Stoch. Proc. Exam, December 19, 2017. MAGYAR VERZIÓ A TÚLOLDALON!

Info: Each of the 4 questions is worth 25 marks. Write your name and Neptun code on each piece of paper that you submit. Separate the solutions of different exercises (and sub-exercises) with a horizontal line. No calculators or electronic devices are allowed. No formula sheets are allowed. You have 90 minutes to complete this exam. You need to collect at least 40 points on this exam in order to pass the course.

1. Consider two dogs (a dachshund and a beagle) and N fleas. The fleas jump back and forth between the two dogs. From time to time, a uniformly chosen flea jumps from one dog to the other. Denote by X_n the number of fleas on the beagle after the n'th flea-jump.
   (a) (5 marks) Describe the transition matrix of the Markov chain (X_n).
   (b) (10 marks) Find the stationary distribution of (X_n) using the theory of birth-and-death processes.
   (c) (10 marks) Find the stationary distribution of (X_n) using a different method: define a Markov chain on the state space $\{0,1\}^{\{1,\dots,N\}}$ which keeps track of the locations of all fleas, find its stationary distribution, prove that it is indeed a stationary distribution, and finally explain how to obtain the stationary distribution of (X_n) from this.

2. Each day it rains with probability 1/4, independently from what happens on other days. Moreover if it rains then it rains exactly at noon. An old gardener waters his garden in the afternoon if he sees that the garden has not been watered (by either rain or himself) in the last three days (i.e., today, yesterday and the day before yesterday). Roughly how many times does he water his garden per year?

3. *Construction of inhomogeneous Poisson point processes (PPP)*
   (a) (5 marks) List the properties than an inhomogeneous PPP with rate function $t \mapsto \lambda(t)$ has to satisfy.
   (b) (10 marks) Precisely describe how to construct an inhomogeneous PPP with rate function $t \mapsto \lambda(t)$ (by subdividing $(0,+\infty)$ into disjoint intervals $(t_0,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $(t_2,t_3]$, $\dots$ where $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ and then throwing down a random number of points on each of these intervals, etc.)
   (c) (10 marks) Show that if $a \in (t_0,t_1]$ and $b \in (t_1,t_2]$ then indeed the number of points $N_{(a,b]}$ that fall in $(a,b]$ has the prescribed distribution. Clearly indicate which properties of the Poisson distribution you used and where you used them.

4. *Wright-Fisher model martingales.* Let (X_n) be a discrete time Markov chain with state space $S = \{0,1,\dots,N\}$ and transition matrix $\underline{\underline{P}} = (p(x,y))_{x,y=0}^{N}$, where

$$p(x,y) = \binom{N}{y}\left(\frac{x}{N}\right)^{y}\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-y}, \qquad x,y \in \{0,1,\dots,N\}.$$

   (a) (7 marks) Prove that that (X_n) is a martingale.
   (b) (8 marks) Let us assume that $X_0 = x$. Use the optional stopping theorem to calculate $\mathbb{P}(T_N < T_0)$, where $T_y = \min\{\, n \;:\; X_n = y \,\}$.
   (c) (10 marks) Prove that $M_n = (1-\frac{1}{N})^{-n} \cdot X_n \cdot (N - X_n)$ is also a martingale.

Sztoch. Foly. Vizsga, Dec. 19, 2017. ENGLISH VERSION ON OTHER SIDE!

Info: Mind a 4 kérdés 25 pontot ér. Írja fel a nevét és a Neptun-kódját minden oldalra, amit bead. Válassza el a különböző feladatok (és rész-feladatok) megoldásait egy-egy vízszintes vonallal. Kérjün ne használjon számológépet, elektromos segédeszközt vagy képletgyűjteményt. A vizsga 90 perces. A vizsgán minimum 40 pontot kell szerezni ahhoz, hogy teljesítse a kurzus követelményeit.

1. Tekintsünk két kutyát (egy tacskót és egy spánielt) és N bolhát. A bolhák a két kutya közt ugrándoznak oda-vissza. Időről időre egy egyenletesen választott bolha átugrik az egyik kutyáról a másikra. Jelölje X_n a spánielen levő bolhák számát az n-edik bolha-ugrás után.
   (a) (5 pont) Írja le az (X_n) Markov lánc átmenetmátrixát.
   (b) (10 pont) Számolja ki (X_n) stacionárius eloszlását a születési-halálozási folyamatok elméletéről tanultak segítségével.
   (c) (10 pont) Számolja ki (X_n) stacionárius eloszlását egy másik módszerrel is: definiáljon egy Markov láncot a $\{0,1\}^{\{1,\dots,N\}}$ állapottéren, amely az összes bolha helyzetét nyomon követi, írja fel a stacionárius eloszlását, bizonyítsa be, hogy ez valóban stacionárius eloszlás, és végül magyarázza el, hogy hogyan kapható meg ebből (X_n) stacionárius eloszlása.

2. Az eső minden nap a többitől függetlenül, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel esik, és ha esik, akkor pontosan délben esik. Egy öreg kertész akkor locsolja meg a kertjét, ha látja, hogy se ma délben, se tegnap, se tegnapelőtt nem érte víz (azaz locsolás vagy eső) a kertet. Nagyjából hányszor locsol egy évben?

3. *Inhomogén Poisson pontfolyamat (PPP) konstrukciója*
   (a) (5 pont) Írja fel, hogy milyen tulajdonságokkal kell, hogy rendelkezzen egy $t \mapsto \lambda(t)$ rátafüggvényű inhomogén Poisson pontfolyamat.
   (b) (10 pont) Precízen írja le, hogy hogyan konstruálunk egy $t \mapsto \lambda(t)$ rátafüggvényű inhomogén PPP-ot (felosztjuk a $(0,+\infty)$-et diszjunkt $(t_0,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $(t_2,t_3], \dots$ intervallumokra, ahol $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, és utána mindegyik intervallumra véletlenszerűen pontokat dobálunk, stb.)
   (c) (10 pont) Bizonyítsa be, hogy ha $a \in (t_0,t_1]$ és $b \in (t_1,t_2]$, akkor az $(a,b]$ intervallumba eső pontok $N_{(a,b]}$ száma valóban az előírt eloszlással fog rendelkezni. Világosan jelezze, hogy a Poisson eloszlás mely tulajdonságát használta, és azt is, hogy hol használta őket.

4. *Wright-Fisher modell martingálok.* Legyen (X_n) az a diszkrét idejű Markov lánc, aminek az állapottere $S = \{0,1,\dots,N\}$, és átmenetmátrixa $\underline{\underline{P}} = (p(x,y))_{x,y=0}^N$, ahol

$$p(x,y) = \binom{N}{y}\left(\frac{x}{N}\right)^y\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-y}, \qquad x,y \in \{0,1,\dots,N\}.$$

   (a) (7 pont) Bizonyítsa be, hogy (X_n) martingál.
   (b) (8 pont) Tegyük fel, hogy $X_0 = x$. Számolja ki $\mathbb{P}(T_N < T_0)$ értékét az opcionális megállítási tétel segítségével, ahol $T_y = \min\{\, n \,:\, X_n = y \,\}$.
   (c) (10 pont) Bizonyítsa be, hogy $M_n = (1-\frac{1}{N})^{-n} \cdot X_n \cdot (N - X_n)$ is martingál.