

Kalkulus 1

5. feladatsor

2026/27. I. félév

Numerikus sorozatok határértéke I.

1. Tetszőleges α, A, B valós számokból kiindulva, képezzük a következő rekurzív sorozatot:

$$a_1 := \alpha, \quad a_{n+1} := Aa_n + B, \quad (\text{ha } n \geq 1).$$

Adjuk meg az α, A, B és az n számok függvényeként a sorozat n -dik tagját! (Ha $A = 1$, akkor (a_n) számtani, ha $B = 0$, akkor (a_n) mértani sorozat.)

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy az (a_n) sorozat nem konvergens! Mutassuk meg ez alapján, hogy a $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem konvergens!
3. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 - 17n + 2} = -\frac{1}{5}.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{n + 7} = +\infty.$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2 - 3n^3}{n^2 + 3n + 7} = -\infty.$$

4. Tudjuk, hogy az $a_n = \frac{3n-5}{9n+4}$ sorozat határértéke $1/3$. A sorozat hány tagja esik az $(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{3} + \frac{1}{1000})$ intervallumon kívül?
5. Mutassuk meg, hogy az $a_n = \frac{n^2-2}{2n^2-9}$ sorozatnak nem 0 a határértéke.
6. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens sorozat minden tagja pozitív és a határértéke A . Mutassuk meg, hogy
- (a) $A \geq 0$.
- (b) az $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.
7. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

- (a) $a_n = \frac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^3+2}$, $b_n = \frac{3n^5-7 \cdot 10^{23}n^3}{10^{-38}n^6-67n^2+9n}$, $c_n = \frac{-n^7+n^6-3}{n^5-n^2+4}$
- (b) $a_n = \frac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-n+5}$, $b_n = \frac{(2n^3+3)^2}{(3n+6)^6}$
- (c) $a_n = \frac{(n+1)!}{(3-2n)n!}$, $b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$, $c_n = \frac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$
- (d) $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n}$, $b_n = \sqrt[3]{n^3 - 3n + 8} - \sqrt[3]{n^3 + n + 1}$,
 $c_n = \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 3n + 5}}$, $d_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})$, $e_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$
- (e) $a_n = \frac{3^{2n}}{(-3)^{n+10^n}}$, $b_n = \frac{3^{2n}}{3^n + 9^n}$, $c_n = \frac{9^n}{3^n + 2^n}$
- (f) $a_n = \frac{4^{n-1} + n^5 3^{n+2}}{2^{2n+3} + 2^{n-2}}$, $b_n = \frac{n^3 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3n^2}$
- (g) $a_n = \sqrt[n]{3n}$, $b_n = \sqrt[n]{3n}$, $c_n = \sqrt[n]{n}$, $d_n = \sqrt[n]{3n}$
- (h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3}$, $b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+6}{3n^2+2n}}$, $c_n = \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n-5}{n^3+6n^2-n}}$
- (i) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$
- (j) $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$
- (k) $a_n = \left(0.9 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$
- (l) $a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$
- (m) $a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$
- (n) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
- (o) $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4}\right)^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6}-\sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$
- (p) $a_n = n^2(\sqrt{3n^4 + 2n - 1} - \sqrt{3n^4 + n^2 - n})\left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2}$
- (q) $a_n = \left(\frac{(n+3)!}{n!n^3}\right)^{n-1}$
- (r) $a_n = \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2}$

(s) $a_n = n^2 \sin \frac{5}{n^2+1}$

(t) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$.

(u) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + 1/n) = 1$

8. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

(a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

(c) $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})$

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} + 2^n}$

(e) $a_n = \frac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1}(2+1/n)^n}$

9. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ két valós sorozat, melyre $a_n \leq 0 \leq b_n$ minden n -re és legyen $c_n = a_n - b_n$. Mutassuk meg, hogy ha (c_n) egy nullsorozat (azaz egy 0-hoz tartó sorozat), akkor (a_n) és (b_n) is nullsorozat!

10. Határozzuk meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2}) = 1$$

legyen.

11. Legyen $a \geq 0$ és $b \geq 0$ két rögzített valós szám. Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

(a) $(\sqrt[n]{a^n + b^n})$.

(b) $(\sqrt[n]{|a^n - b^n|})$.

Amennyiben konvergensek, mi lesz a határértékük?

12. Legyenek α és β valós számok, melyekre $|\alpha| \neq |\beta|$ és legyen

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n + \beta^n}.$$

Disszkutáljuk, hogy mikor lesz az (a_n) sorozat konvergens illetve divergens!

13. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ nemnegatív valós számok. Számoljuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$$

határértéket!

(*Útmutatás:* Feltehető, hogy $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Adjunk a_1 segítségével becslést a fenti kifejezésre!)