

Név:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	6*.	Σ

1. Bizonyítsa be a következő egyenlőtlenségeket! (5+5 pont)

(a)

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad \text{ha } n > 1, (n \in \mathbb{N}).$$

(Útmutatás: használjuk a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget!)

(b)

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}, \quad a, b, c, d > 0.$$

(Útmutatás: használjuk a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget!)

2. (5+5 pont) Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok. Igazolja az alábbi összefüggéseket.

(a) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$

3. (5+5 pont) Legyen $A = \{0, 1\}$ és $B = \{1, 2\}$. Válassza ki $\mathcal{P}(A \times B)$ -ből

(a) a függvényeket,

(b) az invertálható függvényeket.

4. (5+5 pont) Mely valós α értéknél lesz

(a) az

$$f(x) = \alpha(\alpha + 1)x^2 + (2\alpha + 3)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényre igaz, hogy $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R}$?

(b) az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 2\alpha - x, & \text{ha } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

függvény invertálható?

5. **(5+5 pont)**

(a) Legyen

$$H := \{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} : x > 0\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz infimuma?

(b) Határozza meg az $A = (-3, -1] \cup \{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\} \cup [5, 6] \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak, külső pontjainak, határpontjainak, torlódási pontjainak illetve izolált pontjainak a halmazát!

6. **(10 pont - BÓNUSZ)** Mutassa meg, hogy egy halmaz torlódási pontjainak halmaza zárt.