

RLV2026, Problémák a véletlen folyamatok világából

1. Tekintsük azt a gráfot, ami két csúcsból áll (A és B), van köztük egy él, továbbá a B csúcson van egy hurok-él. Mi a stacionárius eloszlása az egyszerű bolyongásnak ezen a gráfon?
2. Lássuk be, hogy ha a *részletes egyensúly* feltétel teljesül (azaz ha $\pi(x)P_{x,y} = \pi(y)P_{y,x}$ minden $x, y \in S$ -re), akkor π stacionárius eloszlása annak a Markov-láncnak, aminek az átmenet-mátrixa P .
3. Fának hívunk egy olyan gráfot, ami összefüggő és kör-mentes. Rögzítsünk egy véges fát. Mi a stacionárius eloszlása az egyszerű bolyongásnak ezen a gráfon?
4. Tekintsünk azt a gráfot, aminek a csúcsai A, B, C, D, E és élei: $AB, AC, BC, CD, BD, BE, DE$. Mi a stacionárius eloszlása az egyszerű bolyongásnak ezen a gráfon?
5. Tekintsük azt a Markov-láncot az $S = \{1, 2, \dots, n\}$ állapottéren, amire $P_{1,2} = 1$, valamint minden $k = 2, \dots, n-1$ esetén $P_{k,k+1} = \frac{2}{3}$ és $P_{k,k-1} = \frac{1}{3}$, továbbá $P_{n,n-1} = 1$. Mi a stacionárius eloszlása?
6. **Ehrenfest modell keverésre.** Van két kutya (egy vizsla és egy labrador) és n bolha. A bolhák ide-oda ugrálhatnak a kutyák között. Minden lépésben egy egyenletesen választott bolha gondol egyet, és átugrik a másik kutyára.
 - (a) Lássuk be, hogy a vizslán levő bolhák száma Markov láncot alkot az $S = \{0, 1, \dots, n\}$ állapottéren. Mik az átmenet-valószínűségek?
 - (b) Mi a vizslán levő bolhák számának stacionárius eloszlása?
7. **Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre.** Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következőképpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.)
 - (a) Tekintsük a bal urnában levő piros golyók számát. Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenetmátrixát.
 - (b) Mi a folyamat stacionárius eloszlása?
8. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** n urnában k golyó van. Minden körben egy golyót véletlenszerűen kisorsolunk és áttesszük egy véletlenszerűen választott urnába. Staci eo?
9. **Fermi-Dirac eloszlás:** n urnában k golyó van. Minden körben egy golyót véletlenszerűen kisorsolunk és áttesszük egy véletlenszerűen választott másik urnába, amennyiben az üres (de ha nem az, akkor semmit nem teszünk). Staci eo?
10. **Bose-Einstein eloszlás:** n urnában k golyó van. Minden körben véletlenszerűen kisorsolok egy urnát és ha van benne golyó, akkor egyet közülük megfogok és átteszem egy véletlenszerűen választott urnába. Staci eo?