

Kalkulus 1

6. feladatsor

2026/27. I. félév

Numerikus sorozatok határértéke II.

1. Számoljuk ki az alábbi, általános tagokkal adott sorozatok határértékét!

(a)

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + 1} + \frac{n^2}{n^3 + 2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3 + n}.$$

(b)

$$b_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n}.$$

(c)

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

(d)

$$d_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n}}.$$

2. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy adott valós sorozat és

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha (a_n) monoton növekvő, akkor (A_n) is monoton növekvő.
- (b) ha (a_n) monoton csökkenő, akkor (A_n) is monoton csökkenő.

- (c) ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.
 - (d) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$.
 - (e) Mutassunk olyan példát, hogy az (a_n) sorozat divergál, de az (A_n) sorozat konvergens.
3. A fenti módszert **Cesaro-féle átlagolási eljárásnak** is hívják. Alkalmazásként mutassuk meg, hogy ha (a_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

4. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat és

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha (a_n) konvergens, akkor (G_n) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$.
 - (b) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = +\infty$.
5. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat és

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha (a_n) konvergens, akkor (H_n) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$.
 - (b) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$.
6. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy pozitív tagú sorozat. Legyen

$$b_1 := a_1, \quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq 1), \quad \text{és} \quad c_n := \sqrt[n]{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Mutassuk meg, hogy

- (a) ha (b_n) konvergens, akkor (c_n) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
 - (b) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$.
 - (c) Mutassunk olyan (a_n) sorozatot, melyre (c_n) konvergens, de (b_n) divergens.
- (*Útmutatás:* Használjuk az előző feladat eredményét!)

7. Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

8. A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok, ahol

(a)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

(b)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(c)

$$a_n = b_0 + b_1 q + \cdots + b_n q^n,$$

ahol $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ és $(b_i)_{i=0}^\infty$ egy korlátos valós számsorozat.

9. Legyen $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Mutassuk meg, hogy ha $a_n \leq b_n$ majdnem minden n -re és a $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$, akkor a $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

(*Útmutatás:* Használjuk a Cauchy-kritériumot!)

10. Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0$, akkor a $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ahol $d_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

11. A monotonitás illetve a korlátosság vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek-e, ahol

(a)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1/2)^k}{k^2}.$$

(b)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1, 1)^{-k}}{\sqrt{k}}.$$

(c)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 - 2k}{k + 1}.$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, ahol $\alpha < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

13. A fenti feladat alkalmazásaként mit mondhatunk az alábbi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok határértékeiről, ahol

(a)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

(b)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ rögzített.}$$

(c)

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Rekurzív sorozatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekurzív sorozatokat konvergencia szempontjából és adjuk meg a határértéket, amennyiben létezik!

(a) $a_1 = 6, a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}}, \text{ ha } n \geq 2.$

(b) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}, \text{ ha } n \geq 2.$

(c) $a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}, \text{ ha } n \geq 2.$

(d) $a_1 = \sqrt{3}, a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}, \text{ ha } n \geq 2.$

(e) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}, \text{ ha } n \geq 2.$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + \alpha}{2}, \quad (n \geq 2)$$

formulákkal megadott rekurzív sorozat konvergens.

3. Milyen $\alpha > 0$ értékek esetén lesznek az alábbi rekurzív sorozatok konvergenssek? Adjuk meg a határértéküket is!

(a) $a_1 = \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}, \quad (n \geq 2).$

(b) $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{2\alpha a_n}{a_n + \alpha}, \quad (n \geq 2).$