, z_m \rangle = 0$ $(n, m \in \mathbf{N},\ n \neq m)$, akkor a (z_n) Schauder-bázis. Ebben az esetben a fenti sorfejtés a következő alakú: $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, z_n \rangle \cdot z_n$ (az x elem (absztrakt) Fourier-sora). Speciálisan az $L^2(\lambda)$ az $\langle f, g \rangle := \int fg\, d\lambda$ $(f, g \in L^2(\lambda))$ skaláris szorzással Hilbert-tér.)

Valóban, a

$$g_n(x) := e^{x^2/2}\cdot \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel deriválás után

$$g_n'(x) = x\cdot e^{x^2/2}\cdot \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2} + e^{x^2/2}\cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\, e^{-x^2} =$$

$$(*) \qquad x\cdot g_n(x) + g_{n+1}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Az 5.4.4. pontban mondottak szerint tehát az előbbi paraméterekkel

$$\widehat{g_n'}(x) = -\imath\cdot x\cdot \hat{g}_n(x) = -\imath\cdot (\hat{g}_n)'(x) + \hat{g}_{n+1}(x).$$

Más szóval

$$(\hat{g}_n)'(x) = x\cdot \hat{g}_n(x) - \imath\cdot \hat{g}_{n+1}(x).$$

Írjuk fel ez utóbbi egyenlőséget a g_n-ek helyett a $g_n^*(x) := g_n(-x)$ $(x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$ függvényekre. Mivel tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ mellett (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\widehat{g_n^*}(x) = \int g_n(-t)e^{\imath xt}\, dt = \int g_n(t)e^{-\imath xt}\, dt = \hat{g}_n(-x),$$

ezért $(\widehat{g_n^*})'(x) = -(\hat{g}_n)'(-x)$, tehát

$$(\hat{g}_n)'(x) = -(\widehat{g_n^*})'(-x) = x\cdot \widehat{g_n^*}(-x) - \imath\cdot \widehat{g_{n+1}^*}(-x).$$

Innen

$$(\widehat{g_n^*})'(x) = x\cdot \widehat{g_n^*}(x) + \imath\cdot \widehat{g_{n+1}^*}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

következik. Ha ezt az utóbbi egyenlőséget megszorozzuk $\imath^n/\sqrt{2\pi}$-vel, akkor

$$\left(\frac{\imath^n}{\sqrt{2\pi}}\cdot \widehat{g_n^*}\right)'(x) = x\cdot \frac{\imath^n}{\sqrt{2\pi}}\cdot \widehat{g_n^*}(x) + \frac{\imath^{n+1}}{\sqrt{2\pi}}\cdot \widehat{g_{n+1}^*}(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanolyan rekurziv összefüggés az $\imath^n\cdot \widehat{g_n^*}/\sqrt{2\pi}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekre, mint a fenti, a g_n-ekre vonatkozó $(*)$ rekurzió. Ezért $g_0 = \widehat{g_0^*}/\sqrt{2\pi}$ esetén $g_n = \imath^n\cdot \widehat{g_n^*}/\sqrt{2\pi}$ $(n \in \mathbf{N})$. Az 5.4.2.6. Lemma szerint viszont

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \widehat{g_0^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \widehat{g_0}(-x) = g_0(-x) = g_0(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy[4]

$$\hat{g}_n(x) = \widehat{g_n^*}(-x) = (-\imath)^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot g_n(-x) = \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot g_n(x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Figyelembe véve azt, hogy $h_n = \alpha_n \cdot (-1)^n \cdot g_n$ $(n \in \mathbf{N})$, így egyúttal

$$\hat{h}_n = \alpha_n \cdot (-1)^n \cdot \hat{g}_n = \alpha_n \cdot (-1)^n \cdot \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot g_n = \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot h_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Másképp fogalmazva a h_n Hermite-függvény sajátfüggvénye a Fourier-transzformációnak az $\imath^n \cdot \sqrt{2\pi}$ sajátértékkel $(n \in \mathbf{N})$.

Tekintsünk ezek után egy tetszőleges $f \in L^2(\lambda)$ függvényt, és fejtsük Fourier-sorba az f-et a (h_n) rendszer szerint. Ekkor tehát a

$$c_n(f) := \int f h_n \, d\lambda \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(Hermite-Fourier-)együtthatókkal

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \cdot h_n,$$

ahol a szóban forgó sor $\|.\|_2$ normában konvergens. Mivel a $(c_n(f))$ együttható-sorozattal együtt az $(\imath^n \cdot c_n(f))$ sorozat is ℓ_2-be tartozik, [5] ezért a Riesz–Fischer-tétel [6] miatt a $\sum(\imath^n \cdot c_n(f) h_n)$ sor is konvergens $\|.\|_2$ normában. Legyen ebben az értelemben

$$T(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \cdot \hat{h}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \imath^n \cdot c_n(f) \cdot h_n.$$

---

[4] Legyen $h(x) := e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbf{R})$, ekkor $g_n(x) = e^{x^2/2} \cdot h_n^{(n)}(x)$ $(x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$. Ha $H(x) := h(-x)$ $(x \in \mathbf{R})$, akkor – lévén a h páros függvény – $H = h$. Így $H^{(n)} = h^{(n)}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ugyanakkor az összetett függvény deriválása szerint $H'(x) = -h'(-x)$, amiből teljes indukcióval

$$H^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot h^{(n)}(-x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

következik. Tehát tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$g_n(-x) = e^{x^2/2} \cdot h^{(n)}(-x) = (-1)^n \cdot e^{x^2/2} \cdot H^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2/2} \cdot h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot g_n(x).$$

[5] $\ell_2 := \{(v_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 < +\infty\}$.

[6] Tekintsük az $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-teret, és legyen az $e_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ teljes ortonormált rendszer (ld. 5) lábjegyzet). Ekkor minden $x \in X$ elem esetén az $\hat{x}(n) := \langle x, e_n \rangle$ $(n \in \mathbf{N})$ Fourier-együtthatókra $(\hat{x}(n)) \in \ell_2$ és $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Továbbá tetszőleges $(a_n) \in \ell_2$ sorozathoz egyértelműen létezik olyan $x \in X$ elem, amelyre $(\hat{x}(n)) = (a_n)$, nevezetesen $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$.

Ezzel egy $T : L^2(\lambda) \to L^2(\lambda)$ leképezést definiáltunk, ami nyilván lineáris, és

$$\|T(f)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\imath^n \cdot c_n(f)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2.$$

Továbbá $h_n^*(x) = h_n(-x) = (-1)^n \cdot h_n(x)$ $(x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$ következtében[7]

$$T(T(f)) = \sum_{n=0}^{\infty} \imath^n \cdot c_n(T(f)) \cdot h_n = \sum_{n=0}^{\infty} \imath^n \cdot \imath^n \cdot c_n(f) \cdot h_n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n(f) \cdot h_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f^*) \cdot h_n = f^* \qquad (f \in L^2(\lambda)),$$

más szóval $T(T(f^*)) = f$. Így a fenti T leképezés izometria, ahol $T^{-1}(f) = T(f^*)$ $(f \in L^2(\lambda))$. (A funkcionálanalízis nyelvén fogalmazva a T unitér operátor.)

Lássuk be, hogy tetszőleges $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kompakt tartójú, kétszer folytonosan differenciálható függvényre $T(f) = \hat{f}/\sqrt{2\pi}$ ($L^2(\lambda)$-értelemben, azaz $\|T(f) - \hat{f}/\sqrt{2\pi}\|_2 = 0$). Ekkor ui. (ld. 5.4.3.3. Lemma, 5.4.2.7. Tétel) az $F := \hat{f}$ jelöléssel $F \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$, $\hat{F} \in L^2(\lambda)$, továbbá

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \hat{F}(-x) = \frac{1}{2\pi} \cdot (\hat{F})^*(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}).$$

Így

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot (\hat{F})^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n((\hat{F})^*) \cdot h_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n(\hat{F}) \cdot h_n,$$

ahol a szorzási szabály (ld. 5.4.2.4. Lemma) miatt

$$c_n(\hat{F}) = \int \hat{F} h_n \, d\lambda = \int F \hat{h}_n \, d\lambda = \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \int F h_n \, d\lambda = \imath^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot c_n(F) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath)^n \cdot c_n(F) \cdot h_n,$$

amiből $T(h_n) = \imath^n \cdot h_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath)^n \cdot c_n(F) \cdot T(h_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath)^n \cdot \imath^n \cdot c_n(F) \cdot h_n =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(F) \cdot h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \hat{f} = (\check{f})^*$$

következik (ld. xix) megjegyzés).

Mindezek alapján a T lényegében nem más, mint a Fourier-transzformáció kiterjesztése az $L^2(\lambda)$ függvényosztályra.

[7] $c_n(f^*) = \int f(-t) h_n(t) \, dt = \int f(t) h_n(-t) \, dt = (-1)^n \cdot \int f(t) h_n(t) \, dt = (-1)^n \cdot c_n(f)$ $(n \in \mathbf{N})$.

xxiii) Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in L^2(\lambda)$, és $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén $f_{ab} := f \cdot \chi_{[a,b]}$. Ekkor

$$f_{ab} \in L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda),\ \|f - f_{ab}\|_2 \to 0 \qquad (a \to -\infty,\ b \to +\infty),$$

és így $\|\hat{f} - \hat{f}_{ab}\|_2 \to 0$ $(a \to -\infty,\ b \to +\infty)$. Mivel (ld. 5.4.3.)

$$\hat{f}_{ab}(x) = \int f_{ab}(t) e^{\imath xt}\, dt = \int_a^b f(t) e^{\imath xt}\, dt \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \sqrt{\int \left| \hat{f}(x) - \int_a^b f(t) e^{\imath xt}\, dt \right|^2 dx} = 0.$$

Ugyanígy kapjuk az inverziót illetően, hogy

$$\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \sqrt{\int \left| f(x) - \int_a^b \hat{f}(t) e^{-\imath xt}\, dt \right|^2 dx} = 0.$$

xxiv) Legyen (ld. 5.4.5.) $\mathcal{S}'$ az $\mathcal{L} : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ folytonos lineáris funkcionálok halmaza (az *általánosított függvények* (vagy más néven („temperált") *disztribúciók*) halmaza). Ha pl. $1 \le p \le +\infty$, $f \in L^p(\lambda)$, és

$$\mathcal{L}_f(u) := \int f u\, d\lambda \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

akkor (a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) miatt) az $\mathcal{L}_f : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ nyilván lineáris funkcionál. Ti. egyrészt a linearitás nyilvánvaló, másrészt ha adott az $u_k \in \mathcal{S}$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat, és (ld. 5.4.5.) $\rho(u_k, 0) \to 0$ $(k \to \infty)$, akkor $\|u_k\|_q \to 0$ $(k \to \infty)$ is igaz (ahol $1/p + 1/q = 1$). Következésképpen a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$|\mathcal{L}_f(u_k)| \le \|f\|_p \cdot \|u_k\|_q \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

azaz az $\mathcal{L}_f$ funkcionál folytonos a $\mathcal{S} \ni 0$-ban, és így a linearitása miatt minden $\mathcal{S}$-beli helyen. Tehát $\mathcal{L}_f \in \mathcal{S}'$ (*reguláris disztribúció*). Az $\mathcal{L}_f \equiv f$ azonosítással azt mondhatjuk, hogy az f általánosított függvény. Legyen pl. $f \equiv 1$. Ekkor

$$\mathcal{L}_1(u) = \int u\, d\lambda \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

azaz az $\mathcal{S} \ni u \mapsto \int u\, d\lambda$ integrál-funkcionál reguláris disztribúció. Ugyanakkor legyen $z \in \mathbf{R}^n$ és $\delta_z : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ a

$$\delta_z(u) := u(z) \qquad (u \in \mathcal{S})$$

utasítással értelmezett (nyilván lineáris) funkcionál. Világos, hogy a δ_z folytonos is, azaz $\delta_z \in \mathcal{S}'$ (*Dirac-disztribúció*), viszont (eléggé nyilvánvalóan) a δ_z nem reguláris az előbbi értelemben.

Emlékeztetünk arra (ld. 5.4.2.4. Lemma, 5.4.3.5. Tétel), hogy a szorzási szabály szerint tetszőleges $f \in L^2(\lambda)$ (vagy $f \in L^1(\lambda)$) és $u \in \mathcal{S}$ esetén

$$\mathcal{L}_{\hat{f}}(u) = \int \hat{f} u \, d\lambda = \int f \hat{u} \, d\lambda = \mathcal{L}_f(\hat{u}).$$

Ezért kézenfekvőnek látszik tetszőleges $\mathcal{L} \in \mathcal{S}'$ esetén az $\widehat{\mathcal{L}}$ *Fourier-transzformáltat* olyan $\widehat{\mathcal{L}} \in \mathcal{S}'$ általánosított függvényként definiálni, amelyre

$$\widehat{\mathcal{L}}(u) := \mathcal{L}(\hat{u}) \qquad (u \in \mathcal{S})$$

teljesül. (Mivel (ld. 5.4.5.2. Tétel) $\mathcal{S} \ni u \mapsto \hat{u} \in \mathcal{S}$ homeomorfizmus $\mathcal{S}$-ről $\mathcal{S}$-re, az előbbiekben valóban egy $\widehat{\mathcal{L}} \in \mathcal{S}'$ funkcionált (általánosított függvényt) definiáltunk.)

Ha pl. $1 \le p \le 2$, $f \in L^p(\lambda)$ és $\mathcal{L} := \mathcal{L}_f$, akkor könnyen igazolhatóan $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\hat{f}}$, azaz az $\widehat{\mathcal{L}}$ reguláris disztribúció: $\widehat{\mathcal{L}} \equiv \hat{f}$. Ezért: ha $p > 2$ és $f \in L^p(\lambda)$, akkor legyen $\hat{f} := \widehat{\mathcal{L}}_f$, más szóval

$$\hat{f}(u) = \widehat{\mathcal{L}_f}(u) = \mathcal{L}_f(\hat{u}) = \int f \hat{u} \, d\lambda \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

xxv) Tekintsük a fenti (ld. xxiv)) $\mathcal{L}_1$ (reguláris) disztribúciót, ekkor (ld. 5.4.2.7. Tétel)

$$\widehat{\mathcal{L}_1}(u) = \mathcal{L}_1(\hat{u}) = \int \hat{u} \, d\lambda = (2\pi)^n \cdot u(0) = (2\pi)^n \cdot \delta_0(u) \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

azaz $\widehat{\mathcal{L}_1} = (2\pi)^n \cdot \delta_0$. Hasonlóan kapjuk a Dirac-féle δ_z $(z \in \mathbf{R}^n)$ disztribúció Fourier-transzformáltját is:

$$\widehat{\delta}_z(u) = \delta_z(\hat{u}) = \hat{u}(z) = \int u(t) e^{\imath \langle t, z \rangle} \, dt = \mathcal{L}_{e_z}(u) \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

tehát $\widehat{\delta}_z = \mathcal{L}_{e_z}$.

xxvi) Belátható, hogy minden $p > 2$ esetén van olyan $f \in L^p(\lambda)$, amelyre az $\hat{f}$ Fourier-transzformált nem reguláris disztribúció, más szóval az $\hat{f}$ nem „közönséges" függvény: nincs olyan g függvény, hogy

$$\int f \hat{u} \, d\lambda = \int g u \, d\lambda \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

xxvii) Illusztrációképpen mutassuk meg, hogy időnként pl. a differenciálegyenletek révén is eljuthatunk a Fourier-transzformált kiszámításához. Vegyük ehhez példaként az

$$f(t) := e^{-t^2} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényt. Ekkor

$$f'(t) = -2te^{-t^2} = -2tf(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ezért a deriválás és a Fourier-transzformáció kapcsolatára vonatkozó formulák alapján (ld. 5.4.4.)

$$-\imath\cdot x\hat{f}(x) = 2\imath\cdot(\hat{f})'(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$(\hat{f})'(x) = -(x/2)\cdot\hat{f}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ami az $\hat{f}$-ra nézve egy homogén elsőrendű differenciálegyenlet. Ennek minden megoldása $\alpha\cdot e^{-x^2/4}$ $(x \in \mathbf{R})$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ együtthatóval. Mivel

$$\hat{f}(0) = \int f\,d\lambda = \sqrt{\pi},$$

így $\alpha = \sqrt{\pi}$ és $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi}\cdot e^{-x^2/4}$ $(x \in \mathbf{R})$.

Megjegyezzük, hogy a $h(x) := e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvényre (ld. 5.4.2.6. Lemma) $\hat{h} = \sqrt{2\pi}\cdot h$. Nyilván $f(x) = h(\sqrt{2}\cdot x)$ $(x \in \mathbf{R})$, következésképpen (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\hat{f}(x) = \int h(\sqrt{2}\cdot t)e^{\imath xt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int h(z)e^{\imath xz/\sqrt{2}}\,dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\hat{h}(x/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\cdot h(x/\sqrt{2}) = \sqrt{\pi}\cdot e^{-x^2/4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

xxviii) Az 5.1. pontban vizsgált konvolúció-egyenlőtlenségek messzemenően általánosíthatók. Ui.

$$1 \le p, q, r \le +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 1 - \frac{1}{r^*},$$

valamint $f \in L^p(\lambda)$, $g \in L^q(\lambda)$ esetén $f * g \in L^r(\lambda)$, és

$$\|f * g\|_r \le (A_p A_q A_{r^*})^n\cdot\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

(*Young-egyenlőtlenség.*) Itt az $1 \le u, v \le +\infty$, $1/u + 1/v = 1$ jelölésekkel

$$A_1 := A_\infty := 1,\ A_u := \left(\frac{u^{1/u}}{v^{1/v}}\right)^{1/2} \qquad (1 < u < +\infty)$$

jelenti az ún. *Babenko-Beckner-konstanst.* Speciálisan, ha $q = 1$, akkor $r = p$, így $f \in L^p(\lambda)$, $g \in L^1(\lambda)$ mellett $f * g \in L^p(\lambda)$ és

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p\cdot\|g\|_1.$$

xxix) Legyen $1 \le p \le 2$, és jelöljük q-val a p „konjugáltját": $1/p+1/q=1$. Ha $f \in L^p(\lambda)$, akkor $\hat{f} \in L^q(\lambda)$ és

$$\|\hat{f}\|_q \le C_p \cdot \|f\|_p,$$

ahol a $C_p > 0$ konstans csak a p-től (és az n-től) függ (*Hausdorff-Young-egyenlőtlenség*). Az utóbbi konstanst illetően a következőket mondhatjuk: ha A_p jelöli a Babenko-Beckner-konstanst (ld. xxviii)), akkor a $C_p := (2\pi)^{n/q} \cdot A_p^n$ választás megfelelő, azaz

$$\|\hat{f}\|_q \le (2\pi)^{n/q} \cdot A_p^n \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p(\lambda)).$$

Ha $p=2$, akkor nyilván $q=2$, ezért visszakapjuk a Plancherel-egyenlőséget (ld. 5.4.3.5. Tétel), nevezetesen a $C_2 = (2\pi)^{n/2}$ konstanst:

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \cdot \|f\|_2 \qquad (f \in L^2(\lambda)).$$

xxx) Világos, hogy minden $\varepsilon > 0$ és $1 < q \le +\infty$ mellett az

$$\mathbf{R} \ni y \mapsto y^{-1} \cdot \chi_{\{|y|>\varepsilon\}}$$

függvény $L^q(\lambda)$-beli. Legyen ($n=1$ esetén) $f \in L^p(\lambda)$ $(1 \le p < +\infty)$, akkor a most mondottak és a Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) szerint jól definiált és véges a

$$H_\varepsilon f(x) := \int_{\{|y|>\varepsilon\}} \frac{f(x-y)}{y}\, dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény. Belátható, hogy megadható olyan $C > 0$ és $p > 1$ esetén (csak a p-től függő) $C_p > 0$ konstans, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra és $f \in L^1(\lambda)$, $g \in L^p(\lambda)$ függvényekre

$$\lambda(\{|H_\varepsilon f| > y\}) \le C \cdot \frac{\|f\|_1}{y} \qquad (y > 0),$$

valamint

$$\|H_\varepsilon g\|_p \le C_p \|g\|_p.$$

(Röviden, a H_ε $(\varepsilon > 0)$ operátorok az ε-szerint egyenletesen gyengén (1,1)-típusúak és minden $1 < p < +\infty$ esetén (p,p)-típusúak.)

Az is igaz továbbá, hogy a most mondott gyenge (1,1)- és (p,p)-tulajdonság a

$$H^* f := \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f| \qquad (f \in L^p(\lambda))$$

maximál-operátorra is teljesül. Innen egyszerűen következik az, hogy létezik a

$$Hf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in \mathbf{R})$$

határérték, az f függvény ún. *Hilbert-transzformáltja,* és a H operátor is gyengén (1,1)- és (p,p)-tulajdonságú $(1 < p < +\infty)$. Speciálisan, ha $f, g \in L^2(\lambda)$, akkor

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2,\ H^2 f = -f,$$

és

$$\int Hf\cdot g\,d\lambda = -\int f\cdot Hg\,d\lambda,\ 2\pi\cdot \widehat{Hf}(x) = \imath\cdot \hat{f}(x)\cdot \operatorname{sign} x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

xxxi) Legyen az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén

$$f_*(x) := x\cdot f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Definiáljuk a $\mathcal{D}$ halmazt a következőképpen:

$$\mathcal{D} := \{f \in L^2(\lambda) \cap D : f_*, f', (f')_* \in L^2(\lambda)\}.$$

Tudjuk (ld. 5.4.5.), hogy $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. A Fourier-analízis egyik nevezetes eredménye a *határozatlansági reláció* néven ismert egyenlőtlenség (vagy más néven a *Heisenberg-Pauli-Weyl-egyenlőtlenség*): tetszőleges $f \in \mathcal{D}$ függvényre

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot \int |f(x)|^2\,dx \le \sqrt{\int x^2\cdot |f(x)|^2\,dx}\cdot \sqrt{\int x^2\cdot |\hat{f}(x)|^2\,dx},$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $\alpha \in \mathbf{R}$ és a $0 > c \in \mathbf{R}$ paraméterrel $f(x) = \alpha e^{cx^2/2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

xxxii) Az előző megjegyzésbeli egyenlőtlenséget az $\widehat{f'}(x) = -\imath\cdot x\cdot \hat{f}(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ egyenlőség (ld. 5.4.4.), és az $\|\widehat{f'}\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot \|f'\|_2$ Plancherel-egyenlőség (ld. 5.4.3.5. Tétel) alapján a következőképpen is írhatjuk:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot \int |f(x)|^2\,dx \le \|f_*\|_2\cdot \|\widehat{f'}\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot \|f_*\|_2\cdot \|f'\|_2.$$

Innen egyszerűsítés után az elemi $2ab \le a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbf{R})$ összefüggést felhasználva

$$\int |f(x)|^2\,dx \le \int x^2|f(x)|^2\,dx + \int |f'(x)|^2\,dx$$

következik. Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha a xxxi)-beli HPW-egyenlőtlenségben is egyenlőség van, továbbá $\|f_*\|_2 = \|f'\|_2$. Az előbbi a xxxi) megjegyzés szerint (az ottani paraméterekkel) azt jelenti, hogy $f(x) = \alpha e^{cx^2/2}$ $(x \in \mathbf{R})$. Így

$$f'(x) = \alpha c x\cdot e^{cx^2/2} = c f_*(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és

$$\|f_*\|_2 = \|f'\|_2 = |c|\cdot \|f_*\|_2.$$

Nyilván feltehető, hogy $\alpha \ne 0$, ezért $|c| = 1$, azaz ($c < 0$ miatt) $c = -1$, amiből $f(x) = \alpha e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbf{R})$ adódik.

xxxiii) Értelemszerű módosítással kapjuk a határozatlansági reláció (ld. xxxi)) alábbi kiterjesztését: tetszőleges $a, b \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \int |f(x)|^2 \, dx \leq \sqrt{\int (x-a)^2 \cdot |f(x)|^2 \, dx} \cdot \sqrt{(x-b)^2 \cdot |\hat{f}(x)|^2 \, dx}.$$

Tegyük fel, hogy $\|f\|_2 = 1$. Belátható, hogy léteznek az alábbi minimumok:

$$\Delta_f := \min \left\{ \sqrt{\int (x-a)^2 | \cdot |f(x)|^2 \, dx} : a \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\delta_f := \min \left\{ \sqrt{\int (x-b)^2 | \cdot \hat{f}(x)|^2 \, dx} : b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Következésképpen:

$$\Delta_f \cdot \delta_f \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

xxxiv) Legyen (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett) $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $T \subset \mathbf{R}^n$ (Lebesgue-)mérhető, és nevezzük az $f \in L^2(\lambda)$ függvényt *a T halmazon ε-koncentráltnak,* ha

$$\sqrt{\int_{\mathbf{R}^n \setminus T} |f|^2 \, d\lambda} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_2.$$

Világos, hogy pl. $\varepsilon = 0$ esetén $f(x) = 0$ (m.m. $x \in \mathbf{R}^n \setminus T$). A most bevezetett fogalommal igaz az alábbi, határozatlansági reláció-szerű állítás: tegyük fel, hogy $T, S \subset \mathbf{R}^n$ mérhetők, $0 \leq \varepsilon, \delta \leq 1$, és az $0 \neq f \in L^2(\lambda)$ olyan függvény, ami a T halmazon ε-koncentrált, az $\hat{f}$ pedig az S halmazon δ-koncentrált. Ekkor

$$\sqrt{|T| \cdot |S|} \geq 1 - \varepsilon - \delta$$

(ahol $|T| := \lambda(T)$, $|S| := \lambda(S)$ a szóban forgó halmazok (Lebesgue-)mértékét jelöli).

Tegyük fel pl., hogy az $f \in L^2(\lambda)$ függvény esetén a $T, S \subset \mathbf{R}^n$ halmazok a következők:

$$T := \{f \neq 0\} := \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}, \;\; S := \{\hat{f} \neq 0\} := \{x \in \mathbf{R}^n : \hat{f}(x) \neq 0\}.$$

Ekkor vagy $f = 0$, vagy pedig $|T| \cdot |S| \geq 1$. Ui. az f a T halmazon, az $\hat{f}$ pedig az S halmazon 0-koncentrált, ezért $f \neq 0$ mellett alkalmazható az előbbi határozatlansági reláció az $\varepsilon := \delta := 0$ választással. Ha tehát $|T| \cdot |S| < 1$, akkor $f = 0$.

xxxv) Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és $0 \neq g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ adott *ablakfüggvény,* továbbá (ld. xi))

$$\mathbf{D}_g := \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C} : f \cdot \tau_x g \in L^1(\lambda) \;\; (x \in \mathbf{R}^n)\}.$$

A Hölder-egyenlőtlenség (ld. 3.5.1. Tétel) alapján nyilvánvaló, hogy pl. $g \in L^q(\lambda)$ esetén $L^p(\lambda) \subset \mathbf{D}_g$, hacsak $1 \le p, q \le +\infty$, $1/p + 1/q = 1$. Így pl. $L^2(\lambda) \subset \mathbf{D}_g$ minden $L^2(\lambda) \ni g$-re. Különösen fontos a $g \in L^1(\lambda) \cap L^\infty(\lambda)$ eset, amikor könnyen láthatóan egyúttal minden $1 < p < \infty$ „kitevőre" $g \in L^p(\lambda)$ is teljesül. Ezért ekkor az előbb mondottak szerint tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ választással $L^p(\lambda) \subset \mathbf{D}_g$. Ha tehát g ablakfüggvény, $f \in \mathbf{D}_g$ és $x, y \in \mathbf{R}^n$, akkor definiáljuk a $V_g f(x, y)$-t a következőképpen:

$$V_g f(x, y) := \int f(t)\overline{g(t + x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}\, dt.$$

A

$$V_g f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{C}$$

leképezést az f függvény *rövid idejű* (vagy *ablakos*) *Fourier-transzformáltjának* nevezzük (angolul STFT: *short-time Fourier transform*). *Gábor Dénes* (1946) vizsgálatai nyomán használatos még a *Gábor-transzformált* elnevezés is.

Speciálisan, ha $g \equiv 1$, akkor $V_g f(x, y) = \hat{f}(y)$ $(x, y \in \mathbf{R}^n)$.

Ha pl. $n = 1$, $\delta > 0$, és $\operatorname{supp} g \subset [-\delta, \delta]$, akkor

$$V_g f(x, y) = \int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f(t)\overline{g(t + x)}e^{\imath\langle t,y\rangle}\, dt \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

A $g := \chi_{[-\delta,\delta]}$ esetben

$$V_g f(x, y) = \int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f(t)e^{\imath\langle t,y\rangle}\, dt \qquad (y \in \mathbf{R}),$$

így az $f_\delta := f \cdot \chi_{[-\delta,\delta]}$ jelöléssel $V_g f(0, y) = \widehat{f_\delta}(y)$ $(y \in \mathbf{R})$.

xxxvi) A Fourier-transzformált az approximációelméletben is fontos szerepet játszik. Az alábbi néhány megjegyzésben (a részletek mellőzésével) erre mutatunk példát. Tegyük fel ehhez, hogy a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény Lebesgue-integrálható $(g \in L^1)$, és legyen

$$Pg(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t + 2k\pi) \qquad (t \in [-\pi, \pi])$$

(a g függvény ún. *periodizáltja*). Mivel (ld. 3.3.2.3. Tétel, 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(t + 2k\pi)|\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t + 2k\pi)|\, dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |g(t)|\, dt = \int |g(t)| dt < +\infty,$$

ezért a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t+2k\pi)$ sor (Lebesgue-szerint) m.m. $t \in \mathbf{R}$ helyen abszolút konvergens, és

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Pg(t)|\, dt \le \|g\|_1 < +\infty.$$

Tehát $Pg \in L^1[-\pi,\pi]$, és (ld. 3.5.6. (Lebesgue-)Tétel)

$$\int_{-\pi}^{\pi} Pg(t)\, dt = \int g(t)\, dt.$$

A Pg függvény nyilván periodikus 2π-szerint. Ha $f \in L^1[-\pi,\pi]$, akkor terjesszük ki az f-et az $\mathbf{R}$-re 2π-szerint periodikusan (a kiterjesztett függvényt is f-fel jelöljük), és legyen (ld. 5.1.)

$$f \star g := f * (Pg).$$

Ekkor

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t+2k\pi)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

továbbá

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f \star g(x)|\, dx \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx \right) \cdot |g(t+2k\pi)|\, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t+2k\pi)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \cdot \int |g(t)|\, dt < +\infty.$$

Így $f \star g \in L^1[-\pi,\pi]$ és $\|f \star g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Ha pl.

$$f(t) := e_j(t) := e^{\imath jt} \qquad (j \in \mathbf{Z}, t \in [-\pi,\pi]),$$

akkor

$$f \star g(x) = e_j \star g(x) = e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\imath jt} g(t+2k\pi)\, dt =$$

$$e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\imath j(t+2k\pi)} g(t+2k\pi)\, dt =$$

$$e^{\imath jx} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} P(ge_{-j})(t)\, dt = e^{\imath jx} \cdot \int g(t) e^{-\imath jt} dt \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

xxxvii) Legyen most a $\theta \in L^1$ olyan függvény, hogy $\hat{\theta} \in L^1$, és valamilyen $0 < m \in \mathbf{N}$ mellett

$$g(t) := \theta_m(t) := \frac{m}{2\pi} \cdot \hat{\theta}(mt) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az előbbi megjegyzés és az inverziós formula (ld. 5.4.2.7. Tétel) szerint (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$e_j \star \theta_m(x) = e^{\imath jx} \frac{m}{2\pi} \cdot \int \hat{\theta}(mt) e^{-\imath jt}\, dt =$$

$$e^{\imath jx} \frac{1}{2\pi} \cdot \int \hat{\theta}(t) e^{-\imath jt/m}\, dt = e^{\imath jx} \cdot \theta(j/m) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Definiáljuk a T_m^θ, σ_m^θ $(0 < m \in \mathbf{N})$ operátorokat a következőképpen:

$$T_m^\theta f := f \star \theta_m,\ \sigma_m^\theta f := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(k/m) c_k(f) e_k \qquad (f \in L^1[-\pi, \pi]),$$

ahol

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath kt}\, dt \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az f függvény k-adik Fourier-együtthatója.[8] A fentiek alapján minden $f \in L^1[-\pi, \pi]$ függvényre (ld. 3.6. xxx) megjegyzés)

$$\|T_m^\theta f\|_1 = \|f \star \theta_m\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|\theta_m\|_1 = \frac{m\|f\|_1}{2\pi} \cdot \int |\hat{\theta}(mt)|\, dt =$$

$$\frac{\|f\|_1}{2\pi} \cdot \int |\hat{\theta}(t)|\, dt = \frac{\|\hat{\theta}\|_1}{2\pi} \cdot \|f\|_1,$$

így a

$$T_m^\theta : L^1[-\pi, \pi] \to L^1[-\pi, \pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

(nyilván lineáris) operátorok (egyenletesen) korlátos operátorok. Hasonlóan,

$$\|\sigma_m^\theta f\|_1 \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| \cdot |c_k(f)| \cdot \|e_k\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)|,$$

tehát a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty$ $(0 < m \in \mathbf{N})$ feltétel miatt a

$$\sigma_m^\theta : L^1[-\pi, \pi] \to L^1[-\pi, \pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

[8] Mivel $|c_k(f)| \le \|f\|_1/(2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$, ezért a $\sigma_m^\theta f$-et megadó függvénysor a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty$ $(0 < m \in \mathbf{N})$ feltételre tekintettel minden $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén abszolút és egyenletesen konvergens. Következésképpen $\sigma_m^\theta f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ $(f \in L^1[-\pi, \pi],\ 0 < m \in \mathbf{N})$.

operátorok is korlátos lineáris operátorok. Mivel

$$c_k(e_j) = \begin{cases} 1 & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases} \qquad (k, j \in \mathbf{Z}),$$

ezért az előbb kapott $T_m^\theta e_j = e_j \star \theta_m = \theta(j/m)e_j$ egyenlőség szerint

$$\sigma_m^\theta e_j = \theta(j/m)e_j = T_m^\theta e_j \qquad (j \in \mathbf{Z}, 0 < m \in \mathbf{N}),$$

amiből minden τ trigonometrikus polinomra is $\sigma_m^\theta \tau = T_m^\theta \tau$ következik. Viszont a trigonometrikus polinomok halmaza az $\|.\|_1$ normában mindenütt sűrű az $L^1[-\pi, \pi]$ függvényhalmazban (más szóval az e_j $(j \in \mathbf{Z})$ függvények egy ún. zárt rendszert alkotnak az $(L^1[-\pi, \pi], \|.\|_1)$ Banach-térben), így egyúttal

$$\sigma_m^\theta f = T_m^\theta f \qquad (f \in L^1[-\pi, \pi],\ 0 < m \in \mathbf{N})$$

is igaz.

Sőt, ha $\lim_{t\to 0} \theta(t) = 1$, akkor

$$\|\sigma_m^\theta e_j - e_j\|_1 = |1 - \theta(j/m)| \cdot \|e_j\|_1 = 2\pi \cdot |1 - \theta(j/m)| \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Összefoglalva a fentieket (a Banach-Steinhaus-tételre hivatkozva)[9] az alábbi állítást láttuk be:

tegyük fel, hogy a $\theta \in L^1$ függvényre a következő feltételek teljesülnek:

$$\hat{\theta} \in L^1,\ \lim_{t\to 0} \theta(t) = 1,\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \quad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tetszőleges $f \in L^1[-\pi, \pi]$ esetén $\|\sigma_m^\theta f - f\|_1 \to 0 \qquad (m \to \infty)$.

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő $L^1[-\pi, \pi]$ tér (analóg okfejtés után) kicserélhető a $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$-re (az $\|.\|_1$ norma pedig $\|.\|_\infty$-re). A $\lim_{t\to 0} \theta(t) = 1$ feltétel teljesül pl. akkor, ha a θ folytonos, és $\theta(0) = 1$.

[9] Ha az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ terek mindegyike Banach-tér, és adott a $T_n : X_1 \to X_2$ $(n \in \mathbf{N})$ korlátos lineáris operátorokból álló sorozat, akkor a (T_n) sorozat erős konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az, hogy ez a konvergencia az X_1 tér egy zárt rendszerén fennálljon, és egyúttal a T_n operátorok $\|T_n\|$ $(n \in \mathbf{N})$ normáira $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ teljesüljön (a (T_n) sorozat *egyenletesen korlátos*). (Az $Y \subset X_1$ halmaz *zárt rendszer* az X_1-ben, ha az Y elemeiből alkotott összes véges lineáris kombináció által alkotott halmaz mindenütt sűrű az X_1-ben. A szóban forgó operátor-sorozat *erősen konvergens,* ha minden $x \in X_1$ esetén a $(T_n(x))$ sorozat konvergens.)

xxxviii) Legyen $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, és tekintsük az alábbi speciális szummációs eljárást: nevezetesen, egy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ számsor esetén definiáljuk a (t_m) sorozatot a következőképpen:

$$t_m := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m)x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

(feltételezve, hogy minden $0 < m \in \mathbf{N}$ mellett létezik a fenti véges összeg). Ha pl. a θ függvényre igaz, hogy (ld. xxxvii)) tetszőleges $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty,$$

akkor nyilván bármelyik korlátos (x_k) számsorozatra létezik az előbbi (t_m) számsorozat. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ sor *θ-szummábilis,* ha a (t_m) sorozatnak van (véges) határértéke. Ez utóbbi esetben $\lim_{m\to\infty} t_m$ az illető sor ún. *θ-szummája.*

Nem nehéz ellenőrizni, hogy ha pl. a θ páros függvényre $\theta \in \mathcal{C}\{0\}$, $\theta(0) = 1$ és a θ még korlátos változású is, akkor az előbbi θ-szummáció permanens (azaz a konvergens sorok θ-szummábilisak is, és a θ-szummájuk megegyezik a „közönséges" összegükkel).

Világos, hogy ha $\theta := \chi_{(-1,1)}$, akkor a θ-szummáció a szóban forgó sorok közönséges értelemben vett (szimmetrikus) összegzését jelenti:

$$t_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{(-1,1)}(k/m)x_k = \sum_{k=-m+1}^{m-1} x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan, ha $\gamma > 0$ és

$$\theta(t) := (1 - |t|^\gamma)\cdot \chi_{(-1,1)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor a klasszikus *Riesz-szummációhoz* jutunk:

$$t_m = \sum_{k=-m+1}^{m-1} (1 - (|k|/m)^\gamma)\cdot x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan a $\gamma = 1$ választással kapjuk a $(C, 1)$- (vagy *Fejér-féle*) *összegzést*:

$$t_m = \sum_{k=-m+1}^{m-1} (1 - (|k|/m))\cdot x_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N}).$$

(Számos egyéb klasszikus szummációs eljárás írható le még ilyen módon.)

Ha pl. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, és egy tetszőleges $\xi \in [-\pi, \pi]$ esetén (ld. xxxvii))

$$x_k := c_k(f)e_k(\xi) \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

akkor $t_m = \sigma_m^\theta f(\xi)$ $(0 < m \in \mathbf{N})$. Következésképpen ekkor pl. a

$$\theta(t) := (1 - |t|)\cdot \chi_{(-1,1)}(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

szereposztással a $\sigma_m^\theta f$-ek az f függvény (trigonometrikus) Fourier-sorának a Fejér-féle közepei:

$$\sigma_m f := \sigma_m^\theta f = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S_k f \qquad (0 < m \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$S_k f := \sum_{j=-k+1}^{k-1} c_j(f) e_j \qquad (0 < k \in \mathbf{N})$$

az f függvény k-adik Fourier-részletösszege. Mivel az $0 \neq x \in \mathbf{R}$ helyeken

$$\hat{\theta}(x) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{\imath x t}\, dt = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)(\cos(xt) + \imath\cdot \sin(xt))\, dt =$$

$$\int_{-1}^{1} (1 - |t|)\cos(xt)\, dt = 2\int_0^1 (1 - t)\cos(xt)\, dt = \frac{2}{x}\int_0^1 \sin(xt)\, dt =$$

$$\frac{2(1 - \cos(xt))}{x^2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 \to 1 \qquad (x \to 0),$$

ezért alkalmas $M > 0$ konstanssal

$$|\hat{\theta}(x)| = \hat{\theta}(x) = \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 \leq M \qquad (0 < x \leq 1).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\|\hat{\theta}\|_1 = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 dx =$$

$$2\int_0^1 \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 dx + 2\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 dx \leq$$

$$2M + 8\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 2M + 8 < +\infty.$$

Így a xxxvii) megjegyzésben mondott állítás szerint az ismert Fejér-tétel következik: tetszőleges $f \in L(X)$ függvényre

$$\|\sigma_m f - f\|_X \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

ahol az $L(X)$ szimbólum vagy az $L^1[-\pi, \pi]$ teret jelöli (és ekkor $\|.\|_X := \|.\|_1$), vagy pedig a $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ teret (amikor is $\|.\|_X := \|.\|_\infty$).

xxxix) Amennyiben egy $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre teljesül a

$$C_m := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\theta(k/m)| < +\infty \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

végességi feltétel, akkor minden további nélkül „elkészíthetjük" a xxxvii) megjegyzés mintájára a σ_m^θ $(0 < m \in \mathbf{N})$ operátorokat. A következőket mondhatjuk:

$$\sigma_m^\theta f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath kt} dt \right) e^{\imath kx} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(t) \theta(k/m) e^{\imath k(x-t)}\, dt \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi],\ x \in [-\pi,\pi]),$$

ahol

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(t)\theta(k/m)e^{\imath k(x-t)}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\theta(k/m)| \le C_m \cdot |f(t)| \qquad (x, t \in [-\pi,\pi]).$$

Ezért a 3.5.6. Tétel szerint (ld. 5.1.)

$$\sigma_m^\theta f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m) e^{\imath k(x-t)}\, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_m^\theta(x-t)\, dt = f * K_m^\theta(x) \qquad (f \in L^1[-\pi,\pi],\ x \in [-\pi,\pi])$$

a

$$K_m^\theta := \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m) e_k \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

magfüggvénnyel. A $C_m < +\infty$ feltételből következően a (nyilván 2π-szerint periodikus) K_m^θ-t definiáló végtelen sor egyenletesen konvergens, így a K_m^θ folytonos függvény. Innen az is következik[10], hogy az

$$\mathcal{C}[-\pi,\pi] \ni f \mapsto \sigma_m^\theta f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátor normája $\|K_m^\theta\|_1$. Ha még $\theta,\ \hat{\theta} \in L^1$ is igaz[11], akkor

$$\|\sigma_m^\theta f\|_\infty = \|T_m^\theta f\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|\theta_m\|_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|\hat{\theta}\|_1 \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]),$$

[10] Tekintsük az $[a,b]$, $[c,d]$ kompakt intervallumok és a $K : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ kétváltozós folytonos függvény esetén a $Tf(x) := \int_a^b f(t)K(t,x)\, dt$ $(f \in \mathcal{C}[a,b],\ x \in [c,d])$ *folytonos magú integráloperátort.* Ha a $\mathcal{C}[a,b]$, $\mathcal{C}[c,d]$ tereken egyaránt a $\|.\|_\infty$ normát vezetjük be, akkor a $T : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[c,d]$ korlátos lineáris operátor normája nem más, mint $\max_{x\in[c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\, dt$.

[11] Ekkor az inverziós formulát (ld. 5.4.2.7. Tétel) alkalmazva egyszerű számolással azt kapjuk, hogy $c_l(P\theta_m) = \theta(l/m)/(2\pi)$ $(l \in \mathbf{Z})$. Ugyanakkor a K_m^θ-t definiáló sor egyenletes konvergenciája miatt $c_l(K_m^\theta) = \theta(l/m)/(2\pi)$ $(l \in \mathbf{Z})$ is igaz, más szóval $c_l(P\theta_m) = c_l(K_m^\theta)$ $(l \in \mathbf{Z})$. Innen a trigonometrikus rendszer teljessége alapján $K_m^\theta(t) = P\theta_m(t)$ (m.m. $t \in [-\pi,\pi]$) következik, azaz $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta(k/m)e^{\imath kt} = m \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(m(t+2j\pi))$ (m.m. $t \in \mathbf{R}$, $0 < m \in \mathbf{N}$) (*Poisson-formula*).

ezért a σ_m^θ operátor normája legfeljebb $\|\hat{\theta}\|_1/(2\pi)$. Más szóval $\|K_m^\theta\|_1 \le \|\hat{\theta}\|_1/(2\pi)$, tehát egyúttal

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 \le \frac{1}{2\pi}\cdot \|\hat{\theta}\|_1.$$

Megmutatható, hogy az előbbi becslésben valójában egyenlőség áll, azaz

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot \|\hat{\theta}\|_1.$$

Tehát a $\hat{\theta} \in L^1$ feltételezés miatt az előbbi $\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1$ szuprémum véges. Sőt, bizonyos esetekben ez a következtetés meg is „fordítható". Tegyük fel pl., hogy a $\theta \in L^1$ függvény folytonos is, és alkalmas $\gamma_j \ge 0 \quad (j \in \mathbf{Z})$ számokkal az eddigi $C_m < +\infty \ (0 < m \in \mathbf{N})$ feltételen kívül

$$\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j+l/m)| \le \gamma_j \quad (j \in \mathbf{Z},\ 0 < m \in \mathbf{N}),\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j < +\infty$$

is fennáll. Ekkor

$$\|\hat{\theta}\|_1 \le 2\pi\cdot \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1,$$

így $\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty$ esetén $\hat{\theta} \in L^1$.

Ha tehát

$$(X, \|.\|_X) := \begin{cases} (C[-\pi,\pi], \|.\|_\infty) \\ \\ (L^1[-\pi,\pi], \|.\|_1)\,, \end{cases}$$

akkor a $\sigma_m^\theta : X \to X \quad (0 < m \in \mathbf{N})$ operátorokkal kapcsolatban az előzményeket figyelembe véve $\theta(0) = 1$ esetén a következő ekivalencia igaz:

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m^\theta f - f\|_X = 0 \quad (f \in X) \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\theta} \in L^1.$$

A most mondottak apropóján legyen a $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvényre

$$\|\Phi\|_S := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} |\Phi(j+l/m)|,$$

valamint

$$S(C,\ell_1) := \{\Phi \in \mathcal{C} : \|\Phi\|_S < +\infty\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy az így definiált $(S(C,\ell_1), \|.\|_S)$ tér (bár nem teljes, de) normált tér. Mivel

$$\frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| \qquad (f \in S(C,\ell_1),\ 0 < m \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{Z})$$

az $\int_j^{j+1} |f(t)|\,dt$ integrálnak egy közelítő összege, ezért

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| = \int_j^{j+1} |f(t)|\,dt.$$

Következésképpen

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| \geq \int_j^{j+1} |f(t)|\,dt \qquad (\,j\in\mathbf{Z}).$$

Innen

$$\|f\|_1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f(t)|\,dt \leq$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} |f(j+l/m)| = \|f\|_S < +\infty$$

miatt $S(C,\ell_1)\subset L^1\cap\mathcal{C}$ adódik.

A fentiek szerint igaz tehát az alábbi következtetés:

$$\theta\in S(C,\ell_1),\ \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \implies \hat{\theta}\in L^1.$$

Speciálisan, ha egy $\Psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényre

$$\|\Psi\|_W := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{x\in[0,1)} |\Psi(k+x)|,$$

és $W(C,\ell_1)$ jelöli az összes olyan folytonos $\Psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény által alkotott halmazt, amelyre $\|\Psi\|_W<+\infty$, akkor az így meghatározott $W(C,\ell_1)$ valódi altere az $S(C,\ell_1)$-nek. Világos, hogy ha pl. a szóban forgó θ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor $\theta\in W(C,\ell_1)$. Ezért minden ilyen θ esetén igaz a

$$(*) \qquad \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \|K_m^\theta\|_1 < +\infty \implies \hat{\theta}\in L^1$$

állítás.

Ha $\theta\in W(C,\ell_1)$, $\theta(0)=1$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m^\theta f - f\|_2 = 0 \qquad (f\in L^2[-\pi,\pi]).$$

Valóban, tetszőleges $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén az ismert Parseval-egyenlőség[12] szerint

$$\|\sigma_m^\theta f\|_2^2 = \|f * K_m^\theta\|_2^2 = 2\pi\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big|c_k(f * K_m^\theta)\Big|^2 =$$

$$8\pi^3\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2\cdot |c_k(K_m^\theta)|^2 = 2\pi\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2\cdot |\theta(k/m)|^2 \le$$

$$2\pi\cdot \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)|^2\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |\theta(k/m)|^2\cdot \|f\|_2^2.$$

Ha $k = jm + l \in \mathbf{Z}$ $(j \in \mathbf{Z}, l = 0, ..., m-1)$, akkor

$$|\theta(k/m)| = |\theta(j + l/m)| \le \sup_{x\in[0,1)} |\theta(j + x)| \le \|\theta\|_{W(C,\ell_1)},$$

tehát $\|\sigma_m^\theta f\|_2 \le \|\theta\|_{W(C,\ell_1)}\cdot \|f\|_2$. Ez azt (is) jelenti, hogy a

$$\sigma_m^\theta : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi] \qquad (0 < m \in \mathbf{N})$$

operátor-sorozat egyenletesen korlátos. Innen az állításunk már a Banach-Steinhaus-tétel alapján következik (figyelembe véve, hogy a trigonometrikus polinomok halmaza a $\|.\|_2$ normában mindenütt sűrű az $L^2[-\pi,\pi]$-ben).

Végül az alábbiakat jegyezzük meg. Ha $\theta \in S(C,\ell_1)$, akkor

$$\sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{l=0}^{m-1} |\theta(j + l/m)| = \|\theta\|_S < +\infty,$$

így

$$(**) \qquad \sup_{0<m\in\mathbf{N}} \frac{1}{m}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(k/m)| < +\infty.$$

Viszont nem nehéz olyan θ függvényt konstruálni, amelyre a $(**)$ igaz, de $\theta \notin S(C,\ell_1)$. Egyelőre nyitott az a kérdés, hogy a $(**)$ feltétel elegendő-e a $(*)$ következtetéshez.

[12]Tekintsünk az $(X, \langle,\rangle)$ Hilbert-térben egy $z_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ teljes ortonormált rendszert (azaz egyrészt a $\langle z_k, z_j\rangle$ $(k, j \in \mathbf{N})$ skaláris szorzat 1 vagy 0, attól függően, hogy $k = j$ vagy $k \ne j$, másrészt egy $x \in X$ elemre $\langle x, z_n\rangle = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$ (a tér null-eleme)). Ekkor tetszőleges $x \in X$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, z_n\rangle|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Legyen pl. $X := L^2[-\pi,\pi]$, $\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ $(f, g \in L^2[-\pi,\pi]$, ekkor az $e_j/\sqrt{2\pi}$ $(j \in \mathbf{Z})$ (komplex trigonometrikus) rendszer egy teljes ortonormált rendszer. Ha $f \in L^2[-\pi,\pi]$, akkor $\langle f, e_k/\sqrt{2\pi}\rangle = \sqrt{2\pi}\cdot c_k(f)$ $(k \in \mathbf{Z})$, így a Parseval-egyenlőség a következő alakú: $2\pi\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \|f\|_2^2$. Speciálisan (ld. 5.1., 3.15.5. Tétel, 3.6. xxx) megjegyzés) $2\pi\cdot c_k(f * K_m^\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f * K_m^\theta(x)e^{-\imath kx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m^\theta(x-t)\,dt\Big)e^{-\imath kx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m^\theta(y)e^{-\imath k(t+y)}\,dt\,dy = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\imath kt}\,dt\Big)\cdot \Big(\int_{-\pi}^{\pi} K_m^\theta(y)e^{-\imath ky}\,dy\Big) = 4\pi^2\cdot c_k(f)\cdot c_k(K_m^\theta)$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, $0 < m \in \mathbf{N}$.

5.6. Az absztrakt harmonikus analízis elemei

Az 5.3., valamint az 5.4. pontban nyert tapasztalatokat összegezve a következőket mondhatjuk (a legfontosabb állításokat bizonyítás nélkül csupán megfogalmazva). Legyen az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt Abel-csoport,

$$x \bullet y := \wp(x, y) \qquad (x, y \in X),$$

a μ Haar-mérték a csoporton (ld. 4.3.3.), a $\mathbf{\Gamma}$ pedig a duális csoportja. Emlékeztetünk arra, hogy a

$$\diamond(\varphi, \psi)(x) := \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (\varphi,\, \psi \in \mathbf{\Gamma},\, x \in X)$$

előírással értelmezett $\diamond$ műveletre nézve a $(\mathbf{\Gamma}, \diamond)$ szintén egy (multiplikatív) Abel-csoport, aminek a neutrális („egység") eleme az $\omega \equiv 1$ függvény.

Vezessük be az alábbi definíciót:

5.6.1. Definíció. A $\nu \in \mathbf{M}(X)$ korlátos Borel-mérték, valamint az $f \in L^1(\mu)$ függvény esetén a

$$\mathbf{\Gamma} \ni \gamma \mapsto \widehat{\nu}(\gamma) := \int \gamma \, d\nu$$

leképezést a ν mérték, a

$$\mathbf{\Gamma} \ni \gamma \mapsto \hat{f}(\gamma) := \int f \cdot \gamma \, d\mu$$

leképezést pedig az f függvény *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy gyakran a

$$\breve{\nu}(\gamma) = \int \overline{\gamma} \, d\nu, \;\; \breve{f}(\gamma) = \int f \cdot \overline{\gamma} \, d\mu \qquad (\nu \in \mathbf{M}(X),\, f \in L^1(\mu),\, \gamma \in \mathbf{\Gamma})$$

egyenlőségek révén értelmezik a ν mérték, ill. az f függvény Fourier-transzformáltját (ld. 5.5. xviii), xix) megjegyzések). Világos, hogy pusztán formai különbségről van szó, ui. az előbbi jelölésekkel

$$\breve{\nu}(\gamma) = \widehat{\nu}(\overline{\gamma}), \;\; \breve{f}(\gamma) = \hat{f}(\overline{\gamma}).$$

Legyen

$$\widehat{L^1} := \{\hat{f} \in \mathbf{C}^{\mathbf{\Gamma}} : f \in L^1(\mu)\}.$$

Vezessünk be a $\mathbf{\Gamma}$-ban egy topológiát a következőképpen. Jelöljük $\mathcal{D}$-vel az összes olyan

$$\bigcap_{g \in \mathcal{G}, V \in \mathcal{V}} g^{-1}[V]$$

alakú metszetek által alkotott halmazrendszert, ahol $\mathcal{G} \subset \widehat{L^1}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbf{C})$ tetszőleges véges halmazok, és a $\mathcal{V}$ minden eleme nyílt (a $\mathbf{C}$-beli „szokásos" topológiára nézve). Vegyük továbbá a

$$\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}} := \Big\{ \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \subset \mathcal{D} \Big\}$$

halmazt. Erről nem nehéz belátni, hogy topológia a $\mathbf{\Gamma}$-ban (az $\widehat{L^1}$ függvényosztály által indukált leggyengébb topológia a $\mathbf{\Gamma}$-ban, azaz a leggyengébb olyan topológia, amelyre vonatkozóan az $\widehat{L^1}$ elemei valamennyien folytonosak). [13]

A következő állítások igazak:

5.6.2. Tétel. *Tekintsük a fenti $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt Abel-csoportot. Ekkor*:

1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}, \diamond)$ szintén *lokálisan kompakt Abel-csoport*;
2) *ha az $(X, \mathcal{T})$ diszkrét topologikus tér,* [14] *akkor a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ tér kompakt*;
3) *ha az $(X, \mathcal{T})$ kompakt, akkor a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ diszkrét topologikus tér*;
4) *az $\widehat{L^1}$ halmaz a $\|.\|_\infty$ norma értelmében mindenütt sűrű a $\mathcal{C}_1(\mathbf{\Gamma})$ térben*;
5) $\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h} \quad (f, h \in L^1(\mu))$;
6) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad (f \in L^1(\mu))$;
7) $f * \gamma = \hat{f}(\overline{\gamma}) \cdot \gamma \quad (f \in L^1(\mu),\ \gamma \in \mathbf{\Gamma})$;
8) *tetszőleges $\nu \in \mathbf{M}(X)$ esetén a $\widehat{\nu}$ korlátos és egyenletesen folytonos*;
9) $\widehat{\nu * \sigma} = \widehat{\nu} \cdot \widehat{\sigma} \quad (\nu,\ \sigma \in \mathbf{M}(X))$;
10) *minden $f \in L^1(\mu)$ és $\chi \in \Gamma$ esetén $\widehat{\chi \cdot f}(\gamma) = \hat{f}(\chi \diamond \gamma) \quad (\gamma \in \Gamma)$, tehát az $\widehat{L^1}$ zárt a karakterrel való szorzásra vonatkozóan*;
11) *ha $f \in L^1(\mu)$ és $\tau_t f(x) := f(x \bullet t) \quad (t, x \in X)$, akkor $\widehat{\tau_t f}(\gamma) = \widehat{cf}(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma,\ c := \overline{\gamma(t)})$, más szóval az $\widehat{L^1}$ zárt az eltolásra (transzlációra) nézve*;
12) *legyen $f \in L^1(\mu)$ és $F(x) := \overline{f(x^{-1})} \quad (x \in X)$, akkor $\hat{F} = \overline{\hat{f}}$, így az $\widehat{L^1}$ zárt a komplex konjugálást illetően.*

[13] Az $(Y, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologikus terek esetén azt mondjuk, hogy a $\mathcal{T}_1$ topológia *gyengébb,* mint a $\mathcal{T}_2$, ha $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Ha tehát a $\mathcal{T}$ olyan topológia az $\mathbf{\Gamma}$-ban, hogy erre vonatkozóan minden $\widehat{L^1}$-beli függvény folytonos, akkor $\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathcal{T}$. Tehát (ld. 4.1.) a $\mathcal{D}$ halmazrendszer topologikus bázisa a $\mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}$ topológiának. Általában is: ha valamilyen $Y \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}^Y$ függvényosztály, akkor a $\mathcal{D}$ fenti definíciójában az $\widehat{L^1}$ helyett az $\mathcal{F}$-et írva a leggyengébb olyan $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(Y)$ topológiához jutunk, amelyre nézve az $\mathcal{F}$ minden eleme folytonos.

[14] Azt mondjuk, hogy az $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologikus tér *diszkrét,* ha $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(Y)$. Ekkor tehát minden $A \subset Y$ halmaz „nyílt".

Megjegyezzük, hogy a fenti 4) állítás az 5.4.2.9. Tétel általánosítása. Hasonlóan, az 5), 6), 8), 9), 12)-ben mondottakat speciális esetben láttuk az 5.4.1.2., 5.4.2.4. Lemmákban. A 7) egyenlőséget illetően emlékeztetünk az 5.1. pontra (ld. 5.1.2. Definíció), miszerint a 7)-beli szereplőkkel (ld. 5.3.1. Definíció)

$$f * \gamma(x) = \int \gamma(x \bullet y^{-1}) \cdot f(y)\, d\mu(y) = \gamma(x) \cdot \int \gamma(y^{-1}) \cdot f(y)\, d\mu(y) =$$

$$\gamma(x) \cdot \int \overline{\gamma(y)} \cdot f(y)\, d\mu(y) = \gamma(x) \cdot \hat{f}(\overline{\gamma}) \qquad (x \in X).$$

Speciálisan $f * \overline{\gamma}(\theta) = \hat{f}(\gamma)$ (ahol θ-val jelöltük a $\wp$ csoportművelet neutrális elemét, amikor is $x \bullet \theta = \theta \bullet x = x \ \ (x \in X)$).

A 10)-beli egyenlőség is meglehetősen nyilvánvaló: az ottani jelölésekkel ui.

$$\widehat{\chi \cdot f}(\gamma) = \int f(x) \cdot \chi(x) \cdot \gamma(t)\, d\mu(t) = \int f(x) \cdot (\chi \diamond \gamma)(t)\, d\mu(t) = \hat{f}(\chi \diamond \gamma).$$

Hasonlóan, legyen $f \in L^1(\mu)$ és $t \in X$, akkor

$$\widehat{\tau_t f}(\gamma) = \int f(x \bullet t) \cdot \gamma(x)\, d\mu(x) = \int f(x) \cdot \gamma(x \bullet t^{-1})\, d\mu(x) =$$

$$\gamma(t^{-1}) \cdot \int f(x) \cdot \gamma(x)\, d\mu(x) = \overline{\gamma(t)} \cdot \hat{f}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

ami a 11) állítás.

Emlékeztetünk arra, hogy az $L^1(\mu)$ tér az $\|.\|_1$ normára és a $*$ konvolúcióra nézve Banach-algebra. Ha az $(X, \mathcal{T})$ tér diszkrét, akkor feltehető, hogy $\mu(\{x\}) = 1 \quad (x \in X)$. Ezért könnyen beláthatóan az

$$e(x) := \begin{cases} 1 & (x = \theta) \\ 0 & (\theta \neq x \in X) \end{cases}$$

függvény az előbb említett Banach-algebrának egységeleme (ld. 3.4. iv) megjegyzés):

$$f * e(x) = \int f(t) e(x \bullet t^{-1})\, d\mu(t) = \sum_{t \in X} f(t) e(x \bullet t^{-1}) = f(x) \qquad (f \in L^1(\mu),\ x \in X).$$

Így (ld. 7))

$$\hat{e}(\gamma) = e * \overline{\gamma}(\theta) = \overline{\gamma}(\theta) = 1 \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Innen és (ld. 4)) az $\hat{e} \in \mathcal{C}_1(\Gamma)$ tartalmazás miatt - figyelembe véve a „végtelenben eltűnő" folytonos $\Gamma \to \mathbf{C}$ függvények $\mathcal{C}_1(\Gamma)$ halmazának az értelmezését (ld. 4.1.) - a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ tér kompaktsága (azaz 2)) már következik.

A 3) állítással kapcsolatban az 5.3.2. Lemmára utalva tudjuk, hogy a Γ elemei ortogonális rendszert alkotnak: tetszőleges φ, $\psi \in \mathbf{\Gamma}$ függvényekre

$$\int \varphi \cdot \overline{\psi}\, d\mu = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ \\ \|\mu\| & (\varphi = \psi). \end{cases}$$

Itt nyilván feltehető, hogy a μ Haar-mérték normált, azaz $\|\mu\| = \mu(X) = 1$. Mivel az $f = \omega \equiv 1$ függvény az X kompaktsága miatt $L^1(\mu)$-beli, ezért

$$\hat{f}(\gamma) = \int \omega \cdot \gamma\, d\mu = \begin{cases} 1 & (\gamma = \omega) \\ \\ 0 & (\omega \neq \gamma \in \Gamma). \end{cases}$$

Az $\hat{f}$ függvény azonban folytonos, így az $A := \{z \in \mathbf{C} : |z - 1| < 1/2\}$ (a $\mathbf{C}$-ben nyílt) halmazt véve a fentiek szerint szükségszerűen $\{\omega\} = (\hat{f})^{-1}[A] \in \mathcal{T}_\Gamma$. Következésképpen (ld. 4.3.) $\{\gamma\} = \gamma \diamond \{\omega\} \in \mathcal{T}_\Gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$, azaz a $\mathcal{T}_\Gamma$ topológia diszkrét.

Legyen az $\mathcal{N}$ az olyan $f : X \to \mathbf{C}$ függvényeknek az osztálya, amelyek egy alkalmas $m \in \mathbf{M}(\Gamma)$ korlátos Borel-mérték segítségével a következőképpen állíthatók elő:

$$f(x) = \int \gamma(x)\, dm(\gamma) \qquad (x \in X).$$

(Tehát minden rögzített $x \in X$ esetén a $\mathbf{\Gamma} \ni \gamma \mapsto \gamma(x)$ leképezés (m-szerinti) integráljáról van szó.) Az $\mathcal{N}$ halmaz elemeire bebizonyítható az alábbi állítás:

5.6.3. Tétel. *Megadható olyan m Haar-mérték a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}, \diamond)$ karaktercsoporton, hogy tetszőleges $f \in L^1(\mu) \cap \mathcal{N}$ függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltja $L^1(m)$-ben van, és igaz a következő inverziós formula*:

$$f(x) = \int \hat{f}(\overline{\gamma}) \cdot \gamma(x)\, dm(\gamma) \qquad (x \in X).$$

Ha az előző tételben pl. $X := \mathbf{R}$ (a „szokásos" topológiával), akkor (ld. 5.3.3. Példa) $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{R}$, és alkalmas $\alpha > 0, \beta > 0$ számokkal (ld. 4.3.3.)

$$\mu = \alpha \cdot \lambda,\ m = \beta \cdot \lambda$$

(emlékeztetőül: λ jelöli az $\mathbf{R}$-en a Lebesgue-mértéket (ld. 2.7.1.)). Ha

$$f(t) := e^{-|t|} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor $f \in L^1(\lambda) \cap \mathcal{N}$ és

$$\hat{f}(\gamma) = \int e^{-|t|} \cdot e^{\imath \gamma t}\, dt = \alpha \cdot \int e^{-|t|} \cdot e^{\imath \gamma t}\, dt = \frac{2\alpha}{1 + \gamma^2} \qquad (\gamma \in \mathbf{R}).$$

Tehát (ld. 5.6.3. Tétel)

$$e^{-|x|} = \int \frac{2\alpha}{1+\gamma^2} \cdot e^{-\imath\gamma x}\, d\gamma = 2\alpha\beta \cdot \int \frac{e^{-\imath\gamma x}}{1+\gamma^2}\, d\gamma \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így az $x := 0$ választással

$$1 = 2\alpha\beta \cdot \int \frac{1}{1+\gamma^2}\, d\gamma = 2\pi\alpha\beta.$$

Rögzítsük a μ Haar-mértéket (azaz az α-t), akkor az 5.6.3. Tételben szereplő m Haar-mérték a következő:

$$\frac{1}{2\pi\alpha} \cdot \lambda.$$

Például $\alpha := 1$, $\beta := 1/2\pi$, vagy $\alpha := \beta := (2\pi)^{-1/2}$ (ld. 5.5. xviii), xix) megjegyzések).

Legyen a szóban forgó $(X, \mathcal{T})$ tér kompakt és $\mu(X) = 1$, akkor az $f(x) := 1$ $(x \in X)$ függvényre $f \in L^1(\mu) \cap \mathcal{N}$ teljesül. Valóban, egyrészt az $f \in L^1(\mu)$ reláció triviálisan igaz, másrészt az $\mathcal{N}$-et definiáló egyenlőség is fennáll, ha abban az m helyébe a $\gamma_0 \equiv 1$ ($\mathbf{\Gamma}$-beli) pontban koncentrált Dirac-mértéket írjuk (ld. 3.4. v), 3.12. vii) megjegyzések):

$$m(\mathcal{U}) := \begin{cases} 1 & (\gamma_0 \in \mathcal{U}) \\ 0 & (\gamma_0 \notin \mathcal{U}) \end{cases} \qquad (\mathcal{U} \in \mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})).$$

Viszont (ld. 5.3.2. Lemma)

$$\hat{f}(\gamma_0) = 1,\ \hat{f}(\overline{\gamma}) = \int \gamma_0 \cdot \overline{\gamma}\, d\mu = 0 \qquad (\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\}).$$

Ha tehát most az m az 5.6.3. Tételbeli inverziós formulában szereplő Haar-mértéket jelöli, akkor – figyelembe véve, hogy az 5.6.2. Tétel szerint a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}})$ tér diszkrét –

$$1 = f(\theta) = \int \hat{f}(\overline{\gamma})\, dm(\gamma) = m(\{\gamma_0\})$$

adódik. (Itt θ az X-beli csoportműveletre vonatkozó neutrális („nulla") elem.) Mivel az m eltolásinvariáns, így innen $m(\{\gamma\}) = 1$ $(\gamma \in \mathbf{\Gamma})$ következik.

Ezért pl. a most vizsgált, az $X := [0, 2\pi)$-nek megfelelő 5.3.4. Példában $\mu = (2\pi)^{-1} \cdot \lambda$, a $\mathbf{\Gamma}$ karaktercsoport azonosítható a $\mathbf{Z}$-vel, valamint

$$\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int f(x) \cdot e^{-\imath kx}\, dx \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az $f \in L^1[0, 2\pi)$ függvény jól ismert (k-adik) Fourier-együtthatója. Az 5.6.3. Tételbeli inverziós formula pedig (az előbbiek szerinti $m(\{k\}) = 1$ $(k \in \mathbf{Z})$ egyenlőségre tekintettel) nem más (ld. 3.4. iv) megjegyzés), mint az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(-k) \cdot e^{\imath kx} \qquad (x \in [0, 2\pi))$$

egyenlőség, az f függvény klasszikus (trigonometrikus) Fourier-sorfejtése.

Ha az 5.3.5. Példabeli diszkrét teret tekintjük (az ottani jelölésekkel), akkor a diszkrét (trigonometrikus) Fourier-sorfejtést kapjuk: az $f : X \to \mathbf{R}$ függvény esetén az

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{2k\pi j\imath/n} \qquad (k \in X)$$

diszkrét Fourier-együtthatókkal

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) e^{-2x\pi k\imath/n} \qquad (x \in X).$$

Végül (az ebben a pontban használt jelöléseket megtartva), ejtsünk néhány szót absztrakt környezetben is arról a speciális esetben már vizsgált problémáról (ld. 5.4.3.), hogy hogyan lehet a Fourier-transzformáció fogalmát az $L^1(\mu)$ térről pl. az $L^2(\mu)$ térre kiterjeszteni? Ti. – lévén általában is az $L^2(\mu)$ nem részhalmaza az $L^1(\mu)$-nek – az 5.6.1. Definíció „nem megy" az $L^2(\mu)$ függvényosztályon. Igaz viszont az alábbi

5.6.4. Tétel (Plancherel). *Létezik olyan mindenütt sűrű $L_0^2(m)$ altér az $L^2(m)$-ben* (ld. 5.3.6.3. Tétel), *hogy az*

$$L^1(\mu) \cap L^2(\mu) \ni f \mapsto \hat{f} \in L_0^2(m)$$

leképezés izometria (a $\|.\|_2$ norma értelmében). Ez a leképezés egyértelműen terjeszthető ki egy

$$L^2(\mu) \to L^2(m)$$

izometriává.

Amennyiben az $(X, \mathcal{T})$ tér kompakt, akkor $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$, és az előbbi Plancherel-tétel az ortogonális sorok elméletéből jól ismert Riesz-Fischer-tételt jelenti (ld. 5.5. xxii) megjegyzés).

5.7. Megjegyzések

i) Tekintsük az $(X, \mathcal{T}, \wp)$ lokálisan kompakt Abel-csoportot, legyen

$$x \bullet y := \wp(x, y) \qquad (x, y \in X),$$

$\mathbf{\Gamma}$ pedig a duális csoport. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to \mathbf{C}$ függvény *pozitív definit*, ha tetszőleges X-beli $x_1, ..., x_n$ elemek és $\alpha_1, ..., \alpha_n$ $(n \in \mathbf{N})$ komplex számok esetén

$$\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \cdot \overline{\alpha_j} \cdot f(x_k \bullet x_j^{-1}) \geq 0.$$

Így pl. pozitív definit minden karakter (ld. 5.3.). Bármelyik pozitív definit f függvényre egyszerű számolással igazolhatók az alábbiak: θ-val jelölve a csoport nullelemét

a) $f(x^{-1}) = \overline{f(x)} \quad (x \in X)$;
b) $|f(x)| \leq f(\theta) \quad (x \in X)$;
c) $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(\theta) \cdot \mathrm{Re}\,(f(\theta) - f(x \bullet y^{-1})) \quad (x, y \in X)$.

Innen már rögtön adódik az, hogy a szóban forgó f esetén

d) $f(\theta) \geq 0$;
e) az f korlátos;
f) $f \in C(\theta) \Longrightarrow f$ egyenletesen folytonos.

A most mondottakhoz képest lényegesen „fajsúlyosabb" a már korábban is (speciális környezetben (ld. 5.4.1.)) említett Bochner-tétel: egy folytonos $f : X \to \mathbf{C}$ függvény akkor és csak akkor pozitív definit, ha $f \in \mathcal{N}$, azaz (ld. 5.6.3. Tétel) egy alkalmas $m \in \mathbf{M}(\Gamma)$ korlátos Borel-mérték segítségével a következőképpen állítható elő:

$$f(x) = \int \gamma(x)\, dm(\gamma) \qquad (x \in X).$$

ii) Az előbbi megjegyzésbeli szereplőkkel azt mondhatjuk, hogy a $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{T}_{\mathbf{\Gamma}}, \diamond)$ karaktercsoport (ld. 5.6.) is egy lokálisan kompakt topologikus Abel-csoport. Ezért képezhető ennek is a karaktercsoportja, az X ún. *második duálisa*. Pl. tetszőleges $x \in X$ esetén a

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \kappa_x(\gamma) := \gamma(x)$$

hozzárendelés egy ilyen második duálisbeli elem. Az 5.3.1. Definícióból (azt most (ld. 5.6.) a $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma, \diamond)$ (duális) csoportra alkalmazva) a

$$|\kappa_x(\gamma)| = |\gamma(x)| = 1 \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

egyenlőség, valamint a

$$\kappa_x(\gamma \diamond \varepsilon) = (\gamma \diamond \varepsilon)(x) = \gamma(x) \cdot \varepsilon(x) = \kappa_x(\gamma) \cdot \kappa_x(\varepsilon) \qquad (\gamma,\, \varepsilon \in \Gamma)$$

multiplikativitás nyilvánvaló. Megmutatható, hogy a

$$\kappa_x : \Gamma \to \mathbf{C}$$

függvény folytonos is (következésképpen valóban a duális csoport egy karaktere), ami nyilván következik az

$$X \times \Gamma \ni (x, \gamma) \mapsto \gamma(x) \in \mathbf{C}$$

(„kétváltozós") leképezés folytonosságából.[15]

Az absztrakt harmonikus analízis egyik alaptétele a Pontrjagin-féle dualitási tétel, nevezetesen: *az X izomorf a második duálisával.* Speciálisan az

$$X \ni x \mapsto \kappa_x$$

megfeleltetés egy ilyen izomorfizmus. Megjegyezzük, hogy az utóbbira vonatkozó követelményekből a „művelettartás" közvetlenül adódik az értelmezésből (ld. 5.3.1. Definíció):

$$\kappa_{x\bullet y}(\gamma) = \gamma(x \bullet y) = \gamma(x)\cdot\gamma(y) = \kappa_x(\gamma)\cdot\kappa_y(\gamma) \qquad (x, y \in X,\ \gamma \in \Gamma),$$

azaz $\kappa_{x\bullet y} = \kappa_x \cdot \kappa_y$.

A Pontrjagin-tétel illusztrálásaként utalunk az 5.3.3., 5.3.5. Példákra, továbbá az 5.3.4., 5.3.6. Példákra, amikor is kiderült, hogy az illető csoportok egyúttal önmaguk második duálisai.

iii) Lokálisan kompakt $(X, \mathcal{T}, \wp)$ Abel-csoport esetén is igaz marad az 5.4.2.10. Tétel megfelelője: az $\mathbf{M}(X)$-beli Borel-mértékekre vagy (a szóban forgó csoport μ Haar-mértékére vonatkozó) $L^1(\mu)$-beli függvényekre értelmezett Fourier-transzformáció (ld. 5.6.1. Definíció) injektív, azaz

a) $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbf{M}(X),\ \mu_1 \neq \mu_2 \implies \widehat{\mu}_1 \neq \widehat{\mu}_2$;

b) $f,\ g \in L^1(\mu),\ f \neq g \implies \hat{f} \neq \hat{g}$.

[15] Az $X \times \Gamma$ Descartes-szorzaton az X-beli $\mathcal{T}$ topológia és a Γ-beli $\mathcal{T}_\Gamma$ topológia által meghatározott $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_\Gamma$ szorzattopológiát (ld. 4.2. xxiii) megjegyzés) vezetve be. Maga az említett folytonosság pl. a következőképpen látható be. Az 5.6.2. Tételbeli 7) állításra tekintettel ehhez elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $f \in L^1(\mu)$ mellett az $(X, \Gamma) \ni (x, \gamma) \mapsto \widehat{\tau_x f}(\gamma)$ leképezés folytonos. Ha $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$ és $\delta > 0$, akkor az $X \ni t \mapsto \tau_t f \in L^1(\mu)$ függvénynek az $\|.\|_1$ norma szerinti folytonosságából (ld. 4.3.3.22. Tétel), továbbá a $\widehat{\tau_x f}$ transzformált folytonosságából kifolyólag alkalmasan megválasztott $K(x)$, $K(\gamma)$ környezetekkel $\|\tau_t f - \tau_x f\|_1 < \delta$ $(t \in K(x))$, valamint $|\widehat{\tau_x f}(\varepsilon) - \widehat{\tau_x f}(\gamma)| < \delta$ $(\varepsilon \in K(\gamma))$. Ugyanakkor (ld. 5.6.2. Tétel) $|\widehat{\tau_t f}(\varepsilon) - \widehat{\tau_x f}(\varepsilon)| \leq \|\tau_t f - \tau_x f\|_1$, így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|\widehat{\tau_t f}(\varepsilon) - \widehat{\tau_x f}(\gamma)| \leq |\widehat{\tau_t f}(\varepsilon) - \widehat{\tau_x f}(\varepsilon)| + |\widehat{\tau_x f}(\varepsilon) - \widehat{\tau_x f}(\gamma)| < 2\delta \qquad (t \in K(x),\ \varepsilon \in K(\gamma))$$

már következik.

Arcképcsarnok

A jegyzetben az alábbi matematikusok név szerint is említésre kerültek:

- Cesare **Arzelà**
  (St. Stef. di Magra, 1847. III. 6. - St. Stef. di Magra, 1912. III. 15.)
- René-Louis **Baire**
  (Párizs, 1874. I. 21. - Chambéry, 1932. VII. 5.)
- Stefan **Banach**
  (Krakkó, 1892. III. 30. - Lvov, 1945. VIII. 31.)
- William E. **Beckner**
  (Kirksville (Missouri), 1941. IX. 15. -)
- Wilhelm Johann Eugen **Blaschke**
  (Graz, 1885. IX. 13. - Hamburg, 1962. III. 17.)
- Salomon **Bochner**
  (Podgorze, 1899. VIII. 20. - Houston, 1982. V.2.)
- Félix Edouard Justin Émile **Borel**
  (Aveyron, 1871. I. 7. - Párizs, 1956. II. 3.)
- Viktor Jakovlevics **Bunyakovszkij**
  (Bar, 1804. XII. 16. - Szentpétervár, 1889. XII. 12.)
- Francesco Paolo **Cantelli**
  (Palermó, 1875. XII. 20. - Róma, 1966. VII. 21.)
- Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor**
  (Szentpétervár, 1845. III. 3. - Halle, 1918. I. 6.)
- Constantin **Carathèodory**
  (Berlin, 1873. IX. 13. - München, 1950. II. 2.)

- Augustin Louis **Cauchy**
  (Párizs, 1789. VIII. 21. - Sceaux, 1857. V. 23.)
- Pafnutyij Lvovics **Csebisev**
  (Okatovo, 1821. V. 16. - Szentpétervár, 1894. XII. 8.)
- Percy John **Daniell**
  (Valparaiso, 1889. I. 9. - Sheffield, 1946. V. 25.)
- Jean Gaston **Darboux**
  (Nimes, 1842. VIII. 14. - Párizs, 1917. II. 23.)
- Jean Alexandre Eugene **Dieudonné**
  (Lille, 1906. VII. 1. - Párizs, 1992. XI. 29.)
- Ulisse **Dini**
  (Písa, 1845. XI. 14. - Písa, 1918. X. 28.)
- Paul Adrien Maurice **Dirac**
  (Bristol, 8 August 1902. VIII. 8. - Tallahassee, 1984. X. 20.)
- Eugene Borisovich **Dynkin**
  (Leningrád (Szentpétervár), 1924. V. 11. - New York, 2014. XI. 14.)
- Leonhard **Euler**
  (Bázel, 1707. IV. 15. - Szentpétervár, 1783. IX. 18.)
- Pierre Joseph Louis **Fatou**
  (Lorient, 1878. II. 28. - Pornichet, 1929. VIII. 10.)
- **Fejér** Lipót
  (Pécs, 1880. II. 9. - Budapest, 1959. X. 15.)
- Ernst Sigismund **Fischer**
  (Bécs, 1875. VII. 12. - Cologne, 1954. XI. 14.)
- Jean Baptiste Joseph **Fourier**
  (Auxerre, 1768. III. 21. - Párizs, 1830. V. 16.)

- Guido **Fubini**
  (Venice, 1879. I. 19. - New York, 1943. VI. 6.)
- **Gábor Dénes**
  (Budapest, 1900. VI. 5. - London, 1979. II. 19.)
- **Haar** Alfréd
  (Budapest, 1885. X. 11. - Szeged, 1933. III. 16.)
- Hans **Hahn**
  (Bécs, 1879. IX. 27. - Bécs, 1934. VII. 24.)
- Felix **Hausdorff**
  (Breslau (Wrocław), 1868. IX. 8. - Bonn, 1942. I. 26.)
- Werner Karl **Heisenberg**
  (Würzburg, 1901. XII. 5. - München, 1976. II. 1.)
- Charles **Hermite**
  (Dieuze, 1822. XII. 24. - Párizs, 14 January 1901. I. 14.)
- David **Hilbert**
  (Königsberg, 1862. I. 23. - Göttingen, 1943. II. 14.)
- Ludwig Otto **Hölder**
  (Stuttgart, 1859. XII. 22. - Leipzig, 1937. VIII. 29.)
- Dmitrij Fjodorovics **Jegorov**
  (Moszkva, 1869. XII. 22. - 1931. IX. 10.)
- Marie Ennemond Camille **Jordan**
  (Lyon, 1838. I. 5. - Párizs, 1922. I. 22.)
- Andrej Nyikolajevics **Kolmogorov**
  (Tambov, 1903. IV. 25. - Moszkva, 1987. X. 20.)
- Leopold **Kronecker**
  (Liegnitz (Legnica), 1823. XII. 7. - Berlin, 1891. XII. 29.)

- Henri Léon **Lebesgue**
  (Beauvais, 1875. VI. 28. - Párizs, 1941. VII. 26.)
- Adrien-Marie **Legendre**
  (Párizs, 1752. IX. 18 - Párizs, 1833. I. 10.)
- Beppo **Levi**
  (Torinó, 1875. V. 14. - Rosario, 1961. VIII. 18.)
- Hendrik Antoon **Lorentz**
  (Arnhem, 1853. VII. 18. - Haarlem, 1928. II. 4.)
- Nyikolaj Nyikolajevics **Luzin**
  (Irkutszk, 1883. XII. 9. - Moszkva, 1950. II. 25.)
- Andrej Andrejevics **Markov**
  (Rjazan, 1856. VI. 14. - Szentpétervár, 1922. VII. 20.)
- Hermann **Minkowski**
  (Alexotas (Kaunas), 1864. VI. 22. - Göttingen, 1909. I. 12.)
- August Ferdinand **Möbius**
  (Schulpforta, 1790. XI. 17. - Lipcse, 1868. XII. 26.)
- Otton Marcin **Nikodym**
  (Zablotow, 1887. VIII. 13. - Utica, 1974. V. 4.)
- Raymond Edward Alan Christopher **Paley**
  (Bournemouth, 1907. I. 7. - Banff, 1933. IV. 7.)
- Wolfgang Ernst **Pauli**
  (Bécs, 1900. IV. 25. - Zürich, 1958. XII. 15.)
- Marc-Antoine **Parseval** des Chênes
  (Rosieres-aux-Salines, 1755. IV. 27. - Párizs, 1836. VIII. 16.)
- Michel **Plancherel**
  (Bussy, 1885. I. 16. - Zürich, 1967. III. 4.)

- Lev Semenovics **Pontrjagin**
  (Moszkva, 1908. IX. 3. - Moszkva, 1988. V. 3.)
- Hans **Rademacher**
  (Wandsbeck, 1892. IV. 3. - Haverford, 1969. II. 7.)
- Johann **Radon**
  (Bohemia (Decin), 1887. XII. 16. - Bécs, 1956. V. 25.)
- Georg Friedrich Bernhard **Riemann**
  (Breselenz, 1826. IX. 17. - Selasca, 1866. VII. 20.)
- **Riesz** Frigyes
  (Győr, 1880. I. 22. - Budapest, 1956. II. 28.)
- Benjamin Olinde **Rodrigues**
  (Bordeaux, 1795. X. 6. - Párizs, 1851. XII. 17.)
- Laurent Moise **Schwartz**
  (Párizs, 1915. III. 5. - Párizs, 2002. VII. 4.)
- Thomas Jan **Stieltjes**
  (Zwolle, Overijssel, 1856. XII. 29. - Toulouse, 1894. XII. 31.)
- James **Stirling**
  (Garden, 1692. IV. 22. - Edinburgh, 1770. XII. 5.)
- Marshall Harvey **Stone**
  (New York, 1903. IV. 8. - Madras, 1989. I. 9.)
- Heinrich Franz Friedrich **Tietze**
  (Schleinz, 1880. VIII. 31. - München, 1964. II. 17.)
- Leonida **Tonelli**
  (Gallipoli, 1885. IV. 19. - Píza, 1946. III. 12.)
- Andrej Nyikolajevics **Tyihonov**
  (Gzhatska, 1906. X. 30. - Moszkva, 1993. X. 7.)

- Pavel Samujlovics **Urysohn**
  (Odessa, 1898. II. 3. - Batz-sur-Mer, 1924. VIII. 17.)
- Naum Jakovlevics **Vilenkin**
  (Moszkva, 1920. X. 30. - Moszkva, 1991.)
- Giuseppe **Vitali**
  (Ravenna, 1875. VIII. 26. - Bologna, 1932. II. 29.)
- Joseph Leonard **Walsh**
  (Washington, 1895. IX. 21. - College Park, 1973. XII. 6.)
- Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass**
  (Ostenfelde, 1815. X. 31. - Berlin, 1897. II. 19.)
- Hermann Klaus Hugo **Weyl**
  (Elmshorn, 1885. IX. 9. - Zürich, 1955. XII. 9.)
- William Henry **Young**
  (London, 1863. X. 20. - Lausanne, 1942. VII. 7.)

Cesare Arzela

1847-1912

Rene-Louis Baire

1874-1932

Stefan Banach

1892-1945

William Beckner

1941-

Wilhelm Blaschke

1885-1962

Salomon Bochner

1899-1982

Felix Borel

1871-1956

Viktor Bunyakovszkij

1804-1889

Francesco Cantelli

1875-1966

Georg Cantor

1845-1918

Constantin Carathéodory

1873-1950

Augustin Cauchy

1789-1857

Pafnutyij Csebisev

1821-1894

Percy Daniell

1889-1946

Jean Darboux

1842-1917

Jean Dieudonné

1906-1992

Ulisse Dini

1845-1918

Paul Dirac

1902-1984

Eugene Dynkin

1924-2014

Leonhard Euler

1707-1783

Pierre Fatou

1878-1929

Fejér Lipót

1880-1959

Ernst Fischer

1875-1954

Jean Fourier

1768-1830

Guido Fubini

1879-1943

Gábor Dénes

1900-1979

Haar Alfréd

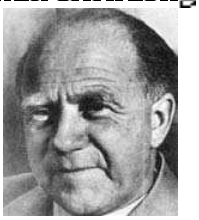
1885-1933

Hans Hahn

1879-1934

Felix Hausdorff

1868-1942

Werner Heisenberg

1901-1976

Charles Hermite

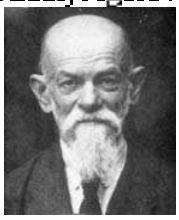
1822-1901

David Hilbert

1862-1943

Ludwig Hölder

1859-1937

Dmitrij Jegorov

1869-1931

Camille Jordan

1838-1922

Andrej Kolmogorov

1903-1987

Leopold Kronecker

1823-1891

Henri Lebesgue

1875-1941

Adrien Legendre

1752-1833

Beppo Levi

1875-1961

Hendrik Lorentz

1853-1928

Nyikolaj Luzin

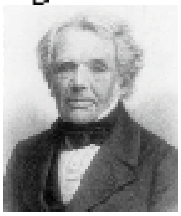
1883 -1950

Andrej Markov

1856-1922

Hermann Minkowski

1864-1909

August Möbius

1790-1868

Otton Nikodym

1887-1974

Raymond Paley

1907-1933

Wolfgang Pauli

1900-1958

Michel Plancherel

1885-1967

Lev Pontrjagin

1908-1988

Hans Rademacher

1892-1969

Johann Radon

1887-1956

Georg Riemann

1826-1866

Riesz Frigyes

1880-1956

Benjamin Rodrigues

1795 -1851

Laurent Schwartz

1915-2002

Hugo Steinhaus

1887 - 1972

Thomas Stieltjes

1856-1894

Marshall Stone

1903-1989

Heinrich Tietze

1880-1964

Leonida Tonelli

1885-1946

Andrei Tyihonov

1906-1993

Pavel Urysohn

1898-1924

Giuseppe Vitali

1875-1932

Joseph Walsh

1895-1973

Karl Weierstrass

1815-1897

Hermann Weyl

1885-1955

William H. Young

1863-1942

Tárgymutató

absztrakt integrál, 378
affin csoport, 490
algebra, 61
    -szigma, 56
alsó összeg, 10
Arzelà-tétel, 23

Babenko-Beckner-konstans, 561
Baire
    -halmaz, 362
    -mérték
        -reguláris, 391
Banach-Steinhaus-tétel, 568
belső pont, 339
Beppo Levi-tétel, 169
Blaschke
    -csoport, 495
    -függvény, 493
Bochner-tétel, 520, 581
Borel
    -Cantelli-lemma, 99
    -halmaz, 101, 362
    -mérték
        -reguláris, 391

Cantor-halmaz, 126
Carathèodory-tétel, 88
Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, 217
Chrestenson-rendszer, 517
Csebisev-egyenlőtlenség, 219

Daniell-Stone-tétel, 380
Darboux
    -alsó integrál, 11
    -felső integrál, 11
diadikus csoport, 493
Dieudonné-tétel, 348
Dini-tétel, 24, 368
diszkrét ciklikus csoport, 492
disztribúció, 559
    -Dirac, 559
    -reguláris, 559
duális csoport, 507
    -második, 581
duális tér, 310
Dynkin-rendszer, 95

1-pont kompaktifikáció, 352
egységosztás, 348
előjeles mérték, 146
    -Jordan-felbontása, 151
    -negatív variációja, 151
    -pozitív variációja, 151
    -szigma-véges, 146
    -totális variációja, 151
    -véges, 146
előmérték, 66
    -kiterjesztése, 70
elemi halmazok, 72
eloszlásfüggvény, 233
esemény, 100

érintkezési pont, 339

függvény
    -Lebesgue-integrálható, 31, 38, 213
    -Lebesgue-integrálja, 213
    -Riemann-integrálható, 11

-abszolút folytonos, 303
-balról egyenletesen folytonos, 424
-eltoltja, 424
-folytonos, 344, 374
-integrálható, 176, 507
-jobbról egyenletesen folytonos, 424
-kompakt tartójú, 353
-korlátos változású, 49
-lényeges felső korlátja, 195
-mérhető, 31, 102, 154, 507
-monoton átrendezése, 236
-moduláris, 448
-negatív része, 40, 176
-periodizáltja, 565
-pozitív definit, 580
-pozitív része, 40, 175
-rektifikálható, 53
-ívhossza, 53
-súlyfüggvény, 278
-tartója, 353
-végtelenben eltűnő, 354
függvénysorozat
-egyenletesen konvergens, 21
-egyenletesen korlátos, 22
-határfüggvénye, 20, 21
-pontonként konvergens, 20, 21
félgyűrű, 58
Fatou-lemma, 173
Fejér-mag, 553
felosztás, 10
felső összeg, 10
feltételes várható érték, 299, 302
-operátor, 302
folytonos magú integráloperátor, 571
Fourier
-transzformált
-disztribúcióé, 560
-függvényé, 521, 534
-mértéké, 517, 575
-rövid idejű (ablakos), 565
Fubini-tétel, 332, 464
funkcionál
-bal invariáns, 440
-inverz invariáns, 495
-jobb invariáns, 444
-lineáris, 359
-korlátos, 483
-monoton, 360
-monoton folytonos, 473
-pozitív, 359

Gábor-transzformált, 565
gamma-függvény, 113, 129
gyűrű, 57
-delta, 63
-egységelemes, 62
-halmazrendszer által generált, 58
-szigma, 62

Hölder-egyenlőtlenség, 195
háló, 62, 476
Haar
-integrál
-bal invariáns, 440, 442
-jobb invariáns, 444
-mérték
-bal invariáns, 441
-jobb invariáns, 445
-normált, 444
-tükrözés-invariáns, 445, 496
-tétel, 424
Hahn-felbontás, 148
halmaz
- μ^*-mérhető, 87
-$\mathcal{F}$-nyílt, 355
-Borel-mérhető, 101, 153
-Jordan-féle belső mértéke, 110
-Jordan-féle külső mértéke, 110
-Jordan-mérhető, 109
-Jordan-mértéke, 109
-Lebesgue-Stieltjes-mérhető, 108
-Lebesgue-Stieltjes-mértéke, 108

-Lebesgue-mérhető, 104
-Lebesgue-mértéke, 101
-érintkezési pontja, 339
-belseje, 339
-kompakt, 343
-lezárása, 339
-mérhető, 31, 91
-mérhető fedése, 93
-mindenütt sűrű, 339
-nullamértékű, 16, 98, 118
-nyílt, 338
-nyílt lefedése, 342
-teljesen korlátos, 372
-torlódási pontja, 340
-zárt, 339
halmazfüggvény
-additív, 65
-alulról félig folytonos, 79
-felülről félig folytonos, 79
-szigma-additív, 65
-szigma-szubadditív, 79
-szigma-véges, 88
-véges, 65
határfüggvény
-m.m. értelemben, 248
-normában, 247
-μ-véges, 250
-gyenge, 267
-pontonként, 158
-sztohasztikus, 256
határozatlansági reláció, 563
határozott integrál, 12
Hausdorff-Young-egyenlőtlenség, 562
Heisenberg-Pauli-Weyl-egyenlőtlenség, 563
hengerhalmaz, 142
Hermite-függvények, 555
Hilbert-transzformált, 563

integrál, 34, 162, 167, 176, 507
-Daniell, 473
-Lebesgue, 32
-Riemann, 12
-Riemann-Stieltjes, 45
-halmazon, 278
integrál-modulus, 547
integrálható függvény, 176
integráltranszformáció, 335
intervallum, 72
inverzió, 524
inverziós formula, 578

Jegorov-tétel, 159
Jordan
-felbontás, 151
-tétel, 49

környezet, 339
-bázis, 365
-rendszer, 364
közelítő összeg, 13
külső mérték, 87
karakter, 507
karakterisztikus függvény, 38, 136
Kolmogorov-mező, 100
konvergencia
-mértékben, 255
-majdnem mindenütt, 248
-normában, 247
-μ-végesen, 249
-gyengén, 267
-pontonként, 247
-sztohasztikusan, 255
konvolúció
-egyenlőtlenség, 503
-függvény és mérték között, 501
-függvények között, 502
-funkcionálok között, 506
-mértékek között, 499
korlátos lineáris funkcionál, 309
Kronecker-szorzat, 470
kvázimérték, 66
-Lebesgue-féle, 74

-Stieltjes-féle, 76, 82
-kiterjesztése, 83

lépcsősfüggvény, 33, 161
-integrálja, 162
-kanonikus alakja, 162
Lebesgue
-felbontás, 291
-integrál, 38, 213
-integrálható függvény, 38
-kritérium, 17
-mérhető halmaz, 38
-mérték, 38, 104
-tétel, 206, 209
lineáris csoport, 488
lokális nullamértékűség, 318
Lorentz-tér, 276
Luzin-tétel, 392

Möbius-csoport, 488
mérhető
-függvény, 102, 154
-integrálja, 167
-tér, 91
mérték, 66
-Baire, 386
-reguláris, 391
-Borel, 122, 386
-Lebesgue, 101
-korlátos variációjú előjeles, 504
-reguláris, 391
-Dirac, 298
-Haar, 441
-Lebesgue, 31, 104
-Stieltjes, 108, 109
-abszolút folytonos, 281
-egyenlő mértékben, 296
-belső, 125
-előjeles, 146
-abszolút folytonos, 281
-végesen additív, 321
-eltolásinvariáns, 103
-külső, 30, 87
-reguláris, 97
-képe, 103
-momentuma, 538
-nem atomos, 271
-reguláris, 405
-számosság, 78
-szeparábilis, 270
-szinguláris, 291
-szorzat, 141
-tükrözésinvariáns, 104
-teljessé tétele, 95
mértéktér, 91
-felbontható, 321
-szorzat, 141
-teljes, 91
-teljessé tétele, 95
-valószínűségi, 100
majdnem mindenütt, 171
Markov-egyenlőtlenség, 219
metrikus tér
-teljesen korlátos, 372
Minkowski-egyenlőtlenség, 202, 334
moduláció, 550
moduláris függvény, 448

nullamértékű halmaz, 16, 98, 118
nyílt lefedés, 342

ortonormált rendszer, 271
-teljes, 271
oszcillációs összeg, 11
osztásintervallum, 10

p-norma, 194
-gyenge, 268
Parseval-egyenlőség, 535
Plancherel-formula, 535
Poisson-formula, 571
Pontrjagin-dualitási tétel, 582

Rademacher-rendszer, 516
Radon-Nikodym
-derivált, 298
-tétel, 285
regularitás, 124
-belső, 124
-külső, 124
Riemann
-Lebesgue-lemma, 522
-integrál, 12
-integrálható függvény, 11
Riesz
-Fischer-tétel, 557
-tér, 377
-tétel, 256, 321, 411, 415, 477

súlyfüggvény, 278
Schwartz-féle függvényosztály, 541
Stone-Weierstrass-tétel, 459, 527
számosságmérték, 78
szórás, 219
szigma
-algebra, 56
-halmazrendszer által generált, 57
-nyoma, 61
-triviális, 57
-gyűrű, 62
szingularitás, 291
szorzási szabály, 521, 535
szorzatmérték, 141
-tér, 141
sztohasztikus limesz, 256
szubgráf, 188
szukcesszív integrálás, 332

T_1-tér, 340
T_2-tér, 343
θ-szummáció, 569
teljes változás, 52
-függvény, 50
Tietze-tétel, 477
Tonelli-tétel, 330, 468
topológia, 338
-szorzat, 374
topologikus
-bázis, 341
-csoport, 421
-duálisa, 507
-karaktere, 507
-kompakt, 424
-lokálisan kompakt, 424
-normális, 424
-unimoduláris, 448
topologikus tér, 338
-T_2-tér, 343
-Hausdorff-tér, 343
-altere, 338
-kompakt, 343
-lokálisan kompakt, 350
-végtelenben megszámlálható, 358
-metrizálható, 338
-normális, 347
-szeparábilis, 341
-szorzat, 374
torlódási pont, 340
totális variáció, 320
transzláció, 550
Tyihonov-tétel, 375

Urysohn-tétel, 344

várható érték, 219
végtelen távoli pont, 352
valószínűség, 100
valószínűségi
-mértéktér, 100
-változó, 219
-szórása, 219
-várható értéke, 219
vektorháló, 377
-Stone-féle, 377
-normált, 474

Vilenkin
-csoport, 493
-rendszer, 517
Vitali
-lemma, 116
-tétel, 296

Walsh-Paley-rendszer, 516

Young
-egyenlőtlenség, 561
-tétel, 41